លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ២- ពីជគណិត វិភាគ

ផ្សាយលើកទី៩
មីនា ២០១០

blank

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

គម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ២- ពីជគណិត វិភាគ

ផ្សាយលើកទី៤

មីនា ២០១០

ភាគ១ - ទ្រឹស្តីនៃចំនួន

ភាគ២ - ពីជគណិត វិភាគ

ផ្សាយលើកទី១ : គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច -វិសមភាព ២០០៨

ផ្សាយលើកទី២ : កំរងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ កក្កដា២០០៩

ផ្សាយលើកទី៣ : កំរងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ សីហា ២០០៩

ផ្សាយលើកទី៤ : កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ មីនា ២០១០

ដោយ លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

ទំនាក់ទំនង

- វ៉ិបសាយ **http://www.dahlina.com/**
- អ៊ីមែល **lsvichet@yahoo.com**

សម្គាល់

$x \in [a; b]$ មានន័យថា $a \leq x \leq b$

$x \in (a; b)$ មានន័យថា $a < x < b$

$x \in [a; b)$ មានន័យថា $a \leq x < b$

$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$\mathbb{N}$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលមានទាំងលេខសូន្យ $\mathbb{N} = \{0;\ 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{N}^*$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}$ សំណុំចំនួនគត់ $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}^*$ សំណុំចំនួនគត់មិនសូន្យ $\mathbb{Z}^* = \{\dots; -3; -2;\ -1; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}^+$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានរឺសូន្យ $\mathbb{Z}^+ = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{R}$ សំណុំចំនួនពិត

$\mathbb{R}^+$ សំណុំចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $\mathbb{R}^+ = \{x | x \geq 0\}$

សញ្ញបូក

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{x_i}{x_i + x_j} = \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_1}{x_1 + x_3} + \frac{x_2}{x_2 + x_3}$$

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

និយមន័យ: ផលបូកស៊ីមេទ្រី និង ស៊ីគ្លិច

តាង $P(x,y,z)$ ជាអនុគមន៍មានបីអថេរ x,y,z។ តាង

$$\sum_{\text{cyclic}} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y)$$

$$\sum_{\text{sym}} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(x,z,y) + P(y,x,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y) + P(z,y,x)$$

ឧទាហរណ៍

$$\sum_{\text{cyclic}} x^3y = \sum_{\text{cyclic}} x^3y\,\mathrm{z}^0 = x^3yz^0 + y^3zx^0 + z^3xy^0 = x^3y + y^3z + z^3x$$

$$\sum_{\text{sym}} x^3 = \sum_{\text{sym}} x^3y^0z^0 = x^3y^0z^0 + x^3z^0y^0 + y^3x^0z^0 + y^3z^0x^0 + z^3x^0y^0 + z^3y^0x^0 = 2(x^3+y^3+z^3)$$

$$\sum_{\text{sym}} x^3y^2z = x^3y^2z + x^3z^2y + y^3x^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + z^3y^2x$$

$$\sum_{\text{sym}} x^2y = \sum_{\text{sym}} x^2y^1z^0 = x^2y^1z^0 + x^2z^1y^0 + y^2x^1z^0 + y^2z^1x^0 + z^2x^1y^0 + z^2y^1x^0 = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$$

$$\sum_{\text{sym}} xyz = xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx = 6xyz$$

កន្សោមមួយមានលក្ខណៈឆ្លុះ រឺ ស៊ីមេទ្រី

កន្សោមមួយ មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី បើយើងផ្លាស់អញ្ញាតណាមួយនឹងអញ្ញាតណាមួយផ្សេងទៀត កន្សោមនោះនៅដដែល។ ឧទាហរណ៍ $P = x + y + z,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}$ មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x,y,z ដោយសារបើយើងជំនួស x ដោយ y និង y ដោយ x វិញ វានៅដដែល។ បើយើងជំនួស x ដោយ z និង z ដោយ x វិញ វានៅដដែល។ បើយើងជំនួស y ដោយ z និង z ដោយ y វិញ វានៅដដែល។

ពហុធា $P = x^3 + y^3 + z$ មិនមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីទេ ព្រោះ បើយើងជំនួស z ដោយ x និង x ដោយ z យើងទាញបាន $P' = z^3 + y^3 + x \neq x^3 + y^3 + z$ ។
ចំពោះកន្សោមស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$ រឺ $x \leq y \leq z$ បាន បើទោះជាគេមិនប្រាប់បែបនេះក៏ដោយ រឺមួយជាទូទៅ x, y, z មិនចាំបាច់ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌបែបនេះក៏ដោយ លើកលែងតែមានសម្មតិកម្មមកស្រាប់ផ្សេងពីនេះ។ ហេតុអ្វីក៏យើងអាចសន្មតបានបែបនេះ?។ ព្រោះ x អាចដើរតួជំនួស y, z បាន y អាចដើរតួជំនួស x, z បាន និង z អាចដើរតួជំនួស x, y បាន។ បើមានមួយក្នុងចំនួនទាំងបីធំជាងគេ យើងតាងវាដោយ x_1 ចំនួនធំបន្ទាប់ដោយ y_1 និងតូចជាងគេដោយ z_1 ។ ដូច្នេះ $x_1 \geq y_1 \geq z_1$ ។ ដូច្នេះកន្សោមស៊ីមេទ្រី ដូចជា $P = x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$ ។ ដូច្នេះកន្សោម P នៅតែដដែលគ្រាន់តែថែមសន្ទស្សន៍ 1 ពីក្រោមតែប៉ុណ្ណោះ។

អនុគមន៍ផត-អនុគមន៍ប៉ោង

អនុគមន៍មួយផតចន្លោះចំណុច A និង B បើ ខ្សែកោងអនុគមន៍នោះឋិតនៅក្រោមបន្ទាត់ភ្ជាប់*គ្រប់ចំណុចទាំងអស់*ឋិតនៅចន្លោះ A និង B ។ វាប៉ោងបើវានៅខាងលើ។

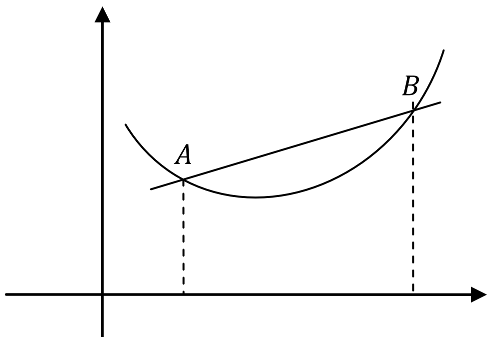
* អនុគមន៍ f មួយ ដែលកំណត់លើ $I \in \mathbb{R}$ ហៅថា ផត បើ ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in [0; 1]$ និង គ្រប់ $x, y \in I$ គេមាន

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

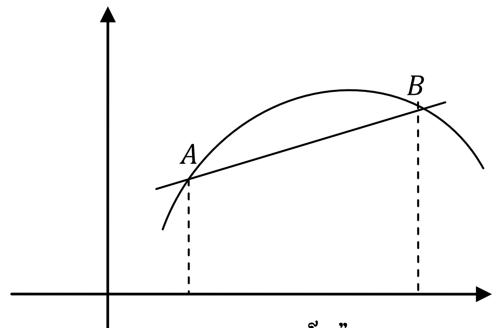
* អនុគមន៍មួយផតលើ $[a, b]$ បើ $f''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$

* បើ f ផតចន្លោះ A, B នោះ តម្លៃធំបំផុតរបស់ f បើមិននៅត្រង់ A គឺនៅត្រង់ B : $f_{max} = \max(f_A, f_B)$

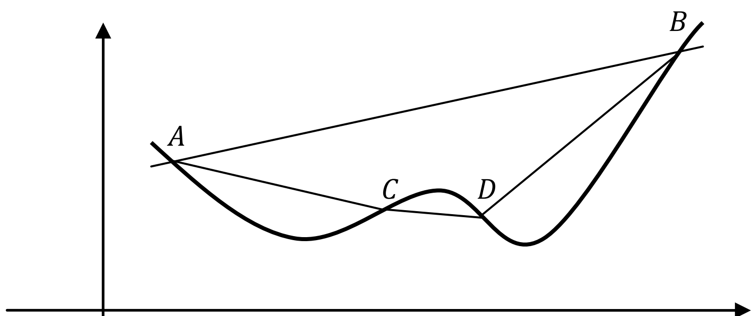
* បើ f ប៉ោងចន្លោះ A, B នោះ តម្លៃតូចបំផុតរបស់ f បើមិននៅត្រង់ A គឺនៅត្រង់ B : $f_{min} = \min(f_A, f_B)$



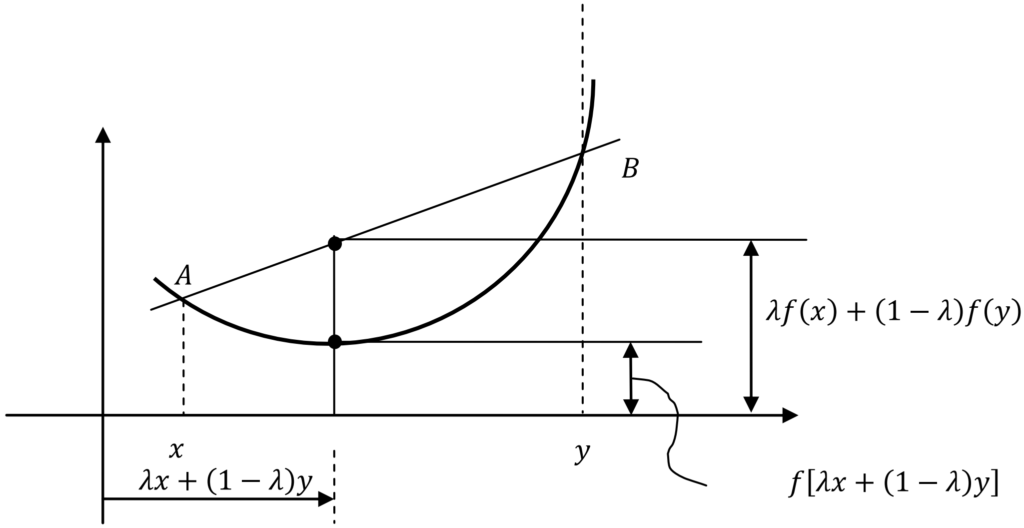
អនុគមន៍ផតចន្លោះ AB



អនុគមន៍ប៉ោងចន្លោះ AB



អនុគមន៍ផតចន្លោះ AC; អនុគមន៍ប៉ោងចន្លោះ CD; ផតចន្លោះ DB



B
A
$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
x
y
$\lambda x + (1-\lambda) y$
$f[\lambda x + (1-\lambda) y]$

មាតិកា

ផ្នែកទី១ លំហាត់

ផ្នែកទី២ ចម្លើយ

១. អនុគមន៍ដាយ

I. គណនា

1. គណនា $a^4+b^4+c^4$ ដោយដឹងថា $a+b+c=0$ និង $a^2+b^2+c^2=1$ ។

គណនា

2. $$S_n=1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}, n\in\mathbb{N}$$

3. $$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3, n\in\mathbb{N}$$

4. តាង $S=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots(2^{1024}+1)+1$ ។ ចូរគណនា $S^{1/1024}$ ។

5. (កាណាដា ១៩៦៩)

   គណនា $1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+(n-1).(n-1)!+n.n!$

   ដែល $n!=n.(n-1)\ldots 3.2.1$ ។

6. គណនា

$$S=\frac{1}{1!\,1999!}+\frac{1}{3!\,1997!}+\cdots+\frac{1}{1997!\,3!}+\frac{1}{1999!\,1!}$$

7. គេអោយចំនួនពិត u,v,s,t ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$u+v+s+t=u^7+v^7+s^7+t^7=0$$

   ចូរគណនា $P=t(t+u)(t+v)(t+s)$

II. សមភាព

ចូរបង្ហាញថា

8. $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad n\in\mathbb{N}$$

9. $$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}, n\in\mathbb{N}$$

10. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$1.2 + 2.5 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1)$$

11. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

12. តាង a, b, c ជាចំនួនពិត ខុសពី -1 និង 1 ដែល $a+b+c = abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

13. (កាណាដា ១៩៦៩)

ចូរបង្ហាញថា បើ $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ និង $p_1; p_2; p_3$ មិនសូន្យទាំងអស់ព្រមគ្នា នោះ

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

III. សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

14. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

15. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

16. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$

17. $x^3 + x^2 - 3 = 0$

18. $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

19. $2x^3 + x^2 + 5x - 3 = 0$

20. $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

21. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

22. $(x-1)^4 + (x+1)^4 = 16$

23. $(2x-3)^4 + (2x-5)^4 = 2$

24. $\dfrac{1}{2x^2 - x + 1} + \dfrac{3}{2x^2 - x + 3} = \dfrac{10}{2x^2 - x + 7}$

25. $(x-a)x(x+a)(x+2a)=3a^4$

26. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$

27. $x^2+\frac{4}{x^2}-8\left(x-\frac{2}{x}\right)-4=0$

28. $4x^4+6x^3-10x^2-9x+9=0$

29. $\frac{(x+1)^5}{x^5+1}=\frac{81}{11}$

30. $(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$

31. $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$

32. $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$

33. $x^4+4x-1=0$

34. $x^4-4x^3-1=0$

35. $x^4-2x^2-400x=9999$

36. $(x^3-2x)-(x^2+2)a-2a^2x=0$

37. $(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$

38. ដោះស្រាយសមីការ $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$ ដោយដឹងថាអង្គខាងឆ្វេងអាចដាក់ជាផលគុណដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់បាន។

39. សមីការ $x^3+ax^2+bx+c=0$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់ មានរឹសសនិទានមួយ តាងដោយ x_1 ។ ចូរបង្ហាញថា x_1 ជាចំនួនគត់ និងថា c ចែកដាច់នឹង x_1 ។

40. សមីការ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនគត់ មានរឹសសនិទានមួយ តាងដោយ x_1 ។ ចូរបង្ហាញថា x_1 ជាចំនួនគត់ និងថា d ចែកដាច់នឹង x_1 ។

41. សន្មតថា x_1,x_2,x_3 ជារឹសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា $x_1+x_2+x_3=-b/a\,, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c/a\,, x_1x_2x_3=-d/a$ ។

42. គេអោយសមីការ $x^3+px+q=0$ ។ ចូរគណនាផលបូកការេនៃរឹសរបស់វា។

43*. ដោះស្រាយសមីការ $x^3+3x-3=0$ ។

ចូររករឹសសនិទាននៃសមីការ

44. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=0$

45. $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 12 = 0$

46. $x^4 + x^3 - 5x - 5 = 0$

47. $x^4 + x^3 - 1 = 0$

48. $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$

ដោះស្រាយសមីការ

49. $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6$

50. $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 1$

51. $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$

52. $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}} + \sqrt{\dfrac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$

53. $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$

54. $\sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2+5x-2} = 1$

55. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

56. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5$

57. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

58. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$

59. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$

60. $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$

61. $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$

62. $\sqrt{x^2-9x+24} - \sqrt{6x^2-59x+149} = |5-x|$

63. $x + 12\sqrt{x} - 64 = 0$

64. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x - 8$

65. $(x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2-3x+7}$

66. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2+3x+9} + 3 = 0$

67. $x\sqrt{x^2+15} - 2 = \sqrt{x}\,\sqrt[4]{x^2+15}$

68. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}$

69. $\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=3$

70. $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$

71. $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$

72. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}=a$

73*. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$

74. $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$

75. $\sqrt{2x-1}-x+a=0$

76. $\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}=a-x$

77. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$

78. $\sqrt{x+\sqrt{a^2+2a-3}}+\sqrt{x+a+\sqrt{2-2a+2a^2-a^3}}=a\sqrt{1-x}$

79. $(x-1)^2+(y+5)^2=0$

80. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

81. $(x+y-a)^2+(y-1)^2+(x+3)^2=0$

82*. (ស្វែរគី ១៩៩៨)

តាង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត កំនត់ដោយ $a_1=t$ និង $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ តើតំលៃរបស់ t ខុសៗគ្នាចំនួនប៉ុន្មាន ដែល $a_{1998}=0$?

83*. (MOSP ២០០១)

ចូរកំនត់គ្រប់ត្រីធាតុនៃចំនួនពិត (a,b,c) ដែល

$$a^2-2b^2=1,\ 2b^2-3c^2=1 \text{ និង } ab+bc+ca=1$$

84*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៣)

ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$ ដែល p ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនិងជាចំនួនពិត។

85*. (អន្តរជាតិឡូស៊ីស ១៩៦៧)

គេអោយសមីការ

$$x^5+5\lambda x^4-x^3+(\lambda\alpha-4)x^2-(8\lambda+3)x+\lambda\alpha-2=0$$

ក) ចូរកំនត់ α ដើម្បីអោយសមីការមានរឹសដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ តែមួយគត់។

ខ) ចូរកំនត់ α ដើម្បីអោយសមីការមានរឹសដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ តែពីរគត់។

86*. (អន្តរជាតិ ១៩៥៩)

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

ខ) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

គ) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

87*. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

88*. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}=x$$

(មានរ៉ាឌីកាល់ចំនួន n ដង)

89. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=a,$$

90. ដោះស្រាយសមីការ $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5;\ a\neq b$ ។

91. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមចំពោះ $x\geq -1$

$$2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

92. គេអោយសមីការ $x^2-3x+1=m\sqrt{x^4+x^2+1}$ (*) ដែលក្នុងនោះ m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង x ជាអញ្ញាត។

ក) ដោះស្រាយសមីការករណី $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ។
ខ) ចូរកំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយ សមីការ(*) មានរឹសចំនួនមួយ។

93. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$$

94. ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{\sqrt{1+x^3}}{x^2+2}=\frac{2}{5}$$

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

95. $\begin{cases} x^2-xy+3y^2+2x-5y-4=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$

96. $\begin{cases} 2xy-y^2+5x+20=0 \\ 3x+2y-3=0 \end{cases}$

97. $\begin{cases} x^2-4y^2=200 \\ x+2y=100 \end{cases}$

98. $\begin{cases} x^2+9y^2+6xy-6x-18y-40=0 \\ x+30=2y \end{cases}$

99. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

100. $\begin{cases} x-y=5 \\ xy=-4 \end{cases}$

101. $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

102. $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=3 \end{cases}$

103. $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$

104. $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x+y=1 \end{cases}$

105. $\begin{cases} x^5+y^5=275 \\ x+y=5 \end{cases}$

106. $\begin{cases} x^3-y^3=63 \\ xy=4 \end{cases}$

107. $\begin{cases} x+y+xy=-11 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$

108. $\begin{cases} x^2y-xy^2=30 \\ x+xy-y=13 \end{cases}$

109. $\begin{cases} (x+0,2)^2+(y+0,3)^2=1 \\ x+y=0,9 \end{cases}$

110. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

111. $\begin{cases} x^3y+x^3y^2+2x^2y^2+x^2y^3+xy^3=30 \\ x^2y+xy+x+y+xy^2=11 \end{cases}$

112. $\begin{cases} 2x^2+xy-45y^2=0 \\ 2x+9y^2=4 \end{cases}$

113. $\begin{cases} x^2-5xy=16 \\ 2xy+y^2=3 \end{cases}$

114. $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12 \\ (x+y)^2-\dfrac{1}{2}y^2=7 \end{cases}$

115. $\begin{cases} x^3+xy^2=10 \\ x^2y-y^3=-3 \end{cases}$

116. $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0 \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0 \end{cases}$

117. $\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0 \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0 \end{cases}$

118. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x+y-2)=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y}{x}(x+y-1)=9 \end{cases}$

119. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

120. $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0 \\ 8-x^2=(x+2y)^2 \end{cases}$

121. $\begin{cases} |xy-2|=6-x^2 \\ 2+3y^2=2xy \end{cases}$

122. $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 3x-4y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$

123. $\begin{cases} 2u+v+w=6 \\ 3u+2v+w=9 \\ 3u^3+2v^3+w^3=27 \end{cases}$

124. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+yz+zx=-5 \\ x^2+y^2-z^2=12 \end{cases}$

125. $\begin{cases} xy+x+y=7 \\ yz+y+z=-3 \\ xz+x+z=-5 \end{cases}$

126. $\begin{cases} x^2-yz=14 \\ y^2-xz=28 \\ z^2-xy=-14 \end{cases}$

127. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=7 \\ z^2+zx+x^2=19 \end{cases}$

128. $\begin{cases} xy + xz = 8 \\ yz + xy = 9 \\ xz + yz = -7 \end{cases}$

129. $\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y} = 1 \\ \dfrac{7yz}{y+z} = 1 \\ 6xz = x + z \end{cases}$

130. $\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3 \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1 \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$

131. $\begin{cases} y^3 = 9x^2 - 27x + 27 \\ z^3 = 9y^2 - 27y + 27 \\ x^3 = 9z^2 - 27z + 27 \end{cases}$

132. $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{4}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}} + \dfrac{3}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{13}{6} \end{cases}$

133. $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x-y} - \sqrt[4]{x+y}} = 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{x-y} - \sqrt[4]{x+y}} = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

134. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}} + 4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}} = 5 \\ x = y + 1 \end{cases}$

135. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{10}{3} \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{cases}$

136. $\begin{cases} x + y + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{12}{x-y} \\ xy = 15 \end{cases}$

137. $\begin{cases} y\sqrt{x^2 + y^2} - 2ay - 3 = 0 \\ x\sqrt{x^2 + y^2} = 2ax \end{cases}$

138. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$

139. ចូរកំនត់តំលៃ a ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានរឹសតែមួយគត់

$$\begin{cases}\sqrt{y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ y = ax + 1\end{cases}$$

140*. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{5}{6}z = 61 \\ x + y + z = 79\end{cases}$$

ក) ចូរគណនាផលបូក $\frac{2}{5}y + \frac{z}{2}$; ខ) ក្នុងចំនោមរឹសជាចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់របស់ប្រព័ន្ធ ចូរកំនត់រឹសដែលមានតំលៃ x ធំបំផុត។

141*. (**អន្តរជាតិ ១៩៦១**)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2\end{cases}$$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិតដែលគេអោយ។ ចូរកំនត់លក្ខខណ្ឌលើ a និង b ដើម្បីអោយចំលើយវិជ្ជមាននិងមានតំលៃខុសគ្នា។

142*. (**អន្តរជាតិ ១៩៦៣**)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5\end{cases}$$

ដែលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\boldsymbol{y}$ ជាចំនួនពិត។

143*. (**អន្តរជាតិ ១៩៦៤**)

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0\end{cases}$$

ដែលមានមេគុណផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

ក) a_{11}, a_{22}, a_{33} ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ខ) មេគុណផ្សេងទៀតអវិជ្ជមានទាំងអស់

គ) សមីការនិមួយៗមានផលបូកមេគុណវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ជាចំលើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធ។

144*. (**អន្តរជាតិ ១៩៦៤**)

ចូរកំនត់ចំនួនពិត x_1, x_2, x_3, x_4 ដែល

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \\ x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \\ x_3 + x_1x_2x_4 = 2 \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$

145*. (**អន្តរជាតិ ១៩៦៦**)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_3 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_3 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases}$$

ដែល a_1, a_2, a_3 និង a_4 ជាចំនួនពិតខុសគ្នាពីរៗ។

146*. (**អន្តរជាតិ ឡង់លីស១៩៦៧**)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases}$$

147. (**អន្តរជាតិ ឡង់លីស១៩៦៧**)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} |x + y| + |1 - x| = 6 \\ |x + y + 1| + |1 - y| = 4 \end{cases}$$

148*. (**អន្តរជាតិ ឡង់លីស១៩៦៧**)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \\ \dots\dots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = a^n \end{cases}$$

149. (អន្តរជាតិ ឡង់លីស១៩៦៧)

តើក្នុងករណីណា ដែលប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} x + y + mz = a \\ x + my + z = b \\ mx + y + z = c \end{cases}$$

មានចំលើយ? ចូរកំនត់លក្ខខណ្ឌដែលចំលើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធខាងលើ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

150*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៧)

គេអោយស្វ៊ីត $(\boldsymbol{c_n})$:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 \\ \dots & \qquad\qquad \dots\dots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\ \dots & \qquad\qquad \dots\dots \end{aligned}$$

ដែល $a_1, a_2, \dots, a_8$ ជាចំនួនពិត ដែលមិនសូន្យទាំងអស់គ្នា។ ដោយដឹងថា ក្នុងចំនោម (c_n) មានចំនួនដែលស្មើសូន្យច្រើនរាប់មិនអស់ ចូរកំនត់តំលៃរបស់ n ដើម្បីអោយ $c_n = 0$ ។

151*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2 = 2x - y \\ y^2 = 2y - z \\ z^2 = 2z - t \\ t^2 = 2t - x \end{cases}$$

152*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + ax_2 + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1000}^2 + ax_{1000} + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{cases}$$

ដែល a ជាចំនួនពិត។

153*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}2x_1-5x_2+3x_3=0\\2x_2-5x_3+3x_4=0\\\dots\dots\dots\dots\dots\\2x_n-5x_1+3x_2=0\end{cases}$$

ដែល n ជាចំនួនគត់ ≥ 3 ។

154*. តាង (x,y,z) ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x=y(4-y)\\y=z(4-z)\\z=x(4-x)\end{cases}$$

ចូរកំនត់តំលៃរបស់ផលបូក $S=x+y+z$ ។

155. (**កាណាដា ១៩៧០**)

ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases}x+yz=2\\y+zx=2\\z+xy=2\end{cases}$$

156. (**អន្តរជាតិ ១៩៦៨**)

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=y\\ay^2+by+c=z\\az^3+bz+c=x\end{cases}$$

ដែលក្នុងនោះ $a\neq 0$ ។ តាង $\Delta=(b-1)^2-4ac$ ។ ចូរបង្ហាញថាបើ $\Delta<0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការគ្មានរឹស។

157. ចូរកំនត់ $a\in\mathbb{R}$ ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases}x^3-ay^3=\dfrac{1}{2}(a+1)^2\\x^3+ax^2y+xy^2=1\end{cases}$$

មានរឹសផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y=0$

158. ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases}(2-x)(3x-2z)=3-z & (1)\\y^3+3y^2=x^2-3x+2 & (2)\\y^2+z^2=6z & (3)\\z\leq 3 & (4)\end{cases}$$

159. គេអោយ $a, b, c > 0$ ។ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} = c - zx \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} = a - xy \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} = b - yz \end{cases}$$

160. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

V. វិសមភាព

ចូរបង្ហាញថា

161. $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

162. $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < \binom{100}{50} < \frac{2^{100}}{10}$

163. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, n \in \mathbb{N}$

164. $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{12}$

165. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$$

166. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

167. តើមួយណាធំជាង $(1{,}000001)^{1.000.000}$ រឺ 2 ?។

168. តើមួយណាធំជាង $1\,000^{1\,000}$ រឺ 1001^{999} ?។

169. (កាណាដា ១៩៦៩)

តើមួយណាធំជាង $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ រឺ $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ ចំពោះ $c \geq 1$?។

170. ផលគុណនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានចំនួនn មានតំលៃស្មើមួយ។ ចូរបង្ហាញថាផលបូករបស់វា មិនមានតំលៃតូចជាង n ទេ។

171. សន្មតថា $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ជាចំនួនពិតមានសញ្ញាដូចគ្នា មានតំលៃធំជាង -1 ។ ចូរបង្ហាញថា $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ។

172. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 6$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

173. គេអោយ $f(x) = ax^2 + 1998x + c$ ដែល $a; c \in \mathbb{Z}; |a| < 2000; |c| < 2000$ ហើយ f មានរឹសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1; x_2$ ។ ចូរបង្ហាញថា $|x_1 - x_2| \geq 1/998$ ។

174. គេអោយចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, x, y ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a + b = 1; ax + by = 2; ax^2 + by^2 = 3$$

ចូរបង្ហាញថា $4 < ax^3 + by^3 < 4{,}5$

175. គណនាតំលៃតូចបំផុតនៃ

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right|$$

176. ចូរកំនត់ a, b, c ដើម្បីអោយ$f(x) = ax^2 + bx + c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|f(x)| \leq 1$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1; 1]$ និងដែល $K = \frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ មានតំលៃធំបំផុត។

177. គេអោយចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$ ដែល$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\min_{i \neq j}\left(a_i - a_j\right)^2 \leq \frac{1}{100}; \quad \min_{i \neq j}\left|a_i^2 - a_j^2\right| \leq \frac{1}{36}$$

178. តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណ ចូរសាកល្បងតាង

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x$$

179. គេអោយ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$$

180. តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\begin{aligned}(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2c^2 + 2a^2 - b^2) \\ \leq (2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab)\end{aligned}$$

181. ដោយដឹងថា $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}; a < b$ ។ ចូរកំនត់ $\min F$ ដែល

$$F = \frac{a + b + c}{b - a}$$

182. (អន្តរជាតិ ១៩៦១)

តាង a, b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ដែលមានក្រលាផ្ទៃ S ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

តើពេលណាយើងមានសមភាព?។

183. (អន្តរជាតិ ឡង់លីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់គូរ៉ិចទ័រ f និង g ស្ថិតក្នុងប្លង់ វិសមភាព

$$af^2 + bfg + cg^2 \geq 0$$

ពិត បើនិងមានតែបើ លក្ខខណ្ឌដូចតទៅនេះត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a \geq 0; c \geq 0; 4ac \geq b^2$។

184. គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$ និង ចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots; a_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i<j} |a_i - a_j| \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

185. (អន្តរជាតិ ២០០០)

គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $abc = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

186. (ហុងគ្រី ១៩៩៦)

តាង a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a + b = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{a + 1} + \frac{b^2}{b + 1} \geq \frac{1}{3}$$

187. (ប៊្រីស្តីបង)

ចូរបង្ហាញថា

ក) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b គេមាន $a^2+b^2 \geq 2ab$ និង $4ab \leq (a+b)^2$ វាស្មើគ្នា បើ $a=b$និង ច្រាសមកវិញ។

ខ) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x>0$ គេមាន $x+1/x \geq 2$ ។ វាស្មើគ្នា បើ $x=1$ និង ច្រាសមកវិញ។

188. (កាណាដា ១៩៧១)

តាង x និង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $x+y=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$$

189. គេអោយ២ចំនួនពិត a, b មិនសូន្យ។ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2}{a^2}$$

190. (រុស្ស៊ី ១៩៩៨)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, y>0$

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{xy}$$

191. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y គេមាន

$$x^2+y^2+1>x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

192. គេឱ្យ $x, y, z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$$

193. ចូរបង្ហាញថា បើ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ នោះគេមាន

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

194. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y} \geq 0$$

ចូរកំណត់ករណីសមភាព។

195. (អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ១៩៩៦)

គេឱ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

196. (អាមេរិច ១៩៩៧)

គេអោយ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

197. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩៦)

គេអោយ $a, b, c > 0$ ដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1$$

198. (វិសមភាពកូស៊ីស្វាត)

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ គេមាន

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ វ៉ិចទ័រ $(a_1, \dots, a_n)$ និង $(b_1, \dots, b_n)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ។

សំគាល់

ក្នុងគណិតវិទ្យា វិសមភាពកូស៊ី–ស្វាត អ្នកខ្លះហៅថាវិសមភាពស្វាត វិសមភាពកូស៊ី រឺក៏ វិសមភាព កូស៊ី–ប៊ុន្យាកូវស្គី–ស្វាត (គឺហៅតាមឈ្មោះ អូគុស្តាំង ល្វីសកូស៊ី(Augustin Louis Cauchy), វិចទ័រ យ៉ាកូលេវិច ប៊ុន្យាកូវស្គី (Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨០៤–១៨៨៩)និង ហែរម៉ាន អាម៉ានឌុស ស្វាត(Hermann Amandus Schwarz, គណិតវិទូអាល្លឺម៉ង់,១៨៤៣–១៩២១))។

199. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ គេមាន

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$$

200. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេមាន

$$\frac{(a+2b+3c)^2}{a^2+2b^2+3c^2}\leq 6$$

201. គេអោយចំនួនពិត a, b, c វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{100}{3}$$

202. (អាមេរិច ១៩៧៨)

គេឱ្យចំនួនពិត a, b, c, d, e ដែល

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 \end{cases}$$

ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ e ។

203. (អូស្ត្រាលី ១៩៩៣)

គេឱ្យចំនួនគត់ $n>1$, ចំនួនពិត $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$ និង $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s-a_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s-a_i}{a_i} \geq n(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

204. (ចិន ១៩៨៧ ១៩៨៨)

ក) គេអោយ $a_1, a_2, a_3>0$ ដែល $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$ ។ ចូរបង្ហាញថា a_1, a_2, a_3 ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

ខ) គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 3$ និង $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$ ដែល

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)$$

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ i, j, k ខុសគ្នាពីរៗ ចំនួន a_i, a_j, a_k ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

205. គេអោយ $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$ ។ តាង $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ និង $S_2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{S_2-a_1^2}{S_1-a_1}+\frac{S_2-a_2^2}{S_1-a_2}+\cdots+\frac{S_2-a_n^2}{S_1-a_n} \geq S_1$$

206. (សឹង្ហបុរី ២០០០)

គេអោយ $a, b, c, d>0$ ដែល $a^2+b^2=(c^2+d^2)^3$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b} \geq 1$$

207. គេអោយ $x, y, z>1$ ដែល $1/x+1/y+1/z=2$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

208. (ឥណ្ឌា ២០០១)

គេអោយ $x, y, z > 0$ ដែល $xyz \geq xy + yz + zx$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$xyz \geq 3(x + y + z)$$

209. គេអោយ a, b, c ដែល $a + b + c = abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\max(a, b, c) \geq \sqrt{3}$$

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ $a, b, c > 0$ និង $a + b + c = abc$ ចូរតាង

$$a = \tan x\,, b = \tan y\,, c = \tan z$$

ដូច្នេះ x, y, z អាចចាត់ទុកជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណស្រួចបាន មានន័យថា $x, y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ និង $x + y + z = \pi$ ។

210. (អន្តរជាតិ ១៩៩៩)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$ ។

ក) ចូរកំនត់ចំនួនថេរ C តូចបំផុត ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$; គេមាន

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

ខ) ចំពោះចំនួនថេរ C នេះ ចូរកំនត់ករណីសមភាព។

211. គេអោយចំនួនពិត x, y, z, t ដែល

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$$

ចូរគណនាតំលៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតនៃ $P = xy + yz + zt + tx$ ។

212. (អន្តរជាតិសតលីស ២០០១)

តាង $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2} < \sqrt{n}$$

213. (អៀរឡង់ ១៩៩៨)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x; y; z > 1$ ដែល $1/x + 1/y + 1/z = 2$ គេមាន

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

214. (វិសមភាពតំរៀប)

គេអោយ $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ និង $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត កើនពីរ។ តាង σ ជាចំលាស់នៃ$\{1,2,\ldots,n\}$ ។

ចូរបង្ហាញថា ផលបូក $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ មានតំលៃធំបំផុត ពេល $\sigma(i) = i$ និង តូចបំផុត ពេល $\sigma(i) = n - i$ ចំពោះគ្រប់ i ។

មានន័យថា S_σ មានតំលៃធំបំផុតពេល ស្វ៊ីតទាំង២រៀបតាមលំដាប់ដូចគ្នា ហើយ តូចបំផុតបើរៀបតាមលំដាប់ផ្ទុយគ្នា។

215. (អន្តរជាតិ ១៩៧៤)

គេអោយចំនួនពិត $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ និង $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ ។ តាង $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ជាចំលាស់នៃ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

216. ចូរគណនាតំលៃតូចបំផុតរបស់

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

ចំពោះ $x \in (0, \pi/2)$ ។

217. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b, c \geq 0$ គេមាន

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a \geq 3abc$$

218. (អន្តរជាតិ ១៩៧៨)

គេអោយ $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ហើយមានតួខុសគ្នាពីរៗ។

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

219. (ចិន ១៩៨៤/១៩៨៥)

គេអោយ $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geq a_1+a_2+\cdots+a_n$$

220. គេអោយចំនួនមិនអវិជ្ជមាន p,q,x,y,z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\geq\frac{x^{1999}+y^{1999}+z^{1999}}{p+q}$$

221. (វិសមភាព Chebyshev)

ចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីតកើននៃចំនួនពិតពីរ តាងដោយ $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ និង $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$ គេមាន

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\leq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

ផ្ទុយទៅវិញ បើ $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$ នោះ

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\geq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

Pafnuty Lvovich Chebyshev

គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨២១–១៨៩៤

222. (វិសមភាពណែសប៊ីត)

គេអោយ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

223. គេអោយ $a,b,c,d \geq 0$ ដែល $ab+bc+cd+da=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$

224. គេអោយ $a,b,c>0$ និង $n\in\mathbb{N}^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

225. គេអោយ $x,y,z>0$ ដែល $xyz=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$

226.** (វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រ មធ-មជ រឺវិសមភាពកូស៊ី)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1,a_2,\dots,a_n$ រឺសូន្យ គេមាន

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

ដោយសមភាពកើតមាន ទាល់តែ និងមានតែ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ តែប៉ុណ្ណោះ។

227. (អន្តរជាតិ ១៩៦៤)

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$$

228. (អន្តរជាតិ ឡង់លីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}\geq(n!)^{\frac{2}{n}}$$

(n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន) ហើយបង្ហាញថាសមភាពអាចតែក្នុងករណី $n=1$ មួយតែប៉ុណ្ណោះ។

229. (អន្តរជាតិ ឡង់លីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

230. (អន្តរជាតិ ឡង់លីស ១៩៦៧)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$x_1x_2\dots x_k\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1}\right)\leq x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_k^{n+k-1}$$

ដែល $x_i > 0\ (i = 1,2,\dots,k), k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ ។

231. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ គេមាន

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$$

232.** (រុស្ស៊ី ២០០០)

គេអោយ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ដែល $xyz = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \ge 2(xy + yz + zx)$$

233. (សូវៀត ១៩៦២)

គេអោយ $a, b, c, d > 0$ ដែល $abcd = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \ge 10$$

234. គេអោយ $a, b, c \ge 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(a + b + c)^3 \ge a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

235. គេអោយ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$abc \ge (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

236. គេអោយ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ដែល $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{k=1}^{n} a_k(1 - a_k) \le \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$$

237. (អូទ្រីស ២០០០)

គេអោយចំនួនពិត a, b ដែល $a \ne 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \ge \sqrt{3}$$

238. ចំពោះ $n \in \mathbb{N}^*$ តាង

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ;\ V_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ចូរបង្ហាញថា ស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតកើន ហើយស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតចុះ។

239.** (សូវៀត ១៩៦៩)

គេអោយចំនួនគត់ $n \ge 3$ និង $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}$$

240. (ចិន ១៩៨៩/១៩៩០)

គេអោយ $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ដែល $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(2+a_1)(2+a_2)\dots(2+a_n) \geq 3^n$$

241.** តាង a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

បើ (1) $0 < a, b \leq 1$ រឺក៏ (1) $ab \geq 3$ ។

242. គេអោយ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$ ដែល

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$$

ចូរបង្ហាញថា $x_1 x_2 \dots x_{n+1} \geq n^{n+1}$ ។

243. គេអោយចំនួនគត់ $n > 1, x_1 x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}^{+*}$និង $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ។ តាង $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ។ ចូរកំនត់ចំនួនថេរ $C(n)$ ធំបំផុត ដែល

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(s-x_j)}{x_j} \geq C(n)\left[\prod_{j=1}^{n} a_j\right]^{\frac{1}{n}}$$

244. គេអោយ $x, y, z > 0$ ដែល $x+y+z = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64$$

245.* (រូម៉ានី ១៩៩៧)

គេអោយ ចំនួនគត់ $n \geq 2$ និង $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ដែល $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ ។ ចូរគណនាតំលៃតូចបំផុតរបស់

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$$

246.* គេអោយ $a, b, c, d \geq 0$ ដែល $a+b+c+d = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27} abcd$$

247.* គេអោយ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{n^{n-3}} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq n^2(n-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

248. គេអោយ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}$$

249. (**អាមេរិចសតលីស ២០០២**)

ចូរគណនាតំលៃធំបំផុតរបស់ $S = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2)$

បើ $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2$ ។

250. (**អន្តរជាតិ ១៩៩៥**)

តាង abc ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geq \frac{3}{2}$$

251. (**អន្តរជាតិ ២០០១**)

តាង a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

252. តាង a, b, c ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

253. (**អន្តរជាតិ ១៩៨៤**)

តាង x, y, z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $x + y + z = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

254. គេអោយចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2\left(1 + \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

255. គេអោយចំនួនពិតបួនផ្សេងគ្នា a, b, c, d ដែល

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4; \quad ac = bd$$

ចូរគណនាតំលៃធំបំផុតនៃ

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$$

256. គេអោយ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រ ស្មើ 2 ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{52}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

257. ចំពោះគ្រប់ $a, b, c > 0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \ge abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

258. 1) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន p, q ដែល $p + q = 1$ គេមាន

$$pa + qb \ge a^p b^q;\ \forall\, a, b > 0$$

2) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន p, q ដែល $p + q = 1$ គេមាន

$$px + qy \ge x^p y^q;\ \forall\, x, y > 0$$

3) (**វិសមភាពមធ-មធធរៅ**)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ដែល $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ គេមាន

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \ge x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n};\quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

4) (**វិសមភាព** Hölder)

គេអោយ $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $1/p + 1/q = 1$ និង បណ្ដាចំនួនពិត $a_1, a_2, \dots, a_n$ និង $b_1, b_2, \dots, b_n$ ចូរបង្ហាញថា

$$|a_1b_1| + |a_2b_2| + \dots + |a_nb_n| \le (|a_1|^p + |a_2|^p + \dots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} \times (|b_1|^q + |b_2|^q + \dots + |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}$$

ដែលអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}(b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ហើយ បណ្ដា a_ib_i សុទ្ធតែវិជ្ជមានរឺសូន្យទាំងអស់ រឺបើមិនអញ្ចឹង សុទ្ធតែអវិជ្ជមានរឺសូន្យទាំងអស់។

259. គេអោយ $a, b \ge 0$ និង $p, q > 1$ ដែល $1/p + 1/q = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge ab$$

260. (**ប៉ូឡូញ ១៩៩៤**)

គេអោយចំនួនគត់ $n \ge 1$ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតរបស់ផលបូក

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \dots + \frac{x_n^n}{n}$$

ដែល $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិត ដែល $1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n = n$ ។

261. (វិសមភាព Minkowski)

តាង $p \in [1; +\infty)$ ហើយ $a_1, a_2, \dots, a_n$ និង $b_1, b_2, \dots, b_n$ ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(|a_1+b_1|^p + |a_2+b_2|^p + \cdots + |a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(|b_1|^p + |b_2|^p + \cdots + |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ដែលអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ហើយមានទិសដៅដូចគ្នា។

262. គេអោយ $x, y, z > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}} + (y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}(y+x)^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}} + (z^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(z+y)^{\frac{2}{3}}} \le 1$$

263. គេអោយចំនួនពិត a, b, c, d ។ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតរបស់

$$S = \sqrt{(a+1)^2 + 2(b-2)^2 + (c+3)^2} + \sqrt{(b+1)^2 + 2(c-2)^2 + (d+3)^2} + \sqrt{(c+1)^2 + 2(d-2)^2 + (a+3)^2} + \sqrt{(d+1)^2 + 2(a-2)^2 + (b+3)^2}$$

264. តាង x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

1) ចូរបង្ហាញថា បើ $x + y + z = xyz$ នោះ

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2) ចូរបង្ហាញថា បើ $0 < x, y, z < 1$ និង $xy + yz + zx = 1$ នោះ

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

265. (បេឡារុស ១៩៩៩)

គេអោយស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ $x_1, x_2, \dots$ និង $y_1, y_2, \dots$ កំនត់ដោយ

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}; x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}; y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $2 < x_n y_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n > 1$ ។

266. តាង $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិតខុសៗគ្នាចំនួន n ឋិតក្នុងចន្លោះ $[-1; 1]$ ដែល $n \ge 2$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\geq 2^{n-2}$$

ដែល $t_i=\prod_{j\neq i}\left|x_j-x_i\right|$ ។

267. យើងយកចំនួនពិតបួននៅក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right]$ ដោយមិនបាច់រើស។ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមានពីរក្នុងចំនោមនោះ តាងដោយ a និង b ដែល

$$\left|a\sqrt{4-b^2}-b\sqrt{4-a^2}\right|\leq 2$$

268. (**វិសមភាពយិនសិន**)

តាង $n\geq 1$ ជាចំនួនគត់ ហើយ f ជាអនុគមន៍ផត លើដែន I ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $l_1,l_2,\dots,l_n\in\mathbb{R}^{+*}$ ដែល $l_1+l_2+\cdots+l_n=1$ គេមាន

$$f(l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_nx_n)\leq l_1f(x_1)+l_2f(x_2)+\cdots+l_nf(x_n);$$
$$\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in I$$

ហើយ បើ f ផតដាច់ខាត នោះកន្សោមខាងលើក្លាយជាសមភាព ពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n$

ករណី f ជាអនុគមន៍ប៉ោង :

$$f(l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_nx_n)\geq l_1f(x_1)+l_2f(x_2)+\cdots+l_nf(x_n);$$
$$\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in I$$

យ៉ូហាន យិនសិន

(Johan Jensen)

ឈ្មោះពេញ យ៉ូហាន លុយឌ្វិច វីលាម វ៉ាល់ដឺមែរ យិនសិន

(Johan Ludwig William Valdemar Jensen)

(ឧសភា ១៨៥៩ - កុម្ភៈ ១៩២៥) គណិតវិទូ និង វិស្វករជាតិដាណឺម៉ាក។ គេស្គាល់គាត់ដោយសារវិសមភាពយិនសិន។ ក្នុងឆ្នាំ ១៩១៥ គាត់បានបង្ហាញថា រូបមន្តវិសមភាពរបស់គាត់អាចប្រើបានលើ វិភាគកុំផ្លិច។

269. (កូរ៉េ ១៩៩៨)

គេអោយ $a,b,c > 0$ ដែល $a+b+c = abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

270. ចូរកំនត់ចំនួនថេរ M តូចបំផុត ដែលចំពោះគ្រប់ $a,b>0$ គេមាន

$$a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}} \le M(a+b)^{\frac{1}{3}}$$

271. គេអោយ $x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

272. (អូទ្រីស ២០០០)

គេអោយ $a,b>0$ និង $n \in \mathbb{Z}$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \ge 2^{n+1}$$

273. (អន្តរជាតិ ២០០១)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $l \ge 8$ និង $a,b,c>0$ គេមាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \ge \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

274. គេអោយចំនួនគត់ $n \ge 1$ ។ តាង $\alpha, t \in [1;+\infty)$ និង $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$។

តាង $a_1,a_2,\dots,a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha}+\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t \ge n\left(\frac{1}{n^{\alpha}}+n^{\beta}\right)^t$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1/n$ ។

275. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩៨)

គេអោយ $x_1,x_2,\dots,x_n \ge 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1} \ge \frac{n}{1+(x_1x_2\dots x_n)^{\frac{1}{n}}}$$

276. (អាមេរិច ១៩៨០)

គេអោយ $a,b,c \in [0;1]$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1$$

277. (**អាមេរិច ១៩៧៧**)

គេអោយ $0<p\leq a,b,c,d,e\leq q$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\leq 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

278. (**អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ២០០៤**)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b,c>0$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

279. (**អន្តរជាតិ ១៩៨៣**)

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

280. **និយមន័យ**- គេអោយ ចំនួនគត់ $n\geq 2$ បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1,a_2,\dots,a_n$ និង បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $l_1,l_2,\dots,l_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n}l_i=1$ ។ យើងកំនត់អនុគមន៍ M លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ

$$M(\alpha)=\left[\sum_{i=1}^{n}l_ia_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

គេហៅ $M(\alpha)$ ថា មធ្យមលំដាប់ α នៃបណ្តាចំនួន a_i ផ្សំនឹងមេគុណ l_i ។

ទ្រឹស្តីបទ វិសមភាពមធ្យមលំដាប់ α

គេអោយ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ និង $l_1,l_2,\dots,l_n>0$ ដែល $l_1+l_2+\cdots+l_n=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $M(\alpha)$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ និង $\alpha<\beta$ គេមាន $M(\alpha)\leq M(\beta)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ។

281. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ គេមាន

$$\min\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\leq M(-1)\leq M(0)\leq M(1)\leq M(2)\leq \max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

រឺ

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
$$\leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

ហើយសមភាពកើតមាន ពេល $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ។

282. (អៀរ៉ង់ ១៩៩៨)

គេអោយ $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ ដែល $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i \, ; \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right\}$$

283. គេអោយ $x, y, z \geq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$8(x^3+y^3+z^3)^2 \geq 9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)$$

284. គេអោយចំនួនគត់ $n > 1$ និង $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ដែល $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

285. (ទួរគី ១៩៩៧)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$ ។ ចូរគណនាតំលៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n} + \frac{x_2^5}{x_1+x_3+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}$$

ដែល $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ហើយ $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ ។

286. (វិសមភាព Schur)

តាង $x; y; z$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $r > 0$ យើងមាន

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

រឺ

$$\sum_{\text{cyclic}} x^r(x-y)(x-z) \geq 0$$

287. 1) គេអោយ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3+3abc &\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \\ &\ge 2\left[(ab)^{3/2}+(bc)^{3/2}+(ca)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

2) តាង $t\in(0;3]$។ ចំពោះគ្រប់ $a,b,c\ge 0$ ចូរបង្ហាញថា

$$(3-t)+t(abc)^{2/t}+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)$$

3) បង្ហាញថា

$$\begin{aligned} &\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(abc)^4+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca) \\ &2+(abc)^2+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca) \\ &1+2abc+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

288. គេអោយ $a,b,c>0$។ ចូរបង្ហាញថា

1) $$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

2) $$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c$$

289. 1) តាង a_1,a_2,b_1,b_2 ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a_1+a_2=b_1+b_2$ និង $\max(a_1,a_2)\ge\max(b_1,b_2)$។ តាង x និង y ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}\ge x^{b_1}y^{b_2}+x^{b_2}y^{b_1}$$

2) (វិសមភាព Muirhead)

តាង $a_1;a_2;a_3;b_1;b_2;b_3$ ជាចំនួនពិត ដែល

$$\begin{aligned} &a_1\ge a_2\ge a_3\ge 0; b_1\ge b_2\ge b_3\ge 0; \\ &a_1\ge b_1; a_1+a_2\ge b_1+b_2; \\ &a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3 \end{aligned}$$

ករណីនេះ គេថាស្វ៊ីត $(a_1;a_2;a_3)$ *លប់* លើស្វ៊ីត $(b_1;b_2;b_3)$។

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x;y;z$ គេមាន

$$\sum_{\text{sym}}x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}\ge\sum_{\text{sym}}x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$$

290. គេអោយ a,b,c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1$$

291. គេអោយ $a,b,c,d>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{3}{2}(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge ab\sqrt{cd}+ac\sqrt{bd}+ad\sqrt{bc}+bc\sqrt{da}+bd\sqrt{ca}+cd\sqrt{ab}$$

292. (អៀរ៉ង់ ១៩៩៦)

តាង $x; y; z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

293. តាង $x; y; z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $xy + yz + zx = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}$$

294. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩០)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b, c យើងមាន

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$$

295. (អៀរ៉ង់ ១៩៩៦)

គេអោយ $x, y, z > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

296. (ជប៉ុន ១៩៩៧)

គេអោយ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}$$

VI. វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

297. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0$

298. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \leq 0$

299. $2x^3 - 3x^2 + 7x - 3 > 0$

300. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \geq 0$

301. $x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 5 < 0$

302. $3x^4 - 10x^2 + 3 > 0$

303. $3x^2(x-4)^2 < 32 - 5(x-2)^2$

304. $(x^2-x)^2+(x^2-x)+2\geq 0$

305. $x(x+1)(x+2)(x+3)<48$

306. $(x+1)^4>2(1+x^4)$

307. $x^4-x^3-10x^2+2x+4<0$

308. $\frac{1}{x}<\frac{2}{x-2}$ 309. $\frac{x+4}{x-2}<\frac{2}{x+1}$

310. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\leq\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$

311. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2-3x+1}{x-3}>2x-\frac{1}{4x-8}$

312. $\frac{x^3-2x^2+5x+2}{x^2+3x+2}\geq 1$

313. $\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+7}>0$

314. $\frac{1}{x^2+x}\leq\frac{1}{2x^2+2x+3}$

315. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}<\frac{1}{30}$

316. $\frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}>\frac{8x-30}{2x-7}+\frac{5x-4}{x-1}$

317. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}<\frac{5}{4}$ 318. $x^2+\frac{4x^2}{(x-2)^2}\leq 5$

319. $\frac{(x+1)^4}{x(x^2+1)}>\frac{128}{15}$

320. $x^3-\frac{1}{x^3}\geq 4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

321. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2<\frac{2x^2+72}{x^2-36}$

322. $|x^3-x|\leq x$ 323. $\frac{4}{|x+1|-2}\geq|x-1|$

324. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$

325. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1$

326. $\sqrt{4-x^2} + \dfrac{|x|}{x} \geq 0$

327. $(1-a)\sqrt{2x+1} < 1$

328. $\sqrt{x+1} > \sqrt{3-x}$

329. $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x-a}$

330. $\sqrt{24-10x} > 3-4x$

331. $x > \sqrt{1-x}$

332. $x > \sqrt{24-5x}$

333. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{4}} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$

334. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$

335. $\sqrt{x^2+x-12} < x$

336. $1-\sqrt{13+3x^2} \leq 2x$

337. $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$

338. $4-x < \sqrt{x^2-2x}$

339. $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

340. $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$

341. $\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\dfrac{1}{3}$

342. $\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} > 4x-2$

343. $\sqrt{x+1} + 1 < 4x^2 + \sqrt{3x}$

344. $\dfrac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1$

345. $2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right) < 3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2\right)$

346. ចូរបង្ហាញថាពហុធា $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ។

347. សន្មតថា $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ និង $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, Q(x) \not\equiv 0$ ។ ចូរបង្ហាញថាវិសមភាព $P(x)/Q(x) > 0$ និង $P(x)Q(x) > 0$ សមមូលគ្នា។

348. ដោយដឹងថា $f(-1) < 1, f(1) > -1, f(3) < -4$ ដែល $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ចូរកំនត់សញ្ញារបស់ a ។

349. (**អន្តរជាតិ ១៩៦០**)

ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x + 9$$

350. (**អន្តរជាតិ ១៩៦២**)

ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

351. ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\sqrt{9x^2+16} \geq 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x}$$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

352*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

$$\begin{cases} x + y \leq 2, \\ x + y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ដែលក្នុងនោះ $z = 2x + 3y$ មានតំលៃធំបំផុត។

353. ចូរកំនត់រឺសគត់ធម្មជាតិរបស់ប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ xy \leq 17 \\ \dfrac{y+1}{x+2} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

354. ចូរកំនត់តំលៃរបស់ a ដែលសំនុំ

$$\{(x;y) | x^2 + y^2 + 2x \leq 1\} \cap \{(x;y) | x - y + a \geq 0\}$$

មានចំនុចតែមួយគត់។ ចូរកំនត់ចំនុចនោះ។

355. ចូរកំនត់$(x;y)$ ដែល

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 12 = 0 \\ x^2 + 4y^2 \leq 60 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

356. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

$$\begin{cases}\sqrt{4-3x}\geq x\\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1}<5\end{cases}$$

357. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x^3+x^2(13-y-z)+x(2y+2z-2yz-26)+5yz-7y-7z+30=0 & (1)\\ x^3+x^2(17-y-z)-x(2y+2z+2yz-26)-3yz+y+z-2=0 & (2)\\ x^2-11x+28\leq 0 & (3)\end{cases}$$

358. ចូរកំនត់ a ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធខាងក្រោមមានរឹស

$$\begin{cases}x^2+2xy-7y^2\geq \dfrac{1-a}{a+1}\\ 3x^2+10xy-5y^2\leq -2\end{cases}$$

២. អនុគមន៍ អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល-លោការីត

I. គណនា

គណនា

359. $25^{\log_5 3}$ **360.** $e^{\ln \ln 3}$ **361.** $\ln ab - \ln|b|$

362. $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$ **363.** $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$

364. $\dfrac{\log_2 25}{\log_2 5}$ **365.** $\log_3 5 \, . \log_4 9 \, . \log_5 2$

366. $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$ **367.** $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

368. ចូរគណនា $\log_{30} 8$ បើ $\log_{30} 3 = c, \log_{30} 5 = d$ ។

369. ចូរគណនា $\log_9 40$ បើ $\log 15 = c, \log_{20} 50 = d$ ។

370. ចូរគណនា $\log(0{,}175)^4$ បើ $\log 196 = c, \log 56 = d$ ។

371. គណនា

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$$

II. សមភាព

372. ចូរបង្ហាញថា បើ $a = \log_{12} 18 , b = \log_{24} 54$ នោះ $ab + 5(a - b) = 1$ ។

III. សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

373. $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$

374. $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34.15^{2x-x^2}$

375. $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$

376. $\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x + 6\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x = 7$

377. $3^{2x^2} - 2.3^{x^2+x+6} + 3^{2(x+6)} = 0$

378. $x^2.2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2.2^{x-2}$

379. $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 50$

380. $x^{\log_x(1-x)^2} = 9$

381. $\log_3(x^2 + 4x + 12) = 2$

382. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$

383. $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$

384. $\log(x - 3) + \log(x + 6) = \log 2 + \log 5$

385. $\log(x - 4) + \log(x + 3) = \log(5x + 4)$

386. $\ln(x^3 + 1) - 0,5\ln(x^2 + 2x + 1) = \ln 3$

387. $\log_5(x - 2) + 2\log_5(x^3 - 2) + \log_5(x - 2)^{-1} = 4$

388. $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$

389. $\log_2(x + 2)^2 + \log_2(x + 10)^2 = 4\log_2 3$

390. $\log_2 \dfrac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \dfrac{3x-7}{3x-1}$

391. $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$

392. $\log_3(5x-2) - 2\log_3 \sqrt{3x+1} = 1 - \log_3 4$

393. $\log(3x-2) - 2 = \frac{1}{2}\log(x+2) - \log 50$

394. $\log^2\left(1+\frac{4}{x}\right) + \log^2\left(1-\frac{4}{x+4}\right) = 2\log^2\left(\frac{2}{x-1}-1\right)$

395. $\log_2 x^4 + \log_a x^2 = 1$

396. $\log_2(x-1) - \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+3} = \log_8(x-a)^3 + \log_{1/2}(x-3)$

397. $\log_2(6x^2+25x) = 1 + \log_2(ax+4a-2)$

398. $\log_3 x \log_4 x \log_5 x = \log_3 x \log_4 x + \log_4 x \log_5 x + \log_5 x \log_3 x$

399. $\left(\log_3 \frac{3}{x}\right)\log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

400. $\log(10x^2)\log x = 1$

401. $\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 \frac{x}{2}} = 2\log_2 \sqrt{x} + 3 - \log_2^2 x$

402. $2\log_9 x + 9\log_x 3 = 10$

403. $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$

404. $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$

405. $\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0$

406. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) = 4 - \log_{2x+3}(6x^2+23x+21)$

407. $\log^2(4-x) + \log(4-x)\log\left(x+\frac{1}{2}\right) - 2\log^2\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$

408. $(x^2\log_x 27)\log_9 x = x + 4$

409. $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

410. $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$

411. $4\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} + 2\log_{4x} x^2 = 3\log_{2x} x^3$

412. $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1$

413. $\left(\log_{1/\sqrt{1+x}} 10\right)\log(x^2 - 3x + 2) = (\log(x-3))\log_{1/\sqrt{1+x}} 10 - 2$

414. $\frac{\log_x(2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a x}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2}$

415. $\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + (\log_{ax} a)\log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$

416. $\sqrt{1 + \log_{0,04} x} + \sqrt{3 + \log_{0,2} x} = 1$

417. $\sqrt{2 - \log_x 9} = -\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$

418. $\log_x(x^2 + 1) = \sqrt{\log_{\sqrt{x}}\left(x^2(1 + x^2)\right) + 4}$

419. $\sqrt{\log_2 x} - 0,5 = \log_2 \sqrt{x}$

420. $\log(3^x - 2^{4-x}) = 2 + \frac{1}{4}\log 16 - \frac{x}{2}\log 4$

421. $\log_3\left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x$

422. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28} + \frac{2}{9}\right) = \log_5 0,2$

423. $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$

424. $\log(6.5^x + 25.20^x) = x + \log 5$

425. $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_5(2^x - 2)^2 = 2$

426. $x(1-\log 5)=\log(4^{x}-12)$

427. $\log_2(4^{x}+1)=x+\log_2(2^{x+3}-6)$

428. $\log_3(9^{x}+9)=x-\log_{\frac{1}{3}}(28-2.3^{x})$

429. $\log_2\left(\frac{8}{2^{x}}-1\right)=x-2$

430. $\log_{1/3}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1\right)=\log_{1/3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-4\right)$

431. $(x+1)^{\log(x+1)}=100(x+1)$

432. $x^{\frac{\log x+5}{3}}=10^{5+\log x}$

433. $3^{\log x}=54-x^{\log 3}$

434. $\log_2(9-2^{x})=10^{\log(3-x)}$

435. $|x-1|^{\log^2 x-\log x^2}=|x-1|^3$

436. $\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)\log(7-x)=0$

437. $3.2^{\log_x(3x-2)}+2.3^{\log_x(3x-2)}=5.6\text{^}\log_{x^2}(3x-2)$

438. $\left|1-\log_{1/5}x\right|+2=\left|3-\log_{1/5}x\right|$

439. $\log_4\left(6+\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-2\right|\right)=\frac{1}{2}+\log_2\left|\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-2\right|\right|$

440. $5^{x}+12^{x}=13^{x}$

441. $3^{x}+4^{x}+5^{x}=6^{x}$

442. $2^{x}=1-x$

443. $\log_2(4-x)=x-3$

444. ដោយដឹងថា $x=9$ ជាឫសមួយនៃសមីការ

$$\log_\pi(x^2+15a^2)-\log_\pi(a-2)=\log_\pi\frac{8ax}{a-2}$$

ចូរកំនត់ឫសផ្សេងទៀតនៃសមីការនេះ។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

445. $$\begin{cases}\log_{a^2}x-\log_{a^4}y=3\\ \log_{a^6}x+\log_{a^8}y=4\end{cases}$$

446. $$\begin{cases}2^{x+y-1}+2^{x-y+1}=3\\ \frac{1}{7}.3^{x\log_3 2+y\log_3 2-2}+3^{x\log_3 2-y\log_3 2-2}=\frac{1}{7}\end{cases}$$

447. $$\begin{cases}10^{1+\log(x+y)}=50\\ \log(x-y)+\log(x+y)=2-\log 5\end{cases}$$

448. $$\begin{cases}x^{\log_x 2}=\log_3(x+y)\\ x^2+y^2=65\end{cases}$$

449. $$\begin{cases}\log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1\\ x^2-y^2=2\end{cases}$$

450. $$\begin{cases}(3y^2+1)\log_3 x=1\\ x^{2y^2+10}=27\end{cases}$$

451. $$\begin{cases}4^{-y}\log_2 x=4\\ \log_2 x+2^{-2y}=4\end{cases}$$

452. $$\begin{cases}y+\log x=1\\ x^y=0{,}01\end{cases}$$

453. $$\begin{cases}x^{\log y}=2\\ xy=20\end{cases}$$

454. $\begin{cases} 2^x . 8^{-y} = 2\sqrt{2} \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + 0,5 = \dfrac{1}{2}\log_3 9y \end{cases}$

455. $\begin{cases} (\log_a(xy) - 2)\left(\log_a \dfrac{4}{9}\right)^{-1} = -1 \\ x + y = 5a \end{cases}$

456. $\begin{cases} 2\left(\log_y x + \log_x y\right) = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$

457. $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2,5 \\ x + y = a^2 + a \end{cases}$

458. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 28 \\ \log_9 x - \log_{\frac{1}{9}} y = 1,5 \end{cases}$

459. $\begin{cases} \log_2 y = \log_4(xy - 2) \\ \log_9 x^2 + \log_3(x - y) = 1 \end{cases}$

460. $\begin{cases} 2^{x^2+y} = 4^{\frac{y^2+x}{2}} \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$

461. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} - 3y/x} = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{2y} = \sqrt{12} - \sqrt{8} \end{cases}$

462. $\begin{cases} x + y = 4 + \sqrt{y^2 + 2} \\ \log x - 2\log 2 = \log(1 + 0,5y) \end{cases}$

463. $\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{1/3}\left(\log_{1/2} y\right) = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases}$

464. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\sqrt[y]{9} = 9^{\frac{x}{2y}} \\ \dfrac{x + 3y}{x} = \dfrac{2x}{y} - 4 \end{cases}$

V. វិសមភាព

465. តើមួយណាធំជាង រវាង 2^{300} និង 3^{200} ?

466. ចូរបង្ហាញថា

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$ ។

467. ដោយមិនប្រើតារាង ចូរបង្ហាញថា $\log_4 9 > \log_9 25$ ។

468. គេអោយ $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x_1^{x_1}.x_2^{x_2}\dots x_n^{x_n} \geq (x_1.x_2\dots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}$$

469. (អាមេរិច សតលីស១៩៩៩)

គេអោយ $x, y, z > 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}$$

VI. វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

470. $\log_{1/5}(2x^2+5x+1) < 0$

471. $\log_{1/3}(x^2+2x) > 0$

472. $\log_{1/2}(x^2-4x+6) < -2$

473. $\log_{1/3}\dfrac{3x-1}{x+2} < 1$

474. $\log_{0,25}\dfrac{35-x^2}{x} \geq -\dfrac{1}{2}$

475. $\log_5(2x-4) < \log_5(x+3)$

476. $\log_{0,1}(x^2+x-2) > \log_{0,1}(x+3)$

477. $\log\sqrt{x^2-3x+4} - \log\sqrt{x+1} > 0$

478. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_2(2-x)$

479. $\log_{1/2}\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1)$

480. $\log(x-2)+\log(27-x)<2$

481. $\log(x-1)+\log(x-2)<\log(x+2)$

482. $\log_2(2-x)+\log_{1/2}(x-1)>\log_{\sqrt{2}}3$

483. $\log_{1/5}(2x+5)-\log_{1/5}(16-x^2)\leq 1$

484. $\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\log_{1/2}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)\geq 1$

485. $\log_7 x-\log_7(2x-5)\leq \log_7 2-\log_7(x-3)$

486. $\log_{1/3}(x-1)+\log_{1/3}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$

487. $\log_2 x^2+\log_2(x-1)^2>2$

488. $\log^2 x+3\log x-4\geq 0$

489. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leq \dfrac{1}{2}$

490. $\log_{1/3} x>\log_x 3-\dfrac{5}{2}$

491. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{1/2}\dfrac{x^5}{4}\right)^2-20\log_2 x+148<0$

492. $(2\log_3^2 x-3\log_3 x-8)(2\log_3^2 x-3\log_3 x-6)\geq 3$

493. $(\log_2^2 x+3\log_2 x+1)(\log_2^2 x+3\log_2 x-3)<5$

494. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2}<(0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$

495. $2^{2x+1}-21.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geq 0$

496. $0{,}1^{x+1}<0{,}8+2.10^x$

497. $2^x + 2^{-x} < 3$

498. $3^{4-3x} - 35.3^{3x-2} + 6 \geq 0$

499. $\dfrac{6}{2^x - 1} < 2^x$

500. $3^{\log x+2} < 3^{\log x^2+5} - 2$

501. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log x^2} + 2 > 3.2^{-\log(-x)}$

502. $\log_2(4^x - 5.2^x + 2) > 2$

503. $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$

504. $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1)\log_{\sqrt{2}}\dfrac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$

505. $\log(1 + 2^{x+1}) > \dfrac{(x\log 2)\log 4}{\log 8} + \log 3$

506. $\sqrt{\log_2\dfrac{3-2x}{1-x}} < 1$

507. $\sqrt{\log_3(9x - 3)} \leq \log_3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

508. $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geq 9 - 3^x$

509. $\log_{1/3}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$

510. $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$

511. $\log_{4/3}\left(\sqrt{x+3} - x\right) > 0$

512. $\log_{1/2}\left(\sqrt{5-x}-x+1\right)>-3$

513. $x^{\log_2 x-2}>\frac{x}{4}$

514. $x^{(\log x)^2-3\log x+1}>1000$

515. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\geq 2$

516. $\log_a(x-1)+\log_a x>2$

517. $\frac{1}{5-\log_a x}+\frac{2}{1+\log_a x}<1, 0<a<1$

518. $\frac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$

519. $\log_a(1-8a^{-x})\geq 2(1-x)$

520. $\log_{x-3}(x-1)<2$

521. $\log_x(x+2)>2$

522. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$

523. $\log_{x+3}(x^2-x)<1$

524. $\log_{3x+5}(9x^2+8x+2)>2$

525. $\log_{2x+4}(x^2+1)\leq 1$

526. $\log_x\frac{15}{1-2x}<-2$

527. $\log_{x^2}(3-2x)>1$

528. $\log_{x^2+3x}(x+3) < 1$

529. $\log_{\frac{2}{3}|x-2|} 2^{1-x^2} \geq 0$

530. $\log_{\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)}(x^2 - 10x + 22) > 0$

531. $|x|^{x^2-x-2} < 1$

532. $\left|\log_2 \dfrac{x}{6}\right|^{x^2-18x+56} > 1$

533. $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2 - 16x} < 0$

534. $-\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{2x - x^2 + 8}} \geq 0$

535. $\dfrac{\log_{0,5} x + 2}{\sqrt{2x-1}} > 0$

536. $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{\log_3(x-1)} < 0$

537. $25.2^x - 10^x + 5^x > 25$

538. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} > \dfrac{(\log_5 x)(2 - \log_3 x)}{\log_3 x}$

539. $\dfrac{1}{\log_4 \dfrac{x+1}{x+2}} \leq \dfrac{1}{\log_4(x+3)}$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

540. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right)} \geq 0 \\ 2^{x-3} - 31 > 0 \end{cases}$

541. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{\log_5\left(\dfrac{1}{3}(\log_3 5 - 1)\right)} \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 2 \geq 0 \end{cases}$

542. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

៣. ត្រីកោណមាត្រ

I. គណនា

543. ដោយដឹងថា $\sin\alpha+\cos\alpha=a$ គណនា ក) $|\sin\alpha-\cos\alpha|$; ខ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$

544. ដោយដឹងថា $\tan\alpha+\cot\alpha=p$ គណនា ក) $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$; ខ) $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha$

545. គណនា $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ បើ $\tan\alpha=-\frac{3}{4},\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ ។

546. គណនា $\cos(70°+\alpha)$ បើ $\sin(40°+\alpha)=b, 0<\alpha<45°$ ។

547. គណនា $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ បើ $\sin\alpha=\frac{12}{13},\cos\beta=\frac{8}{17};\sin\gamma=\frac{4}{5};\ 0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ ។

548. គណនា $\sin 3\alpha,\cos 3\alpha,\tan 3\alpha$ បើ $\cot\alpha=4/3,\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ ។

គណនា

549. $$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$$

550. $$\frac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$$

551. $$\frac{\sin\alpha-3\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-3\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$$

552. $$\frac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}$$

553. $$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

554. $$\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{6\pi}{7}$$

555. អោយ $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4, 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ ។ គណនា $\tan\frac{\alpha}{2}$ ។

556. មុំស្រួចរបស់ត្រីកោណមាន α,β,γ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2},\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)$$

គណនា $\alpha+\beta+\gamma$ ។

គណនាដោយមិនប្រើតារាង

557. $\cos 292°30'$

558. $\operatorname{cosec} 10° - \sqrt{3}\sec 10°$

559. $\dfrac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$

560. $-2\sqrt{2}\sin 10°\left(2\sin 35° - \dfrac{\sec 5°}{2} - \dfrac{\cos 40°}{\sin 5°}\right)$

561. $\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 73° \cos 47°$

562. $\sin 6° - \sin 42° - \sin 66° + \sin 78°$

563. $\dfrac{\cos^2 33° - \cos^2 57°}{\sin 21° - \cos 21°}$

564. $6\cos 40° - 8\cos^3 40°$

565. $\tan^6 20° - 33\tan^4 20° + 27\tan^2 20° - 3$

566. $\cot^2 36° \cot^2 72°$

567. គណនា

$$A = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}$$

568. គណនា

$$P = \left(1 - 4\cos^2 \frac{\pi}{1999}\right)\left(1 - 4\cos^2 \frac{2\pi}{1999}\right)\left(1 - 4\cos^2 \frac{3\pi}{1999}\right)\dots\left(1 - 4\cos^2 \frac{999\pi}{1999}\right)$$

II. សមភាព

បង្ហាញសមភាព

569. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

570. $\dfrac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha} = \tan^6\alpha$

571. អោយ α, β, γ ជាមុំនៃត្រីកោណ។ ចូរបង្ហាញថា $\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$ ។

បង្ហាញសមភាព

572. $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

573. $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

574. $$\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=1$$

575. $$\frac{1-2\sin^2\beta}{1+\sin 2\beta}=\frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}$$

576. $$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

577. $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan 2\alpha+\sec 2\alpha$$

578. $$\frac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}=\cos 2\alpha$$

579. $$\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{1-\tan^2\alpha\cot^2\beta}=-\cos^2\alpha\sin^2\beta$$

580. $$3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\sin^4\alpha$$

581. $$\cos^4\alpha=\frac{1}{8}\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{3}{8}$$

582. $$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2\alpha)$$

583. $$4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1+3\cos^2 2\alpha$$

584. $$8\left(\sin^8\frac{\alpha}{2}+\cos^8\frac{\alpha}{2}\right)=1+6\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$$

បង្ហាញសមភាព

585. $$\frac{2\sin\alpha+\sin 4\alpha}{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}=\tan 2\alpha\cos\alpha$$

586. $$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

587. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{3}{2}$

588. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$

589. $\log_{1/3}[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta]=0$

590. $\frac{\cot^2 2\alpha-1}{2\cot 2\alpha}-\cos 8\alpha\cot 4\alpha=\sin 8\alpha$

591. $16\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=1$

592. $\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha$

593. $\sin 9\alpha+3\sin 7\alpha+3\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=8\sin 6\alpha\cos^3\alpha$

594. $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$

595. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}; 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

596. ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{p}{2^n+1}$$

(ក្នុងនោះមានឫស n ដង) ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។

597. គេអោយ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ចូរបង្ហាញថា មានពហុធា T_n មួយ ដែល $\cos nx=T_n(\cos x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ពហុធា T_n នេះ គេហៅថា ពហុធា Tchebychev។

598. គេអោយចំនួនពិត x ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+3$$

ចូរបង្ហាញថា $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2\cos\frac{\pi}{9}$

599. ចូរបង្ហាញថា

$$\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{4}$$

III. សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

600. $\cos(1{,}5\pi + x) = \sqrt{2}\sin(x+\pi)\cos x$

601. $2\sin x\cos x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

602. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

603. $\tan^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$

604. $2\tan x\cos x + 1 = 2\cos x + \tan x$

605. $\sin x + \cos^2 x = 1/4$

606. $3\cos x = 2\sin^2 x$

607. $6\cos^2 x + 13\sin x = 12$

608. $3\cos^2 x - 4\cos x - \sin^2 x - 2 = 0$

609. $\cos^4\dfrac{x}{5} + \sin^2\dfrac{x}{5} = 1$

610. $\sin x - \dfrac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1}\sin^2 x = \sin^2 x$

611. $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$

612. $2\tan x - 2\cot x = 3$

613. $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4\tan x$

614. $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$

615. $2\cos x\left(\cos x - \sqrt{8}\tan x\right) = 5$

616. $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{6}\right)(\sec x + \tan x) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x$

617. $\log_2(3\sin x) - \log_2\cos x - \log_2(1-\tan x) - \log_2(1+\tan x) = 1$

618. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x\cos 2x$

619. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = 0$

620. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$

621. $\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} + \dfrac{2}{\sin x\cos x} - 4 = 0$

622. $\tan 5x + 2\sin 10x = 5\sin 5x$

623. $\cos 2x - 3\sin x + 2 = 0$

624. $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2}\sin(5x + 6) = 4$

625. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$

626. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0$

627. $4\cos x\,(2 - 3\sin^2 x) = -(1 + \cos 2x)$

628. $\tan^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3$

629. $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

630. $\sin x = 5\cos x$ 631. $\sin x - \cos x = 0$

632. $\sin x + \cos x = 0$ 633. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$

634. $\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0$

635. $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$

636. $\sin 2x - \sin^2 x = 2\sin x - 4\cos x$

637. $\tan x + \sin(\pi + x) = 2\sin^2\frac{x}{2}$

638. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x$

639. $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$

640. $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

641. $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$

642. $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$

643. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2$

644. $\frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$ 645. $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 0$

646. $\sin^2 x\,(1 + \tan x) = 3\sin x\,(\cos x - \sin x) + 3$

647. $\sin^4 x + \sin^3 x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos^3 x + \cos^4 x = 1$

648. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 649. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

650. $\sin 5x = \sqrt{3}(1+\cos 5x)$ 651. $\cos x + \sin x = 1$

652. $\sin x + \cos x \cot\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ 653. $\sin|x| \tan 5x = \cos x$

654. $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

655. $\cos 6x + \tan^2 x + \cos 6x \tan^2 x = 1$

656. $\frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = -1$ 657. $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$

658. $2\tan 3x - 3\tan 2x = \tan^2 2x \tan 3x$

659. $\cot x + \cot 15° + \cot(x + 25°) = \cot 15° \cot x \cot(x + 25°)$

660. $\sin x + \tan\frac{x}{2} = 0$ 661. $1 + \cos x + \tan\frac{x}{2} = 0$

662. $\tan 2x + \cot x = 4\sin 2x$ 663. $15\cot\frac{x}{2} + 130\sin x = \frac{53}{3}\tan\frac{x}{2}$

664. $\frac{59}{4}\cos x + 6\sin x \tan\frac{x}{2} = 4\tan x \cot\frac{x}{2}$

665. $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \tan x$

666. $\cos 3x = -2\cos x$ 667. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$

668. $\cos 4x = \cos^2 3x$ 669. $3\sin\frac{x}{3} = \sin x$

670. $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$ 671. $\sin\frac{3}{2}x + 3\sin x = 3\sin\frac{x}{2}$

672. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

673. $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$

674. $a\cos x + b\sin x = c,\ a^2 + b^2 \neq 0$

675. $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ 676. $\sin 4x - \sin 2x = 0$

677. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$ 678. $\cos 2x - \cos 6x = 0$

679. $\cos(3x - 4\pi) = \sin(\pi - x)$ 680. $\sin \pi x^2 = \sin \pi(x^2 + 2x)$

681. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

682. $1 + \sin 2x = (\sin 3x - \cos 3x)^2$ 683. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$

684. $\cos x - \cos 3x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$ 685. $\sin x + \sin 3x + 4\cos^3 x = 0$

686. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$ 687. $\sin x + 2\sin 2x = -\sin 3x$

688. $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$ 689. $\sqrt{2}\sin 10x + \sin 2x = \cos 2x$

690. $\cot x \sin 2x - \cos 2x = 1$

691. $\tan 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$

692. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$

693. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

694. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

695. $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$

696. $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$

697. $\cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x$

698. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

699. $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$

700. $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} 2x = \operatorname{cosec} 4x$

701. $\tan 3x - \tan x = 0$

702. $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

703. $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$

704. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$

705. $\cos 3x \sin 7x = \cos 2x \sin 8x$

706. $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \sin 2x$

707. $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$

708. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

709. $\cos^2 x + \cos^2 2x \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

710. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right]$

711. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{9}{16}$

712. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$

713. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -0{,}5$

714. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$

715. $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

716. $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8}$

717. $8\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$

718. $\tan x \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

719. $\sin 3x = 4\sin x \cos 2x$

720. $\sin 3x \cos x = 1{,}5\tan x$

721. $\tan x \cot 3x = 4$

722. $6\tan x + \frac{5}{\tan 3x} = \tan 2x$

723. $\sin x \cos x \sin 3x - \cos 3x \sin^2 x = 6\cot x$

724. $2\sin 3x \sin x + \left(3\sqrt{2} - 1\right)\cos 2x = 3$

725. $2\cos 4x + 5\cos 2x - 1 = 2\sin^2 x$

726. $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x$

727. $\tan^2 x + \cos 4x = 0$

728. $\tan x + \cot x - \cos 4x = 3$

729. $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

730. $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \dfrac{5\pi}{4}\right)$

731. $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin x$

732. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sin x \cos x)$

733. $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$

734. $\sin\dfrac{\sqrt{x}}{2} + \cos\dfrac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{2}\sin\sqrt{x}$

735. $\sin^2 x + 2\tan^2 x + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan x - \sin x + \dfrac{11}{12} = 0$

736. $8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0$

737. $\sin^4 x + \sin^4\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right) + \cos^4 x = 0{,}5\sin^2 2x$

738. $\left(\cos\dfrac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\dfrac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$

739. $3\sin 3x = \cos 4x - \sin 9x - \cos 10x$

740. $\tan x + \frac{1}{9}\cot x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$

741. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

742. $\sqrt{2\cos 2x + 2} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4\cos 2x}}$

743. $\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{2}\cos x = 0$

744. $\sin x + \sqrt{\cos x} = 0$

745. $2\cos x = \sqrt{2 + 2\sin 2x}$

746. $\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 3x} = \sin 2x$

747. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{0{,}5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$

748. $\sqrt{1 + 4\sin x\cos x} = \cos x - \sin x$

749. $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$

750. $\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}} = \sin x + \cos x$

751. $4\sin 3x + 3 = \sqrt{2\sin 3x + 2}$

752. $\sqrt{13 - 18\tan x} = 6\tan x - 3$

753. $\sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x} = 2\sin(3x + \pi/4)$

754. $2\sqrt{3\sin x} = \frac{3\tan x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}$

755. $\sqrt{\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\cot 3x + \sin^2 x - \frac{1}{4}} = \sin\frac{3x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

756. $\log_5 \tan x = (\log_5 4)\log_4(3\sin x)$

757. $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\dfrac{\sin x}{5}}$

758. $2^{\cos 2x} = 3.2^{\cos^2 x} - 4$

759. $\cot 2^x = \tan 2^x + 2\tan 2^{x+1}$

760. $x^{3\sin 2x+2} = \sqrt{x}$

761. តើសមីការ $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$ និងសមីការ

$$1 + \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 0$$

ដូចគ្នាដែររឺទេ?

762. ចូរកំនត់តំលៃ p ដើម្បីអោយសមីការ $\sqrt{p}\cos x - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-p}$ មានចំលើយ។

763. ចូរកំនត់តំលៃ a, b ដើម្បីអោយសមីការខាងក្រោមពិតចំពោះគ្រប់ x

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

764. $\begin{cases} x - y = 6{,}5\pi \\ 3\cos^2 x - 12\cos y = -4 \end{cases}$

765. $\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3}\pi \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$

766. $\begin{cases} x + y = \pi/4 \\ \cos x + \cos y = a \end{cases}$

767. $\begin{cases} \sin 3x \cos 2y = 2^a - \cos 3x \sin 2y \\ \cos(x - y) = 0{,}5 \end{cases}$

768. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

769. $\begin{cases}\tan x+\tan y=2\\ \cos x\cos y=0{,}5\end{cases}$

770. $\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{1}{4}\\ 3\tan x=\tan y\end{cases}$

771. $\begin{cases}\tan x-2\sin y=-2\\ 5\tan x+2\sin y=-4\end{cases}$

772. $\begin{cases}4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y\\ \cos 2x=0\end{cases}$

773. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}-\cos y=\dfrac{a+3}{3}\\ \sin x\cos y=-\dfrac{a}{3}\end{cases}$

774. $\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}-\tan y=2a+2\\ \tan y+(a^2+2a)\cos x=0\end{cases}$

775. $\begin{cases}\sin^2(-2x)-\left(3-\sqrt{2}\right)\tan 5y=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2\\ \left(3-\sqrt{2}\right)\sin(-2x)+\tan^2 5y=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2\end{cases}$

776. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z=m^2\\ \tan^3 x+\tan^3 y+\tan^3 z=m^3\end{cases}$$

V. វិសមភាព

777. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $0\le x\le\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ គេមាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)>1$$

778. គេអោយត្រីកោណមិនកែង ABC ។ ចូរបង្ហាញថា

$3\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C-5(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C)\le 9+\tan^2 B\tan^2 C+\tan^2 C\tan^2 A$

779. ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}}>\sqrt{3\cos\frac{\pi}{7}}$$

780. គេអោយ $2n$ ចំនួនពិត $x_1;x_2;\ldots;x_{2n}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតនៃ $n\in\mathbb{N}^*$ ដែល

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}\right)=1800$$

781. គណនាតំលៃធំបំផុតនៃ

$$T=\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

ដែល A,B,C ជាមុំបីនៃត្រីកោណមួយ។

782. តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និងចំនួនពិត x ដែល $0<(n+1)x<\pi/2$ ចូរបង្ហាញថា

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x)<\tan nx\sin x$$

783. គេអោយ A,B,C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$27\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right)<4\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

784. តាង A,B,C ជាមុំនៃត្រីកោណ ABC ។ គណនាតំលៃធំបំផុតនៃ $\sin C$ បើ

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=m,\qquad m>\frac{1}{2}$$

785. គេអោយ អនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(\tan 2x)=\tan^4 x+\cot^4 x$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f(\sin x)+f(\cos x)\geq 196$ ។

786. គេអោយត្រីកោណ ABC មាន $A>B>C$ ។ គណនាតំលៃតូចបំផុតនៃ

$$y=\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}-1$$

VI. វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

787. $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3>0$

788. $\cos 2x+5\cos x+3\geq 0$

789. $\tan^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\tan x-2\sqrt{3}<0$

790. $\cot^2 x+\cot x\geq 0$

791. $2\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x-2\cos 2x+2-\sqrt{2}<0$

792. $\cos\pi x+\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)>0$

793. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \dfrac{3}{8}$

794. $\cos x \cos 2x \cos 3x \leq 0$

795. $\sin^4 \dfrac{x}{3} + \cos^4 \dfrac{x}{3} > \dfrac{1}{2}$

796. $\sin^6 x + \cos^6 x > \dfrac{5}{8}$

797. $8\sin^6 x - \cos^6 x > 0$

798. $\tan x \tan 3x < -1$

799. $3\sin 2x - 1 > \sin x + \cos x$

800. $\sin 2x > \sqrt{2}\sin^2 x + \left(2 - \sqrt{2}\right)\cos^2 x \, , 0 < x < 2\pi$

801. $|\sin x| > \cos^2 x$

802. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1$

803. $1 - \cos x < \tan x - \sin x$

804. $9^{1+\sin^2 \pi x} + 30.9^{\cos^2 \pi x} \leq 117$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

805. ចូរកំនត់ m ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានរឺសតែមួយគត់

$$\begin{cases} (4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x \,.\cos x - (4m-3)\cos x = 0 \\ 0 \leq x \leq \pi/4 \end{cases}$$

៤. ពហុធា

I. គណនា

806. កំនត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ
$$P(u^2-v^2)=P(u+v).P(u-v)$$
ចំពោះគ្រប់ $u,v\in\mathbb{R}$ ។

807. កំនត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ
$$P(x+1)=P(x)+2x+1$$
ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

808. កំនត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ
$$P((x+1)^2)=P(x^2)+2x+1$$
ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

809. (កាណាដា ១៩៧០)

គេអោយពហុធា
$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
ដែលមានមេគុណ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាចំនួនគត់ ហើយដោយដឹងថាមានចំនួនគត់បួនផ្សេងគ្នា a,b,c និង d ដែល
$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5$$
ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ k មួយដែល $f(k)=8$ ។

810. គេអោយពហុធាដឺក្រេទី $n\geq 1$ មានមេគុណមិនអវិជ្ជមាន និង $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^{+*}$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\left[P\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right]^2+\left[P\left(\frac{x_3}{x_2}\right)\right]^2+\cdots+\left[P\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right]^2+\left[P\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2\geq n[P(1)]^2$$

៨. សមីការអនុគមន៍

I. គណនា

811. ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$f(f(x)+1)=1-x$$
$$f\big(f(x)\big)=x$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

812. គេអោយអនុគមន៍$f:\mathbb{N}^*\to\ \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

a) $f(1)=2$

b) ចំពោះគ្រប់ $n>1$

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$$

ចូរកំនត់ $f(n)$ ។

813. គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f\big(xf(y)\big)=x^nf\big(f(y)\big)$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។

814. គេអោយថេរចំនួនពិតបី a,b,c ដែលមិនសូន្យទាំងបីព្រមគ្នា។ ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល

$$af(x^2+yz)+bf(y^2+zx)+cf(z^2+xy)=0$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y,z\in\mathbb{R}$ ។

815. ចូរកំនត់លក្ខខណ្ឌលើចំនួនវិជ្ជមាន p,q ដើម្បីអោយគេអាចរកបាននូវអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ដែល

$$f\big(xf(y)\big)=x^py^q$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}^+$ ។

816. ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ដែល

$$f(m+19)\geq f(m)+19$$
$$f(m+99)\leq f(m)+99$$

ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{Z}$ ។

817. ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$xf(x+y) + yf(y-x) = f^2(x) + f^2(y)$$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ ។

818. ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

1) $f(1) = 1$
2) $f(x+y)[f(x) - f(y)] = f(x-y)[f(x) + f(y)]$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{Z}$ ។

819. (**កាណាដា ១៩៦៩**)

តាង f ជាអនុគមន៍មួយដែលមានលក្ខណៈដូចតទៅនេះ

a) $f(n)$ មានន័យចំពោះគ្រប់ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ;
b) $f(n)$ ជាចំនួនគត់;
c) $f(2) = 2$;
d) $f(mn) = f(m)f(n)$ ចំពោះគ្រប់ m និង n ;
e) $f(m) > f(n)$ ចំពោះគ្រប់ $m > n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(n) = n$ ។

820. គេអោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$0 < 2f^2(xy) \leq f(x)f(y^3) + f(x^3)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$f(1999) > 0$$

ចូរបង្ហាញថា $f(2000) > 0$ ។

៧. អនុគមន៍ឆ្លើយ

I. គណនា

1. $1/2$. ▲ យើងមាន

: $a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow a^2+b^2=1-c^2$

: $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^2=c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=c^2$;

$\Rightarrow 1-c^2+2ab=c^2 \Rightarrow ab=\frac{2c^2-1}{2}$

: $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2)^2+c^4-2(ab)^2=(1-c^2)^2+c^4-2\left(\frac{2c^2-1}{2}\right)^2=c^4-2c^2+1-2c^4+2c^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ។

2. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

3. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ▲ យើងមាន

$$\begin{gathered}(1+1)^4=2^4=1^4+4.1^3.1+6.1^2.1^2+4.1.1^3+1^4\\(2+1)^4=3^4=2^4+4.2^3.1+6.2^2.1^2+4.2.1^3+1^4\\\ldots\\(n+1)^4=n^4+4.n^3.1+6.n^2.1^2+4.n.1^3+1^4\end{gathered}$$

បូកសមភាពទាំងអស់នេះចូលគ្នា យើងទាញបានផលបូកដែលចង់បាន។

4. 4 ▲ គុណ S នឹង $(2-1)$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}S&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots(2^{1024}+1)+1\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots(2^{1024}+1)+1\\&=(2^4-1)(2^4+1)\ldots(2^{1024}+1)+1\\&\vdots\\&=(2^{1024}-1)(2^{1024}+1)+1\\&=2^{2048}-1+1=2^{2048}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $S^{1/1024}=4$ ។

5. $(n+1)!-1$ ▲ យើងមាន $k.k!=(k+1)!-k!$ ចំពោះ $k=1,2,3\ldots$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+(n-1).(n-1)!+n.n!\\&=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots+(n!-(n-1)!)+\left((n+1)!-n!\right)\end{aligned}$$

$$= (n+1)! - 1$$

6. ▲ យើងមាន

$$S.2000! = \binom{2000}{1} + \binom{2000}{3} + \cdots + \binom{2000}{1997} + \binom{2000}{1999}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2000}\binom{2000}{i} = \frac{1}{2}(1+1)^{2000} = 2^{1999}$$

$$S = \frac{2^{1999}}{2000!}$$

រំលឹក៖ រូបមន្តទ្វេធាញូវតុន

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

7. 0 ▲ សន្មតថា u, v, s, t ជាឫសបួននៃពហុធា

$$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងទាញបាន

$$u+v+s+t = a; uv+vs+st+tu+us+vt = b; uvs+vst+stu = c, uvst = d$$

ដោយ $u+v+s+t=0$ នោះ $a=0$ ។ ដូច្នេះ $f(x) = x^4 + bx^2 - cx + d$ ។ តាង

$$S_n = u^n + v^n + s^n + t^n$$

យើងមាន

$S_1 = u+v+s+t = 0;$

$S_2 = u^2+v^2+s^2+t^2 = (u+v+s+t)^2 - 2(uv+vs+st+tu+us+vt) = -2b$

ដើម្បីគណនា S_3 យើងពិនិត្យករណី២ខាងក្រោម។

- ករណី u, v, s, t សុទ្ធតែខុសពីសូន្យទាំងអស់។ ដូច្នេះ

$$u^3 + bu - c + \frac{d}{u} = 0;\ \ v^3 + bv - c + \frac{d}{v} = 0$$

$$s^3 + bs - c + \frac{d}{s} = 0;\ t^3 + bt - c + \frac{d}{t} = 0$$

$$\Longrightarrow\quad S_3 + bS_1 - 4c + d\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow\quad S_3 - 4c + d\frac{c}{d} = 0$$

$$\Longrightarrow\quad S_3 = 3c$$

- ករណីក្នុងចំនោម u, v, s, tមានមួយស្មើសូន្យ។ សន្មតថាជា u ។ ដូច្នេះ $d=0$ ហើយ

$$f(x) = x^4 + bx^2 - cx = x(x^3 + bx - c)$$

ដូច្នេះ v, s, t ជាឫសនៃសមីការ $x^3 + bx - c = 0$ ។ ដូច្នេះ

$$v^3 + bv - c = 0; s^3 + bs - c = 0; t^3 + bt - c = 0$$

$$\Longrightarrow S_3 + b(u+v+s+t) - 3c = 0;$$
$$\Longrightarrow S_3 = 3c$$

ក្នុងករណីទាំងពីរ យើងមាន $S_3 = 3c$ ។

យើងមាន

$$u^4 + bu^2 - cu + d = 0; v^4 + bv^2 - cv + d = 0;$$
$$s^4 + bs^2 - cs + d = 0; t^4 + bt^2 - ct + d = 0$$
$$\Longrightarrow S_4 + bS_2 - cS_1 + d = 0$$
$$\Longrightarrow S_4 = 2b^2 - 4d$$

យើងមាន $x^4 + bx^2 - cx + d = 0$ ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង x^n យើងទាញបាន

$$x^{n+4} + bx^{n+2} - cx^{n+1} + dx^n = 0$$
$$\Longrightarrow \ S_{n+4} + bS_{n+2} - cS_{n+1} + dS_n = 0$$

យើងទាញបាន

$$S_5 = -bS_3 + cS_2 + dS_1 = -5bc$$
$$S_7 = -bS_5 + cS_4 - dS_3 = 7c(b^2 - d)$$

ដោយ $S_7 = 0$ នោះ $c = 0$ រឺ $b^2 = d$ ។

- ករណី $b^2 = d$ យើងទាញបាន
$$0 \le S_4 = 2b^2 - 4d = -2b^2 \le 0 \ \Longrightarrow b = 0 \ \Longrightarrow d = 0$$
$$\Longrightarrow S_4 = 0 \ \Longrightarrow u = v = s = t = 0 \ \Longrightarrow P = 0$$
- ករណី $c = 0$ នោះ u, v, s, t ជារឹសទាំងបួននៃសមីការ $x^4 + bx^2 + d = 0$ ដូច្នេះវាត្រូវតែ $t = -u$ រឺ $t = -v$ រឺ $t = -s$។ ដូច្នេះ $P = 0$ ។

II. សមភាព

8.▲ ចំពោះ $n = 1$ យើងទាញបាន $1^2 = \frac{1.2.3}{6}$ ពិត។ សន្មតថាពិតដល់ k មានន័យថា $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$។ យើងទាញបាន $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$ ។ ដូច្នេះតាមវិចារដោយកំនើន យើងទាញបានសមមភាពពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

9.● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។

10.● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។

11.● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។

12.▲ តាង $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$ ដែល $x, y, z \neq \frac{k\pi}{4}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k។ លក្ខខណ្ឌ $a + b + c = abc$ ក្លាយជា $\tan{(x + y + z)} = 0$ ។យើងមាន

$$\tan(2x+2y+2z)=\frac{2\tan(x+y+z)}{1-\tan^2(x+y+z)}=0$$

ដូច្នេះ

$$\tan 2x+\tan 2y+\tan 2z=\tan 2x\tan 2y\tan 2z$$
$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}+\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$$
$$=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$$

ដូច្នេះសមភាពពិត។

13.▲ តាង $k=a_1/b_1=a_2/b_2=a_3/b_3$ នោះ

$$p_1a_1^n+p_2a_2^n+p_3a_3^n=k^n(p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n)$$
$$=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n(p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n)$$

នាំអោយសមភាពពិត។

III. សមីការ

14. $\{-2;-1;1\}$. **15.** $\{-3;2\}$. **16.** $\{3\}$. **17.** $\{1\}$. **18.** $\left\{-1;\ -\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$. **19.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **20.** $\left\{-\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right\}$. **●** **តាង** $x^2=y$ ។ **21.** $\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$. **22.**$\{-1;1\}$.

23. $\{2\}$. **▲** តាង $2x-3=y+c$ និង $2x-5=y-c$ ។យើងទាញបាន $c=1$។ ជំនួសចូលសមីការ យើងទាញបាន $(y+1)^4+(y-1)^4=2$ សមមូលនឹង $y^4+6y^2=0$។ យើងទាញបាន $y=0$ នាំអោយ $x=2$ ។

24. $\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$. **25.**$\left\{-\frac{a(\sqrt{13}+1)}{2};\frac{a(\sqrt{13}-1)}{2}/a\in\mathbb{R}\right\}$. **●** តាង$x^2+ax=y$ ។ **26.** $\left\{-\frac{\sqrt{21}+5}{6};\frac{\sqrt{21}-5}{6}\right\}$

27. $\{-\sqrt{2};4-\sqrt{18};\sqrt{2};4+\sqrt{18}\}$. **●** តាង $x-\frac{2}{x}=y$។ សមីការសមមូលនឹង $y^2-8y=0$។

28. $\left\{-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{7}+1}{4};\frac{\sqrt{7}-1}{4};1\right\}$. **●** ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x^2 បន្ទាប់មកតាង $2x-\frac{3}{x}=y$។ **29.** $\{\frac{1}{2};2\}$

30. $\left\{-1;9;\frac{5-\sqrt{61}}{2};\frac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$. **●** ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x^2 បន្ទាប់មកតាង $x-\frac{9}{x}=y$ ។

31. $\left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$. **●** ដកអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{10x^2}{x+5}$ យើងទាញបាន $\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2+10\frac{x^2}{x+5}-11=0$ ។

32. $\{-\sqrt{7}-1;\sqrt{7}-1\}$. **●** បង្រួមសមីការជារាង $\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6\frac{x^2}{x-3}-16=0$ ។

33.$\{-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}\}$.**●** បង្រួមសមីការជា $(x^2+1)^2-2(x-1)^2=0$ ។

34. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1};\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}\right\}$. **●** តាង $x=1/y$ ។

35.$\{-9;11\}$. ● ប្តូក $4x^2+400x+1$ ទៅអង្គទាំងពីរនៃសមីការ។

36. $\{-a; a-\sqrt{a^2+2}; a+\sqrt{a^2+2} | a\in\mathbb{R}\}$. ▲ យើងទាញរក a យើងទាញបាន $a=\frac{x^2-2}{2x}$ រឺ $a=-x$ ។ ទាញរក x យើងទាញបានចំលើយ។

37. $\{-1-\sqrt{3+a}; -1+\sqrt{3+a}\}$ ចំពោះ $a\in[-3;-1)$; $\{-1-\sqrt{3+a}; -1+\sqrt{3+a}; -1-\sqrt{1+a}; -1+\sqrt{1+a}\}$ ចំពោះ $a\in[-1;\infty)$; គ្មានរឺសចំពោះ $a\in(-\infty;-3)$.▲ ដោះស្រាយរក a ដោយសន្មតថា x ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ : $a^2-2(x^2-1)a+x^4-6x^2+4x=0$; យើងទាញបាន $a=x^2+2x-2$ រឺ $a=x^2-2x$ ។

38.$\left\{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{29}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$.▲ យើងសរសេរអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការជា

$$(x^2+ax+c)\,(x^2+bx+d)=0$$

ដូច្នេះ

$$x^4+(a+b)x^3+(ab+c+d)x^2+(bc+ad)x+cd\equiv x^4-4x^3-10x^2+37x-14$$

យើងទាញបាន

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ ab+c+d=-10 \\ bc+ad=37 \\ cd=-14 \end{cases}$$

ដោយដឹងថា a,b,c,d ជាចំនួនគត់ នោះ ពីសមីការចុងក្រោយគេ យើងទាញបាន $(c;d)=\{(-1;14);(1;-14);(-2;7);(2;-7)\}$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ឃើញថា $(c;d)=(2;-7)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។ យើងទាញបាន $a=-5; b=1$។ ដូច្នេះសមីការសមមូលនឹង $x^2-5x+2=0$ រឺ $x^2+x-7=0$ ។

39.▲ សន្មតថា $x_1=p/q$ ដែល $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$ និង p និង q ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ ដូច្នេះ $\frac{p^3}{q^3}+a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0$ សមមូលនឹង $p(p^2+apq+bq^2)=-cq^3$ ។ អង្គខាងស្តាំនៃសមភាពនេះចែកដាច់នឹង q ។ អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង q នាំអោយនិងមានតែ $q\equiv 1$ តែប៉ុណ្ណោះ ព្រោះ $p^2+apq+bq^2$ ចែកមិនដាច់នឹង q ។ ដូច្នេះសមភាពមានរាង $p(p^2+ap+b)=-c$ យើងទាញបាន c ជាពហុគុណនៃ $p=x_1$។

40.● ប្រើស្រាយបញ្ជាក់ដូចសំនួរទី **39.**។

41.● ប្រើសមភាព $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

42. $-2p$.

43. $\left\{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\right\}$ ● តាង $x=y-1/y$ ។ សមីការទៅជា $y^3-\frac{1}{y^3}-3\left(y-\frac{1}{y}\right)+3\left(y-\frac{1}{y}\right)-3=0$ រឺ $y^3-\frac{1}{y^3}-3=0$ ។ តាង $y^3=t$ យើងទាញបាន $t^2-3t-1=0$ ។

44.$\{-5;-1;1;3\}$. **45.**$\{2;6\}$. **46.**$\{-1\}$.

47. គ្មានរឹសសនិទាន

48.$\{-\frac{1}{3};1/2\}$.

49.$\{6\}$. ▲ គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}\neq 0$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6\\ \sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}=2\end{cases}$$

បូកអង្គទាំងពីរចូលគ្នា យើងទាញបាន $x=6$ ។

50. សមីការគ្មានរឹស។ **51.**$\{-1\}$. **52.**$\{12\}$. **53.** $\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2;\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\right\}$ ចំពោះ $a\in(0;1]$ ហើយគ្មានរឹសចំពោះតំលៃ a ផ្សេងទៀត។ **54.**$\{-6;1\}$. **55.**$\{-1;3\}$. **56.** $\{3\}$. **57.** $\{2\}$ **58.** $\{5\}$. **59.**$\{20\}$. **60.** $\{-4/3\}$. **61.** $\{-1;0\}$. **62.** $\{5\}$. **63.** $\{16\}$. **64.** $\{9\}$. **65.** $\{-3;6\}$. ● តាង $y=\sqrt{x^2-3x+7}$ ។ **66.** $\{-9/2;3\}$. **67.** $\{1\}$. ● តាង $y=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$ ។ **68.** $\{5/3\}$. **69.** $\{5a/3\}$ ចំពោះ $a\neq 0$; $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ ចំពោះ $a=0$ ។ **70.** $\{1\}$. **71.** $\left\{3;9\frac{9-\sqrt{97}}{8}\right\}$.

72. $\left\{5\pm a\sqrt{8-\frac{a^2}{2}}\right\}$ ចំពោះ $a\in[2;2\sqrt{2}]$; គ្មានរឹសចំពោះតំលៃ a ផ្សេងពីនេះ។▲ តាង $u=\sqrt{7-x},v=\sqrt{x-3}$ ។ យើងមានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}u+v=a\\ 7-x+x-3=u^2+v^2=4,(u\geq 0,v\geq 0)\end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}\\ v_1=\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}u_2=\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}\\ v_2=\dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}\end{cases}$$

73. $\{3\}$.▲ តាង $\sqrt[4]{x-2}=u\geq 0,\sqrt[4]{4-x}=v\geq 0$ យើងទាញបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases}u+v=2\\ u^4+v^4=2\end{cases}$$

លើកសមីការទីមួយជាស្វ័យគុណ៤ និងប្រើសមីការទី២ យើងទាញបាន $uv(2(u+v)^2-uv)=7$ ហើយដោយ $u+v=2$ យើងទាញបាន $(uv)^2-8(uv)+7=0$។ ដូច្នេះ $(uv)_1=1;(uv)_2=7$។ ដូច្នេះយើងទាញបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}u+v=2\\uv=1\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}u+v=2\\uv=7\end{cases}$$

ប្រព័ន្ធសមីការទីមួយមានរឹស $u=v=1$ ។ ត្រូវនឹង$x=3$ ។ ប្រព័ន្ធទី២គ្មានរឹស។

74. $\left\{\frac{2a+1}{a-2}\right\}$ ចំពោះ$a\in(-\infty;3]\cup(2;\infty)$; $\emptyset$ចំពោះ$a\in\left(\frac{1}{3};2\right]$.

75. $\{a+1+\sqrt{2a};a+1-\sqrt{2a}\}$ ចំពោះ $a\in[0;1/2]$, $\{a+1+\sqrt{2a}\}$ ចំពោះ $a\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

76. $(-\infty;0)$ ចំពោះ $a=0$, $\{0;3a/4\}$ ចំពោះ $a\in(0;\infty)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

77. $\{a^2+a;a^2-a+1\}$ ចំពោះ $a\in[0;1]$, $\{a^2+a\}$ ចំពោះ $a\in(1;\infty)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

78. $\{0\}$ ចំពោះ $a=1$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\neq 1$. **79.**$\{(1;-5)\}$. **80.** $\{(1;-3)\}$. **81.** $\{(-3;1)\}$ចំពោះ $a\in\{-2\}$; $\emptyset$ ចំពោះ $a\notin\{-2\}$.

82.▲ តាង $f(x)=4x(1-x)=1-(2x-1)^2$ ។ យើងឃើញថា បើ $0\le f(x)\le 1$ នោះ $0\le x\le 1$។ ដូច្នេះ បើ $a_{1998}=0$ នោះ ត្រូវតែ $0\le t\le 1$។ អីលូវ យើងយក $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ដែល $\sin\theta=\sqrt{t}$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា ចំពោះគ្រប់ $\phi\in\mathbb{R}$ យើងមាន

$$f(\sin^2\phi)=4\sin^2\phi\,(1-\sin^2\phi)=4\sin^2\phi\cos^2\phi=\sin^2 2\phi$$

ដោយ $a_1=\sin^2\theta$ នោះ យើងទាញបាន

$$a_2=\sin^2 2\theta,a_3=\sin^2 4\theta,\cdots,a_{1998}=\sin^2 2^{1997}\theta$$

ដូច្នេះ $a_{1998}=0$ ទាល់តែនិងនាំអោយ $\sin 2^{1997}\theta=0$ ។ មានន័យថា $\theta=\frac{k\pi}{2^{1997}}$ ចំពោះចំនួនគត់ k ខ្លះ ហើយ តំលៃរបស់ t ដែល $a_{1998}=0$ ស្មើនឹង $\sin^2(k\pi/2^{1997})$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។ ដូច្នេះយើងមានតំលៃរបស់ t បែបនេះ ចំនួន $2^{1996}+1$ គឺមានតំលៃ $\sin^2(k\pi/2^{1997})$ ចំពោះ $k=0,1,2,\cdots,2^{1996}$ ។

83. ▲ ដោយ $a^2-2b^2=1$ នោះ $a\neq 0$ ។ ដោយ $2b^2-3c^2=1$ នោះ $b\neq 0$ ។ បើ $c=0$ នោះ $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ និង $a=\sqrt{2}$ ។ $(a,b,c)=(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$ ជាចំលើយមួយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។ យើងនឹងបង្ហាញថា គ្មានចំលើយណាផ្សេងទៀតទេ។

យើងសន្មតថា មានចំនួនពិត (a,b,c) ដោយ $abc\neq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ។ យើងឃើញថា បើ (a,b,c) ជាចំលើយ នោះ $(-a,-b,-c)$ ក៏ជាចំលើយដែរ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានចំនួនវិជ្ជមានពីរក្នុង

ចំនោម(a,b,c) រឺ $(-a,-b,c)$។ សន្មតថា a,b វិជ្ជមាន។ តាង $a=\cot A\,, b=\cot B$ និង $c=\cot C$ ដែល $0<A,B<\frac{\pi}{2}, 0<C<\pi$ ។ ដោយ $ab+bc+ca=1$ នោះ

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$
$$\cot C=\frac{1-\cot A\cot B}{\cot A+\cot B}=-\cot(A+B)=\cot(\pi-A-B)$$
$$A+B+C=\pi$$

ដូច្នេះ A,B,C ជាមុំក្នុងត្រីកោណ។ យើងមាន

$$a^2+1=2(b^2+1)=3(c^2+1)$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\sin^2 A}=\frac{2}{\sin^2 B}=\frac{3}{\sin^2 C}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$$

តាមច្បាប់ស៊ីនុស យើងទាញបានថា ជ្រុងឈមនឹងមុំ A,B,C មានរង្វាស់ $k,k\sqrt{2},k\sqrt{3}$ រៀងគ្នា ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន k ខ្លះ។ ដូច្នេះត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C នាំអោយ $c=\cot C=0$ ផ្ទុយពីសន្មតដែល $c\neq 0$ ។ ដូច្នេះការសន្មតរបស់យើងខុស ហើយ $(a,b,c)=\left(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$ ជាចំលើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធ។

84. $\left\{\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right\}$ ចំពោះ $\frac{4}{3}\le p\le 2$. ▲ យើងមាន $x\ge 0$។ លើកអង្គទាំងពីរជាការេយើងទាញបាន

$$5x^2-p-4+4\sqrt{(x^2-1)(x^2-p)}=x^2$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x^2-1)(x^2-p)}=(p+4)-4x^2$$

បើ $4x^2\le p+4$ យើងលើកអង្គទាំងពីរនៃសមីការជាការេម្តងទៀត យើងទាញបាន

$$-16(p+1)x^2+16p=-8(p+4)x^2+(p+4)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{(4-p)^2}{4(4-2p)}$$

មានន័យថា $x=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$។ ដើម្បីអោយតំលៃនេះជាចំលើយនៃសមីការទាល់តែ $p\le 2$ និង $\frac{(4-p)^2}{4-2p}=4x^2\le p+4$ សមមូលនឹង $\frac{4}{3}\le p\le 2$ ។ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានចំលើយ។

85.▲ យើងសរសេរសមីការដែលអោយជារាង

$$x^5-x^3-4x^2-3x-2+\lambda(5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha)=0$$

រឺសរបស់សមីការនេះមិនអាស្រ័យនឹង λ នាំអោយនិងបើ វាជារឺសរួមរបស់សមីការ

$$x^5-x^3-4x^2-3x-2=0 \text{ និង } 5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha=0$$

សមីការទីមួយសមមូលនឹង $(x-2)(x^2+x+1)^2=0$ ហើយមានរឺសផ្សេងគ្នាចំនួនបី $x_1=2;\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ។

ក) ចំពោះ $\alpha=-\frac{64}{5}$ យើងមាន $x_1=2$ ជារឺសតែមួយគត់ ដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ ។

ខ) ចំពោះ $\alpha=-3$ យើងមានរឹសចំនួនពីរដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ គឺ $x_1=\omega$ និង $x_2=\omega^2$ ។

86.▲ លក្ខខណ្ឌ $2x-1\geq 0,\Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$ និង $x\geq\sqrt{2x-1}\Rightarrow (x-1)^2\geq 0$ ពិតជានិច្ច។ យើងមាន $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=c\Leftrightarrow c^2=2x+2|x-1|=\begin{cases}2, & 1/2\leq x\leq 1\\ 4x-2, & x\geq 1\end{cases}$

ក) $c^2=2$។ សមីការមានរឹស $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ ។

ខ) $c^2=1$។ សមីការគ្មានរឹស។

គ) $c^2=4$។ សមីការទៅជា $4x-2=4,\Rightarrow x=3/2$ ។

87. $\{[5;10]\}$ ▲ យើងមាន

$$x+3-4\sqrt{x-1}=x-1-4\sqrt{x-1}+4=\left(\sqrt{x-1}\right)^2-4\sqrt{x-1}+4=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$$
$$x+8-6\sqrt{x-1}=x-1-6\sqrt{x-1}+9=\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2$$

ដូច្នេះសមីការទៅជា

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1$$
$$\Rightarrow\quad \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$$

បើ $\sqrt{x-1}\geq 3$ នោះ

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1$$
$$\Rightarrow x=10$$

បើ $\sqrt{x-1}-2\geq 0$ និង $\sqrt{x-1}-3\leq 0\Rightarrow 5\leq x\leq 10$នោះ

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1$$
$$\Rightarrow 1=1$$

បើ $\sqrt{x-1}-2\leq 0\Rightarrow x\leq 5$ នោះ

$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1\ \Rightarrow x=5$$

88.$\{0;3\}$▲ តាង

$$\begin{gathered}3x=x+2x=y_1^2\\ x+2y_1=y_2^2\\ x+2y_2=y_3^2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ x+2y_{n-2}=y_{n-1}^2\\ x+2y_{n-1}=y_n^2\end{gathered}$$

ដែល $y_1,y_2,\dots,y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ សមីការដែលអោយមានរាង

$$y_n=x$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $y_1 = x$ ។ សន្មតថា $x > y_1$ ។ ដូច្នេះ $y_1 > y_2 > \cdots > y_n$ ។ មានន័យថា បើ $x > y_1$ នោះ $x > y_n$ ផ្ទុយពីសមីការ $x = y_n$ ។ ដូចគ្នាចំពោះករណី $x < y_1$ ។ ដូច្នេះ $x = y_1$ ។ ដោយ $y_1^2 = 3x$ នោះ $3x = x^2$ យើងទាញបាន $x = 0; x = 3$ ។

89. ▲ សមីការសមមូលនឹង

$$\left|\sqrt{x-4}-1\right| + \left|\sqrt{x-4}-2\right| = a$$

តាង $y = \sqrt{x-4} \geq 0$ ។ សមីការទៅជា $|y-1| + |y-2| = a$ ។ បើ $a = 0$ នោះ $y = 1$ និង $y = 2$ មិនអាច។ ដូច្នេះ $a > 0$ ។

បើ $0 \leq y < 1$ នោះ $1 - y + 2 - y = a; \Rightarrow y = \frac{3-a}{2}$ ។ ដោយ $0 \leq y = \frac{3-a}{2} < 1$ នោះ $1 < a \leq 3$ ។ យើងទាញបាន $x = 4 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ ។

បើ $1 \leq y \leq 2$ នោះ $y - 1 - y + 2 = a; \Rightarrow a = 1$ ។ $1 \leq y \leq 2$ ត្រូវនឹង $5 \leq x \leq 8$ ។

បើ $y > 2$ នោះ $y - 1 + y - 2 = a; \Rightarrow y = \frac{a+3}{2}$ ។ $y > 2 \Rightarrow a > 1$ ។ យើងទាញបាន $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$

ជាសរុប

បើ $a < 1$ សមីការគ្មានរឹស។

បើ $a = 1$ សមីការមានរឹស $5 \leq x \leq 8$ ។

បើ $1 < a \leq 3$ សមីការមានរឹស $x = 4 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ រឺ $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$ ។

បើ $a > 3$ សមីការមានរឹស $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$ ។

90. ▲ តាង $u = a - x; v = x - b$ ។ ដូច្នេះ $u^5 + v^5 = (a-b)^5; u + v = a - b$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&u^5 + v^5 = (u+v)\{[(u+v)^2 - 2uv]^2 - uv(u+v)^2 + u^2v^2\}\\
&\Leftrightarrow (a-b)^5 = (a-b)\{[(a-b)^2 - 2uv]^2 - uv(a-b)^2 + u^2v^2\}\\
&\Leftrightarrow (a-b)^4 = (a-b)^4 + 5u^2v^2 - 5uv(a-b)^2\\
&\Leftrightarrow 5(uv)^2 - 5uv(a-b)^2 = 0
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $uv = 0$ រឺ $uv = a - b$ ។

ករណី $uv = 0$ នោះ $u = 0$ រឺ $v = 0$ ។ បើ $u = 0$ នោះ $x = a$ ។បើ $v = 0$ នោះ $x = b$ ។

ករណី $uv = a - b$ នោះ យើងមាន

$$\begin{cases} u + v = a - b \\ uv = a - b \end{cases}$$

(u, v) ជារឹសនៃសមីការ $t^2 - (a-b)t + (a-b) = 0$ គ្មានរឹស។

ដូច្នេះសមីការមានរឹសពីរ គឺ $x_1 = a; x_2 = b$ ។

91. ▲ តាង

$$y=\sqrt{\frac{x+3}{2}}-1 \implies y\geq 0; y+1=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$$
$$\implies 2y^2+4y+2=x+3$$
$$\implies x=2y^2+4y-1$$

ដូច្នេះ ចំពោះ $x\geq -1$ យើងទាញបានថា អនុគមន៍ $y=2x^2+4x-1$ ជាអនុគមន៍ច្រាស នៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{\frac{x+3}{2}}-1$ ម្យ៉ាងវិញទៀត អនុគមន៍ $y=2x^2+4x-1$ កើនលើ $(-1;\infty)$ (អនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$) ដូច្នេះ

$$2x^2+4x-1=\sqrt{\frac{x+3}{2}}-1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x-1=x$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0$$
$$\implies \quad x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

92. ▲ យើងមាន

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)>0$$
$$x^2-3x+1=2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)$$

តាង $t=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ ។ សមីការទៅជា

$$2t^2-mt-1=0 \quad (1)$$

ពី $t=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ យើងទាញបាន

$$t^2(x^2+x+1)=x^2-x+1$$
$$(t^2-1)x^2+(t^2+1)x+t^2-1=0 \quad (2)$$
$$\Delta=(t^2+1)^2-4(t^2-1)^2$$
$$=(3-t^2)(3t^2-1)\geq 0$$
$$\implies \frac{\sqrt{3}}{3}\leq t\leq \sqrt{3}$$

ក) ករណី $m=-\sqrt{3}/3$

ពី(១) យើងទាញបាន

$$t_1=-\frac{3}{2\sqrt{3}}; t_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

យើងយក $t=1/\sqrt{3}$ ។ ពី(២) យើងទាញបាន $x=1$ ។

១) ក្នុងសមីការ(១) យើងមាន $\Delta = m^2 + 8 > 0$ ដូច្នេះ(១)មានរឹសពីរ $t_1; t_2$ ។ ដោយ $t_1 t_2 = -\frac{1}{2} < 0$ នោះ $t_1 < 0 < t_2$ ។ មានតែរឹស t_2 មួយគត់ ដែលអាចអោយសមីការ(២) មានរឹស ព្រោះ $\frac{\sqrt{3}}{3} \le t \le \sqrt{3}$។ សមីការ(*) មានរឹសតែមួយគត់ បើ សមីការ(២)មានរឹសតែមួយគត់ដែរ។

បើ $t = 1$ នោះ (១)នាំអោយ $m = 1$ ហើយ (២) នាំអោយ $x = 0$ ។

បើ $t^2 - 1 \neq 0$ នោះ $\Delta = (3 - t^2)(3t^2 - 1) = 0 \Longrightarrow t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}; t_2 = \sqrt{3}$ ។

បើ $t = \frac{\sqrt{3}}{3}; (1) \Longrightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = 1$

បើ $t = \sqrt{3}; (1) \Longrightarrow m = \frac{5\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = 1$

ដូច្នេះ $m = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right\}$ ។

93. ▲ តាង $y = \sqrt[3]{7x+1}; z = -\sqrt[3]{x^2 - x - 8}; t = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1}$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} & y + z + t = 2 \\ \Longrightarrow \quad & (y + z + t)^3 = 8 \quad (1) \end{aligned}$$

យើងមាន

$$y^3 + z^3 + t^3 = (7x + 1) - (x^2 - x - 8) + (x^2 - 8x - 1) = 8 \quad (2)$$

ពី(១)និង(២) យើងទាញបាន

$$(y + z + t)^3 - (y^3 + z^3 + t^3) = 3(y + z)(z + t)(t + y) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t + y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ z = -t \\ t = -y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2 - x - 8} \quad & \Longleftrightarrow \; 7x + 1 = x^2 - x - 8 \\ & \Longleftrightarrow x = -1\ ; x = 9 \\ \sqrt[3]{x^2 - x - 8} = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \quad & \Longleftrightarrow \; x^2 - x - 8 = x^2 - 8x - 1 \\ & \Longleftrightarrow \; x = 1 \\ \sqrt[3]{7x+1} = -\sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \quad & \Longleftrightarrow \; 7x + 1 = -(x^2 - 8x - 1) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x = 0; x = 1$$

94. ▲ តាង $u = \sqrt{x+1} \ge 0; v = \sqrt{x^2 - x + 1} > 0$ ។ សមីការសមមូលនឹង

$$\begin{aligned} 5uv = 2(v^2 + v^2) \; & \Longleftrightarrow 5\frac{u}{v} = 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = 2 \\ \frac{u}{v} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{u}{v} = 2 \;\; \Longleftrightarrow \;\; \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} : \text{គ្មានរឹស}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

សមីការមានរឹសពីរ $x = \frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ ។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

95. $\left\{\left(-\frac{4}{9}; 20/9\right); (2;1)\right\}$. **96.** $\left\{(-1;3); \left(\frac{71}{21}; -25/7\right)\right\}$.**97.** $\{(51; 24{,}5)\}$.

98. $\{(-19{,}6\,; 5{,}2);\ (-14; 8)\}$.● ដាក់អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការទីមួយជារាង $(x+3y)^2 - 6(x+3y) - 40$ ហើយតាង $x + 3y = t$ ។

99. $\{(2;3); (3;2)\}$. **100.** $\{(4;-1); (1;-4)\}$. **101.** $\{(1;3); (3;1)\}$. **102.**$\{(1;2); (2;1)\}$
103.$\left\{\left(-\frac{1}{2}; -1/3\right); (1/3; 1/2)\right\}$.**104.**$\{(-1;2); (2;-1)\}$ **105.**$\{(3;2); (2;3)\}$
106.$\{(-1;-4); (4;1)\}$. **107.** $\{(-3;4); (4;-3)\}$. **108.** $\left\{\left(5+\sqrt{28}; -5+\sqrt{28}\right); \left(5-\sqrt{28}; -5-\sqrt{28}\right); (5;2); (-2;-5)\right\}$. **109.**$\{(0{,}6; 0{,}3); (0{,}4; 0{,}5)\}$.

110.$\left\{(-1;2); \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)\right\}$

111.$\left\{(2;1); (1;2); \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right); \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.● តាង $x + y = u, xy = v$ បន្ទាប់មក $-u + v = z$ និង $uv = t$ ។

112. $\left\{\left(-\frac{25+5\sqrt{61}}{9}; \frac{5+\sqrt{61}}{9}\right); \left(\frac{-25+5\sqrt{61}}{9}; \frac{5-\sqrt{61}}{9}\right); (-6; -4/3); (3/2; 1/3)\right\}$. ● តាង $x = yt$.

113. $\left\{(-1;3); (1;-3); \left(16/\sqrt{11}; 1/\sqrt{11}\right); \left(-16/\sqrt{11}; -1/\sqrt{11}\right)\right\}$.

114. $\left\{(1;2); (-1;-2); \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right); \left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)\right\}$.

115. $\left\{\left(\frac{2+\sqrt{19}}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}}; -\frac{3}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}}\right); \left(\frac{-2+\sqrt{19}}{\sqrt[3]{-14+4\sqrt{19}}}; \frac{3}{\sqrt[3]{-14+4\sqrt{19}}}\right); (2;-1)\right\}$.

116. $\{(2;1)\}$. ▲ គុណសមីការទីពីរនឹង 2 រួចបូកចូលសមីការទីមួយ បន្ទាប់មកគុណសមីការទីពីរដដែលនឹង -2 រួចបូកចូលសមីការទីមួយចាស់ យើងទាញបានប្រព័ន្ធថ្មី

$$\begin{cases}16x^2+8xy+y^2-72x-18y+81=0\\4x^2-12xy+9y^2-4x+6y+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(4x+y)^2-18(4x+y)+81=0\\(2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+y=9\\2x-3y=1\end{cases}$$

117. $\left\{\left(0;1/\sqrt{3}\right);\left(0;-1/\sqrt{3}\right);(1;1);(-1;-1)\right\}$. **118.** $\left\{\left(\frac{2}{7};-9/7\right);(1;3)\right\}$.

119. $\{(2;6);(1;3)\}$.**120.** $\left\{\left(2\sqrt{2};-\sqrt{2}\right);\left(-2\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\right\}$.

121. $\left\{\left(\sqrt{6};\sqrt{6}/3\right);\left(-\sqrt{6};-\sqrt{6}/3\right)\right\}$

122. $\{(2;1;-1);(31/15;17/15;-2/3)\}$. **123.** $\{(1;2;2);(2;1;1)\}$

124. $\left\{(3;-2;1);(-2;3;1);\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2};-1\right);\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2};-1\right)\right\}$.

125. $\{(3;1;-2);(-5;-3;0)\}$. **126.** $\{(3;5;-1);(-3;-5;1)\}$

127. $\left\{(2;-1;3);(-2;1;-3);\left(-\frac{7}{\sqrt{13}};\frac{5}{\sqrt{13}};-\frac{11}{\sqrt{13}}\right);\left(\frac{7}{\sqrt{13}};-\frac{5}{\sqrt{13}};\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\right\}$.

128. $\{(-4;-3;1);(4;3;-1)\}$. **129.** $\{(1/2;1/3;1/4)\}$.

130. $\{(-1;1;0);(1;-1;0)\}$. **131.** $\{(3;3;3)\}$.

132. $\{(16;30)\}$. **133.** $\{(41;40)\}$. **134.** $\left\{(c;c-1)|c\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

135. $\left\{\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{5}\right);(5;4)\right\}$.

136. $\left\{\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{109}+9}{2}};\sqrt{\frac{3\sqrt{109}-9}{2}}\right);(-5;-3)\right\}$. **137.** $\left\{\left(0;a+\sqrt{a^2+3}\right)\right\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;\sqrt{3})$; $\left\{\left(0;a+\sqrt{a^2+3}\right);\left(0;-a-\sqrt{a^2-3}\right);\left(0;-a+\sqrt{a^2-3}\right)\right\}$ ចំពោះ $a\in[\sqrt{3};\infty)$។

138. $\{(1;1;0)\}$. ▲ សមីការទីមួយ យើងទាញបាន $x=2-y$ ។ ជំនួសចូលសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&2y-y^2-z^2=1\\\Longrightarrow\ &z^2+(y-1)^2=0\\\Longrightarrow\ &z=0;y=1\end{aligned}$$

139. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}\cup[0;\infty)$.

140. ក) 25. ▲ គុណសមីការទីមួយនឹង α និងសមីការទីពីរនឹង β ដែល $\alpha\beta\neq 0$ បន្ទាប់មកបូកចូលគ្នា យើងទាញបាន៖

$$\left(\frac{2\alpha}{3}+\beta\right)x+\left(\frac{4\alpha}{5}+\beta\right)y+\left(\frac{5\alpha}{6}+\beta\right)z=61\alpha+79\beta$$

យើងយក $\frac{2\alpha}{3}+\beta=0; \frac{4\alpha}{5}+\beta=\frac{2}{5}; \frac{5\alpha}{6}+\beta=\frac{1}{2}$ ។ យើងទាញបាន $\alpha=3, \beta=-2$ ។ ដូច្នេះ $\frac{2}{5}y+\frac{z}{2}=61\alpha+79\beta=15$ ។

ខ) $\{(27;10;42)\}$. ▲ ដោយសារ x,y,z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ $x=3k; y=5l; z=6m$ ដែល $k;l;m\in\mathbb{N}$ ។ ប្រព័ន្ធសមីការសមមូលនឹង

$$\begin{cases}4l+5m=61-2k\\5l+6m=79-3k\end{cases}$$

យើងទាញបាន $l=29-3k$ និង $m=2k-11$ ។ ដោយ $k;l;m\in\mathbb{N}$នោះ

$$\begin{cases}k>0\\29-3k>0\\2k-11>0\end{cases}$$

យើងទាញបាន $k=9$ ។

141.▲ ចំពោះ $a=0$ យើងទាញបាន $(x,y,z)=(0,0,0)$។ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងទាញបាន $(x,y,z)\in\{(t_1,t_2,z_0);(t_2,t_1,z_0)\}$ ដែល

$$z_0=\frac{a^2-b^2}{2a};\ t_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}$$

ដើម្បីអោយចំលើយវិជ្ជមាននិងខុសគ្នា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់នឹងគ្រប់គ្រាន់គឺ $3b^2>a^2>b^2$ និង $a>0$ ។

142.▲ បូកសមីការទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=y(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$ ។ បើ $y=2$ នោះយើងទាញបាន $x_1-x_2=x_2-x_3=\cdots=x_5-x_1$ ដូច្នេះ $x_1=x_2=\cdots=x_5$ ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធ។ បើ $y\neq 2$ នោះ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$។ បូកសមីការទីបីខាងដើមចូលគ្នា យើងទាញបាន $x_2=y(x_1+x_2+x_3)$ ។ដោយ $x_1+x_3=yx_2$ នោះ $x_2=(y^2+y)x_2, \Longrightarrow (y^2+y-1)x_2=0$ ។ បើ $y^2+y-1\neq 0$ នោះ $x_2=0$ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $x_1=x_2=\cdots=x_5=0$ ។ បើ $y^2+y-1=0$ នោះ បូកសមីការទីមួយនិងទីពីរ យើងទាញបាន $x_5+x_2+x_1+x_3=yx_1+yx_2 \Longrightarrow x_3+x_5=yx_1+yx_2-x_2-x_1 \Longrightarrow x_3+x_5=-y^2x_2-y^2x_1 \Longrightarrow x_3+x_5=-y(x_1+x_3)-y(x_5+x_2) \Longrightarrow x_3+x_5=yx_4$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបានសមីការទី៥។ មានន័យថា សមីការទី៤និងទី៥ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរនឹងសមីការបីខាងលើ។ យក $x_1=u; x_5=v$ ។ យើងទាញបាន $x_2=yu-v; x_3=y^2u-yv-u; x_4=y^3u-y^2v-2yu+v$ ។

143.▲ សន្មតថា (x_1,x_2,x_3) ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធ។ យើងអាចសន្មតថា $|x_1|\geq|x_2|\geq|x_3|$ ។ សន្មតថា $|x_1|>0$ ។ ពីសមីការទីមួយ យើងទាញបាន

$$0 = |x_1|.\left|a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1}\right| \geq |x_1|.(a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}|) > 0$$

មិនអាច។ ដូច្នេះ $|x_1| = 0$ នាំអោយ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ។

144.▲ បើមានចំនួនណាមួយស្មើសូន្យ ឧបមាថា $x_1 = 0$ នោះ $x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \Longrightarrow x_2x_3x_4 = 2; x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \Longrightarrow x_2 = 2; \dots; x_3 = x_4 = 2$ មិនអាច។ ដូច្នេះគ្មានចំនួនណាមួយអាចស្មើសូន្យបានទេ។ តាង $x_1x_2x_3x_4 = p$ ។ សម្មតិកម្មសមមូលនឹង $x_i + \frac{p}{x_i} = 2, i = 1,2,3,4$ ។ សមីការ $x + \frac{p}{x} = 2$ មានរឹសយ៉ាងច្រើនចំនួនពីរតាងដោយ y និង z ។ ដូច្នេះ x_i និមួយៗអាចស្មើ y រឺស្មើz ។ យើងមានបីករណីៈ

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y$ ។ ដូច្នេះ $y + y^3 = 2$ នាំអោយ $y = 1$ ។

$x_1 = x_2 = x_3 = y, x_4 = z$ ។ ដូច្នេះ $z + y^3 = y + y^2z = 2$ ។ យើងទាញបាន $(y; z) = \{(-1; 3); (1; 2)\}$

$x_1 = x_2 = y, x_3 = x_4 = z$ ។ ករណីនេះយើងទាញបាន $y = z = 1$ ។

ដូច្នេះរឹស $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ គឺ $\{(1; 1; 1; 1); (-1; -1; -1; 3)\}$ និងចំលាស់របស់វា។

145.▲ តាង $L_1 = |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4$ និងដូចគ្នាចំពោះ L_2, L_3 និង L_4 ។ សន្មតថា $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ។ នៅក្នុងករណីនេះ

$$\begin{aligned} 2|a_1 - a_2||a_2 - a_3|x_2 &= |a_3 - a_2|L_1 - |a_1 - a_3|L_2 + |a_1 - a_2|L_3 \\ &= |a_3 - a_2| - |a_1 - a_3| + |a_1 - a_2| = 0 \\ 2|a_2 - a_3||a_3 - a_4|x_3 &= |a_4 - a_3|L_2 - |a_2 - a_4|L_3 + |a_2 - a_3|L_4 \\ &= |a_4 - a_3| - |a_2 - a_4| + |a_2 - a_3| = 0 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន $x_2 = x_3 = 0$ ហើយនាំអោយ $x_1 = x_4 = 1/|a_1 - a_4|$ ។ រឹសនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការដែលអោយ។ ចំលើយផ្សេងទៀតជាចំលាស់នៃចំលើយមួយនេះ។

146.▲ បើមួយក្នុងចំនោម x, y, z ស្មើ 1 រឺ -1 នោះ $(-1, -1, -1)$ និង $(1,1,1)$ ។ ប្រព័ន្ធគ្មានចំលើយផ្សេងពីនេះទេ។ តាង $f(t) = t^2 + t - 1$ ។ បើក្នុងចំនោម x, y, z មានមួយធំជាង 1 សន្មតថា $x > 1$ យើងមាន $x < f(x) = y < f(y) = y < f(y) = z < f(z) = x$ មិនអាច។ ដូច្នេះ $x, y, z \leq 1$ ។

ឥលូវសន្មតថា មានមួយក្នុងចំនោម x, y, z សន្មតថា x មានតំលៃតូចជាង -1 ។ ដោយ $\min f = -\frac{5}{4}$ នោះ យើងមាន $x = f(z) \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right)$។ ដោយ $f\left(\left[-\frac{5}{4}; -1\right)\right) = (-1; -11/16) \subseteq (-1; 0)$ និង $f\big((-1; 0)\big) = \left[-\frac{5}{4}; -1\right)$ ដូច្នេះ $y = f(x) \in (-1; 0), z = f(y) \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right)$ និង $x = f(z) \in (-1,0)$ ផ្ទុយពីការសន្មត។ ដូច្នេះ $-1 \leq x, y, z \leq 1$ ។

បើ $-1 < x, y, z < 1$ នោះ $x > f(x) = y > f(y) = z > f(z) = x$ មិនអាច។

147. $(-2;-1);\left(-\frac{14}{3};\frac{13}{3}\right)$.

148.▲ តាង $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$ និង តាង $\sigma_k,k=1,2,\dots,n$ ជាពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋមទីk នៃ $x_1,x_2,\dots,x_n$។ ពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋមទីk ជា $\sigma_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ ដែល $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\in\{1,2,\dots,n\}$។ ឧទាហរណ៍ $\sigma_1(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$; $\sigma_2(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$; $\sigma_3(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$ ។

ប្រព័ន្ធសមីការដែលអោយ $S_k=a^k,k=1,2,\dots,n$ ។ តាមរូបមន្តញូវតុន យើងទាញបាន

$$k\sigma_k=S_1\sigma_{k-1}-S_2\sigma_{k-2}+\cdots+(-1)^kS_{k-1}\sigma_1+(-1)^{k-1}S_k,k=1,2,\dots,n$$

$$\sigma_1=a$$

$$k\sigma_2=S_1\sigma_1+(-1)^1S_2=a.a-a^2=0,\sigma_2=0$$

$$\dots$$

$\Longrightarrow\sigma_1=a;\ \ \sigma_k=0$ ចំពោះ $k=2,\dots,n$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត $x_1,x_2,\dots,x_n$ ជាឫសនៃពហុធា x^n-ax^{n-1} មានន័យថា ឫសទាំងនោះស្មើនឹង $a,0,\dots,0$ និងចំលាស់ទាំងអស់។

149.▲ បើ $m\notin\{-2;1\}$ នោះប្រព័ន្ធមានឫសតែមួយគត់

$$x=\frac{b+a-(1+m)c}{(2+m)(1-m)};y=\frac{a+c-(1+m)b}{(2+m)(1-m)};z=\frac{b+c-(1+m)a}{(2+m)(1-m)}$$

ចំនួន x,y,z ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើនិងមានតែបើ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ។

បើ $m=1$ នោះប្រព័ន្ធមានចំលើយ បើនិងមានតែបើ $a=b=c$។ ករណី $m=-2$ ប្រព័ន្ធមានចំលើយ បើនិងមានតែបើ $a+b+c=0$ ។ នៅក្នុងករណីទាំងពីរនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់។

150.▲ យើងមាន $c_n>0$ ចំពោះគ្រប់ n គូ។ ដូច្នេះ $c_n=0$ អាចបានតែចំពោះ n សេសតែប៉ុណ្ណោះ។ សន្មតថា $a_1\le a_2\le\cdots\le a_8$ ហើយថា $a_1\le 0\le a_8$។

បើ $|a_1|<|a_8|$ នោះមាន n_0 ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនសេស $n>n_0$ យើងមាន $7|a_1|^n<a_8^n$ ។ ដូច្នេះ $a_1^n+a_2^n+\cdots+a_8^n>7a_1^n+a_8^n>0$ ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែលថា $c_n=0$ ចំពោះតំលៃ n ច្រើនរាប់មិនអស់។ ដូចគ្នាករណី $|a_1|>|a_8|$ ក៏មិនអាចដែរ។ យើងទាញបាន $a_1=-a_8$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន $a_2=-a_7;a_3=-a_6$ និង $a_4=-a_5$ ។ ហើយ $c_n=0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនសេស n ។

151.▲ តាង $X=1-x;Y=1-y;Z=1-z;T=1-t$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}X^2=Y\\Y^2=Z\\Z^2=T\\T^2=X\end{cases}$$

យើងទាញបាន $X^4=Y^2=Z \Longrightarrow X^8=Z^2=T \Longrightarrow X^{16}=T^2=X \Longrightarrow X(X^{15}-1)=0$ ។

យើងទាញបាន

- $X=0; \Longrightarrow Y=Z=T=0 \Longrightarrow x=y=z=t=1$

- $X=1; \Longrightarrow Y=Z=T=1 \Longrightarrow x=y=z=t=0$

152.▲ បូកសមីការទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$0=\sum_{i=1}^{1000}\left(x_i^2+2\left(\frac{a-1}{2}\right)x_i+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)=\sum_{i=1}^{1000}\left(x_i+\frac{a-1}{2}\right)^2$$

យើងទាញបាន $x_1=x_2=\cdots=x_{1000}=\frac{a-1}{2}$ ។

153.▲ តាង $t_1=x_1-x_2; t_2=x_2-x_3; \dots; t_n=x_n-x_1$ ។ ប្រព័ន្ធសមីការសមមូលនឹង

$$\begin{cases}2t_1=3t_2\\2t_2=3t_3\\\quad\dots\dots\\2t_n=3t_1\end{cases}$$

គុណអង្គនឹងអង្គនៃសមីការ យើងទាញបាន $2^n t_1t_2\dots t_n=3^n t_1t_2\dots t_n \Longrightarrow t_1t_2\dots t_n=0$។ ដូច្នេះត្រូវមាន t_i មួយដែលស្មើសូន្យ ។ ហើយដោយ $2t_i=3t_{i+1}$ នោះ យើងទាញបាន $t_1=t_2=\cdots=t_n=0$ ហើយ $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ។

154.▲ យើងមាន $3S=x^2+y^2+z^2\geq 0 \Longrightarrow S=x+y+z\geq 0$ ។ ដូច្នេះក្នុងចំនោម x,y,z ត្រូវតែមានមួយជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន។ សន្មតថា $x\geq 0$ ។ យើងទាញបាន

$$y(4-y)=x\geq 0 \Longrightarrow 0\leq y\leq 4$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន $0\leq x,y,z\leq 4$ ។ តាង $x=4\sin^2\alpha$ ដែល $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ ។ យើងទាញបាន $z=4\sin^2 2\alpha\,; y=4\sin^2 4\alpha$ ។ ហើយ $x=4\sin^2 8\alpha$ ។ ដូច្នេះ

$$4\sin^2 8\alpha=4\sin^2\alpha \Longrightarrow \cos 16\alpha=\cos 2\alpha$$

នាំអោយ

1) $16\alpha=2\alpha+2k\pi \Longrightarrow \alpha=\frac{k\pi}{7}\ (k\in\mathbb{Z});$

$$0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}\Longrightarrow k=\{0;1;2;3\}$$

- $k=0$

$$x=y=0; \Longrightarrow S=0$$

-$k=1;2;3$

$$\Longrightarrow\ S = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7}\right) = 7$$

2) $16\alpha = -2\alpha + 2k\pi\ \ \Longrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{9}\ (k \in \mathbb{Z});$

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Longrightarrow k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

- $k = 0$

$$x = y = 0;\ \Longrightarrow S = 0$$

- $k = 1; 2; 4$

$$\Longrightarrow\ S = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{4\pi}{9}\right) = 6$$

- $k = 3$

$$\Longrightarrow\ S = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{2\pi}{3} + \sin^2\frac{4\pi}{3}\right) = 9$$

155. $\{(1; 1; 1); (-2; -2; -2)\}$▲យកសមីការទីមួយដកសមីការទីពីរ សមីការទីពីរដកសមីការទីបី យើងទាញបាន

$$(x-y)(1-z) = 0;\quad (1)$$
$$(y-z)(1-x) = 0\quad (2)$$

$(1) \Longrightarrow\ \ x = y$ រឺ $z = 1$

$(2) \Longrightarrow\ \ y = z$ រឺ $x = 1$

យើងទាញបានបួនករណី

$$(x = y = z); (x = y; x = 1); (z = 1; y = z); (z = 1; x = 1)$$

ករណីទាំងបួននេះ ត្រូវនឹង $x = y = z = 1$ រឺ $x = y = z = -2$ ។

156. ▲ យើងសិក្សាករណី $a > 0$ ព្រោះ $a \neq 0$ ។ ករណី $a < 0$ គុណអង្គសមីការនឹងសញ្ញាដក។ បូកសមីការទាំងបីនៃប្រព័ន្ធបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$[ax^2 + (b-1)x + c] + [ay^2 + (b-1)y + c] + [az^2 + (b-1)z + c] = 0$$

តាង $f(t) = at^2 + (b-1)t + c$ ។ យើងមាន

$$f(x) + f(y) + f(z) = 0\qquad (*)$$

បើ $\Delta = (b-1)^2 - 4ac < 0$ នោះ $f(t) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{R}$ ព្រោះ $a > 0$។ ដូច្នេះ

$$f(x) + f(y) + f(z) > 0$$

ផ្ទុយពីសមីការ(*)។

157. ▲ ជំនួស $y = -x$ ចូលក្នុងប្រព័ន្ធ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3 + ax^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2 & (1) \\ 2x^3 - ax^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

សមីការទី២ យើងទាញបាន $x \neq 0$ ។ បូកសមីការទាំងពីរចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$3x^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2 + 1 > 0; \Longrightarrow x > 0$$

យកសមីការទី១ចែកនឹងសមីការទី២ យើងទាញបាន

$$\frac{a+1}{2-a} = \frac{1}{2}(a+1)^2 \quad \Longrightarrow a = 0;\ -1; 1$$

ចំពោះ $a = 0$ យើងមាន

$$\begin{cases} x^3 = \dfrac{1}{2} \\ x^3 + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

រឹសដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ។

ចំពោះ $a = -1$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

ចំពោះ $a = 1$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ x^3 + x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ 2x^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0$$
$$\Longrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x+y) = 0$$
$$\Longrightarrow (x+y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$
$$\Longrightarrow x + y = 0$$
$$\Longrightarrow x = 1; y = -1$$

ដូច្នេះ $a = \{-1; 0; 1\}$ ប្រព័ន្ធមានរឹសផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខខណ្ឌ។

158. ▲ប្រព័ន្ធសមមូលនឹង

$$\begin{cases} 3x^2 - 2(3+z)x + 3z + 3 = 0 & (1) \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 & (2) \\ y^2 = -z^2 + 6z & (3) \\ z \leq 3 & (4) \end{cases}$$

សមីការ(១) មានរឹស បើ $\Delta' = (3+z)^2 - 3(3z+3) \geq 0 \quad \Longrightarrow z \leq 0\, ; z \geq 3$ (៥)។ សមីការទី៣ មានរឹសបើ $-z^2 + 6z \geq 0 \quad \Longrightarrow 0 \leq z \leq 6$ (៦)។ ពី(៤) (៥)(៦)យើងទាញបាន $z = 0; z = 3$ ។ បើ $z = 0$ នោះ តាម(៣) យើងទាញបាន $y = 0;$ និងពី(២) យើងទាញបាន $x = 1; x = 2$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(១) យើងទាញបាន $x = 1$ ។

បើ $z=3$ នោះ តាម(៣) យើងទាញបាន $y=\pm 3$ ។ ពី(១) យើងទាញបាន $x=2$ ។ ចំពោះ $x=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(២) យើងទាញបាន $y=-3$ ។ ដូច្នេះ

$$(x;y;z)=\{(1;0;0);(2;-3;3)\}$$

159. ▲ គុណសមីការទីមួយទីពីរនិងទីបី នឹង c,a,b រៀងគ្នា យើងទាញបាន

$$\begin{cases}\dfrac{ac}{x}-\dfrac{bc}{z}=c^2-czx\\ \dfrac{ab}{y}-\dfrac{ac}{x}=a^2-axy\\ \dfrac{bc}{z}-\dfrac{ab}{y}=b^2-byz\end{cases}$$

បូកសមីការទាំងបីបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$a^2+b^2+c^2=axy+bzy+cxz \qquad (1)$$

បំបាត់ភាគបែងនៃប្រព័ន្ធដើម

$$\begin{cases}az-bx=cxz-z^2x^2\\ bx-cy=axy-x^2y^2\\ cy-az=bzy-y^2z^2\end{cases}$$

បូកបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=axy+bzy+cxz \qquad (2)$$

បូក(១)នឹង(២) យើងទាញបាន

$$a^2+b^2+c^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2(axy+bzy+cxz)$$
$$\Longrightarrow\quad (xy-a)^2+(zy-b)^2+(xz-c)^2=0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases}xy=a\\ zy=b\\ xz=c\end{cases}$$
$$\Longrightarrow\quad (x;y;z)=\left\{\left(\sqrt{\frac{ac}{b}};\sqrt{\frac{ab}{c}};\sqrt{\frac{bc}{a}}\right);\left(-\sqrt{\frac{ac}{b}};-\sqrt{\frac{ab}{c}};-\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)\right\}$$

160. ▲ ប្រព័ន្ធមានរឹសងាយ $(0;0;0)$ ។ បើ $x=\pm 1$ នោះ $\pm 2+y=y$ មិនអាច។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $x\neq\pm 1; y\neq\pm 1; z\neq\pm 1$ ។ យើងមាន

$$\begin{cases}2x+x^2y=y\\ 2y+y^2z=z\\ 2z+z^2x=x\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2} & (4)\\ z=\dfrac{2y}{1-y^2} & (5)\\ x=\dfrac{2z}{1-z^2} & (6)\end{cases}$$

តាង $x = \tan\alpha \neq \pm 1 \;\; \Longrightarrow \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ។ ពី(៤) យើងទាញបាន $y = \tan 2\alpha$ និងពី(៥) យើងទាញបាន $z = \tan 4\alpha$ ហើយជាចុងក្រោយ $x = \tan 8\alpha = \tan\alpha$ ។ ដូច្នេះ

$$8\alpha = \alpha + n\pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha = n\frac{\pi}{7} \;\; ; (n \in \mathbb{Z})$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានរឹស $(x; y; z) = \left\{\left(\tan n\frac{\pi}{7}; \tan n\frac{2\pi}{7}; \tan n\frac{4\pi}{7}\right) | n \in \mathbb{Z}\right\}$

V. វិសមភាព

161. ▲ តាង $A = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{99}{100}; B = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}...\frac{98}{99}$ ។ ដោយ

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}; \frac{4}{5} > \frac{3}{4}; \frac{6}{7} > \frac{5}{6}; ...; \frac{98}{99} > \frac{97}{98}; 1 > \frac{99}{100}$$

នោះ $B > A$។ យើងមាន

$$AB = \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}.\frac{6}{7}\right)...\left(\frac{98}{99}.\frac{99}{100}\right) = \frac{1}{100}$$

ដូច្នេះ $A^2 < AB = \frac{1}{100} \;\; \Longrightarrow A < \frac{1}{10}$ ។

បន្ទាប់មកទៀត

$$B < 2A = \frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}...\frac{99}{100}$$

ព្រោះ $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}; \frac{4}{5} < \frac{5}{6}; \frac{6}{7} < \frac{7}{8}; ...; \frac{98}{99} < \frac{99}{100}$។ ដូច្នេះ

$$A.2A > AB = \frac{1}{100} \quad \Longrightarrow A > \frac{1}{10\sqrt{2}}$$

162. ▲ យើងមាន

$$\frac{1}{2^{100}}C_{100}^{50} = \frac{1.2.3 \dots 100}{2^{50}(1.2.3 \dots 50).2^{50}(1.2.3 \dots 50)}$$
$$= \frac{1.2.3 \dots 100}{(2.4.6 \dots 100)(2.4.6 \dots 100)} = \frac{1.3.5..99}{2.4.6 \dots 100}$$

ហើយតាមសំនួរ**161.** យើងទាញបានវិសមភាពពិត។

163. ▲ ដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ យើងមាន

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

ចំពោះ $n = 1$ យើងមាន $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3.1+1}}$។ បន្ទាប់មកទៀតសន្មតថាពិតដល់ n មានន័យថា

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

យើងគុណអង្គសង្ខាងនៃវិសមភាពនេះនឹង $\frac{2n+1}{2n+2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leq\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}$$

យើងមាន

$$\left[\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}\right]^2=\frac{(2n+1)^2}{12n^3+28n^2+20n+4}$$
$$=\frac{(2n+1)^2}{(12n^3+28n^2+19n+4)+n}$$
$$=\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2(3n+4)+n}<\frac{1}{3n+4}$$
$$\Rightarrow\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

164. ▲ អនុវត្តន៍វិសមភាពក្នុងសំនួរទី**163.** ចំពោះ $n = 50$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2\times 50-1}{2\times 50}<\frac{1}{\sqrt{3\times 50+1}}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{\sqrt{151}}=\frac{1}{12{,}288}<\frac{1}{12}$$

ពិត។

165. ● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។

166. ▲ជាដំបូង យើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ$k \leq n$ យើងមាន

$$1+\frac{k}{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

ចំពោះ $k=1$ វិសមភាពពិត។ សន្មតថាវិសមភាពពិតចំពោះតំលៃ k ណាមួយ។ យើងមាន

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2}>1+\frac{k+1}{n}$$

ពិត (មិនចាំបាច់ទាល់តែ $k \leq n$ ទេ)។

យើងមាន

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+2k+1}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{n(k+1) - k^2}{n^3} \\
&< 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

ព្រោះ $n(k+1) > k^2$ បើ $n \geq k$ ។ ដូច្នេះដោយយក $k = n$ យើងទាញបាន

$$2 = 1 + \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3$$

167. ▲ តាមសំនួរ **166.** យើងទាញបាន

$$(1{,}000\,001)^{1\,000\,000} = \left(1 + \frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} > 2$$

168. ▲យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} . \frac{1}{1001} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} . \frac{1}{1001} \\
&< \frac{3.1}{1001} < 1
\end{aligned}
$$

(តាមសំនួរ **166.**)។ ដូច្នេះ $1000^{1\,000} > 1001^{999}$ ។

169. ▲យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1} \\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1} < 2\sqrt{c} \\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1}\right)^2 < 4c \\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{c^2 - 1} < c
\end{aligned}
$$

ពិត។

170. ▲តាងចំនួនពិតទាំងនោះដោយ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ដែល $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ ។ ចំពោះ $n = 1$ វិសមភាពពិត។ សន្មតថាពិតចំពោះ $n = k$ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, \dots, x_k$ ដែល $x_1 x_2 \dots x_k = 1$ យើងមាន $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$ ។ ចំពោះ $n = k + 1$ បើ $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ នោះ$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \geq k + 1$ វិសមភាពពិត។ ករណីផ្សេងពីនេះ ដោយសារ ផលគុណនៃចំនួនទាំងនេះមានតំលៃស្មើមួយ ហើយចំនួនទាំងនេះមិនមានតំលៃស្មើមួយដូចគ្នាទាំងអស់ ដូច្នេះមានចំនួនខ្លះតូចជាងមួយចំនួនខ្លះធំជាងមួយ។ សន្មត $x_1 < 1, x_{k+1} > 1$។ តាង $y_1 = x_1 x_{k+1}$។ យើងមាន $y_1 x_2 \dots x_k = 1$ ដូច្នេះ $y_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$ ។ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + \cdots + x_k) - y_1 + x_1 + x_{k+1} \\
&\geq k - y_1 + x_1 + x_{k+1} = (k+1) - 1 - x_1 x_{k+1} + x_1 + x_{k+1} \\
&= k + 1 + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1
\end{aligned}
$$

វិសមភាពពិតដល់ $k+1$ ។

171. ▲ ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។ ចំពោះ $n=1$ វិសមភាពពិត។ សន្មតថាពិតចំពោះ $n=k$ មានន័យថា $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_k)\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k$ ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភពនឹង $(1+x_{k+1})$ យើងទាញបាន $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geq(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})$។ យើងមាន $(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\geq(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}\Leftrightarrow(x_1+x_2+\cdots+x_k)x_{k+1}\geq 0$ ពិតព្រោះ $x_1,x_2,\dots,x_{k+1}$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។
ដូច្នេះ $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geq(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}$ ។

172. ▲ ចំពោះ $n=6$ យើងមាន $2^6=64<6!=720<3^6=729$

សន្មតថាវិសមភាពពិតចំពោះ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយ។ យើងនឹងបង្ហាញថា ពិតចំពោះ $n+1$ ដែរ។
យើងមាន

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$$
$$\Longrightarrow\ (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n>(n+1)!>(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}>(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \text{ និង } \left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1)>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$$

ជាការស្រេច។ វិសមភាពទាំងពីរសមមូលនឹង

$$\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}>n+1>\frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}>1>\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{3}\right)^n}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1>\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\Leftrightarrow 2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

ពិត តាមសំនួរ **166.** ។

173. ▲ យើងមាន $\Delta'=999^2-ac>0;\ \Delta'\in\mathbb{Z}$ ព្រោះ $a,c\in\mathbb{Z}$ និង $|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}$ ។
បើ $\Delta'\geq 2$ នោះ

$$|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}>\frac{2\sqrt{\Delta'}}{2000}\geq\frac{2\sqrt{2}}{2000}>\frac{1}{998}$$

បើ $\Delta' = 1$ នោះ $ac = 999^2 - 1 = 998.1000 = 2^4.5^3.449$ ។ យើងមាន $2^2.5^3.449 = 1996 < 2000$ ជាតួចែកមួយនៃ $2^4.5^3.449 = ac \Rightarrow$ តួចែកធំបំផុតនៃ $ac = 2^4.5^3.449$ ហើយដែលតូចជាង 2000 ស្មើនឹង 1996 ។ ដូច្នេះ $a \leq 1996$ (ហេតុអ្វីបានយកតួចែកតូចជាង2000 ? ព្រោះ $|a| < 2000, |c| < 2000$)។ យើងទាញបាន

$$|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = \frac{2}{|a|} \geq \frac{1}{998}$$

174. ▲ លក្ខខណ្ឌដែលអោយ នាំអោយ $x \neq y$ និង

$$a = \frac{y-2}{y-x}; b = \frac{2-x}{y-x}$$

ជំនួសចូលលក្ខខណ្ឌទីបី យើងទាញបាន

$$3 = ax^2 + by^2 = \frac{(y-2)x^2}{y-x} + \frac{(2-x)y^2}{y-x} = 2(x+y) - xy \quad (1)$$

តាង $C = ax^3 + by^3 > 0$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} C &= \frac{y-2}{y-x}x^3 + \frac{2-x}{y-x}y^3 \\ &= -xy(x+y) + 2(x^2 + xy + y^2) \\ &= -xy\,(x+y) + 2(x+y)^2 - 2xy \\ &= (x+y)[-xy + 2(x+y)] - 2xy \\ &= 3(x+y) - 2xy; \qquad \text{តាម } (1) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{cases} 2(x+y) - xy = 3 \\ 3(x+y) - 2xy = C \end{cases}$$

យើងទាញបាន $x + y = 6 - C; xy = 9 - 2C$ ។

យើងមាន $(x+y)^2 > 4xy \quad \Rightarrow \quad (6-C)^2 > 4(9-2C) \quad \Rightarrow C > 4$ ។

យើងមាន $xy > 0 \quad \Rightarrow 9 - 2C > 0; \Rightarrow C < 4{,}5$ ។

175. ▲ ● ករណី $x < -3$ នោះ

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right| > |x| > 3$$

● ករណី $-3 < x < 0$

ករណីនេះ $\frac{2x-1}{x+3} < 0$ ដូច្នេះ

$$S \geq \frac{2x-1}{x+3} = -2 + \frac{7}{x+3} > -2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$$

● ករណី $x > 1/2$

យើងមាន

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq |x| > \frac{1}{2}$$

● ករណី $0 \leq x \leq 1/2$

ករណីនេះយើងមាន $S \geq 1/3$ ព្រោះ

$$S = x - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{x^2+x+1}{x+3}$$
$$S \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x+1}{x+3} \geq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3x+3 \geq x+3 \quad \Leftrightarrow x \geq 0$$

ពិត។សញ្ញាស្មើកើតមាន ពេល $x = 0$ ។

ដូច្នេះ $\min S = 1/3$ ពេល $x = 0$ ។

176. ▲ សន្មតថា $a \geq 0$ ។ បើ $a < 0$ នោះគុណពហុធា$f(x)$ នឹង(-1) យើងទាញបានពហុធាដែលមេគុណវិជ្ជមាន ហើយនៅតែផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្មដដែល។ យើងសន្មតផងដែរថា $b \geq 0$ ។ បើ$b < 0$ នោះយើងយក $f(-x)$ ព្រោះសម្មតិកម្មស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x ។

ជំនួស $x = 0; x = \pm 1$ ចូល$f(x)$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} -1 \leq c \leq 1 \ (1) \\ -1 \leq a+b+c \leq 1 \ (2) \\ -1 \leq a-b+c \leq 1 \ (3) \end{cases}$$

(2) និង(3) នាំអោយ

$$\begin{cases} -1-c \leq a+b \leq 1-c \\ -1-c \leq a-b \leq 1+c \end{cases}$$

ដោយ $a \geq 0; b \geq 0; |c| \leq 1$ នោះ

$$\begin{cases} 0 \leq a+b \leq 2 \\ -2 \leq a-b \leq 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \leq 4 \\ a^2-2ab+b^2 \leq 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \ a^2+b^2 \leq 4 \quad (4)$$

យើងមាន

$$K = \frac{8}{3}(a^2+b^2) - \frac{2}{3}b^2 \leq \frac{8}{3}(a^2+b^2) \leq \frac{8}{3}.4 = \frac{32}{3}$$

K មានតំលៃធំបំផុតពេល $b = 0; a^2+b^2 = 4 \Rightarrow b = 0; a = \pm 2$ ។

បើ $b = 0; a = 2; (2) \Rightarrow c = -1$ ។

បើ $b = 0; a = -2; (2) \Rightarrow c = 1$ ។

ដូច្នេះ $(a,b,c) = \{(2;0;-1);(-2;0;1)\}$ ។

177. ▲ សន្មតថា $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ ។ សន្មតថា $\min_{i \neq j}(a_i - a_j)^2 > \frac{1}{100}$ នោះ

$$a_2 - a_1 > \frac{1}{10} \ \Rightarrow a_2 > \frac{1}{10}$$
$$a_3 - a_2 > \frac{1}{10} \ \Rightarrow a_3 > \frac{2}{10}$$
$$a_4 - a_3 > \frac{1}{10} \ \Rightarrow a_4 > \frac{3}{10}$$
$$a_5 - a_4 > \frac{1}{10} \ \Rightarrow a_2 > \frac{4}{10}$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > \frac{1+2+3+4}{10} = 1$$

មិនត្រឹមត្រូវ។

សន្មតថា $\min_{i \neq j} \left|a_i^2 - a_j^2\right| > \frac{1}{36}$ នោះ

$$a_2^2 - a_1^2 > \frac{1}{36} \ \Rightarrow a_2 > \frac{1}{6}$$
$$a_3^2 - a_2^2 > \frac{1}{36} \ \Rightarrow a_3 > \frac{\sqrt{2}}{6}$$
$$a_4^2 - a_3^2 > \frac{1}{36} \ \Rightarrow a_4 > \frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$a_5^2 - a_4^2 > \frac{1}{36} \ \Rightarrow a_5 > \frac{\sqrt{4}}{6}$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{10} > 1$$

មិនត្រឹមត្រូវ។

178. ▲ ❶ ដំនោះស្រាយទី១

យើងមាន

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$
$$< \frac{2a}{a+(b+c)} + \frac{2b}{b+(c+a)} + \frac{2c}{c+(a+b)} = 2$$

❷ ដំនោះស្រាយទី២

តាង $a = x + y; b = y + z; c = z + x$។

$$a + b > c \ \Leftrightarrow x + y + y + z > z + x \ \Rightarrow y > 0$$
$$a + c > b \ \Leftrightarrow x + y + z + x > y + z \ \Rightarrow x > 0$$
$$b + c > a \ \Leftrightarrow y + z + z + x > x + y \ \Rightarrow z > 0$$

ដូច្នេះ យើងបំលែង លក្ខខណ្ឌ a, b, c ជាវង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណមក $x, y, z > 0$ ។

យើងមាន

$$\frac{x+y}{y+z+z+x} + \frac{y+z}{z+x+x+y} + \frac{z+x}{x+y+y+z} < \frac{x+y}{y+z+x} + \frac{y+z}{z+x+y} + \frac{z+x}{x+y+z} = 2$$

ពិត។

179. ▲ តាង $a=x+y;b=y+z;c=z+x$ នោះ $x;y;z>0$ ។

វិសមភាពខាងឆ្វេងសមមូលនឹង

$$
\begin{aligned}
& (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \\
\Leftrightarrow\quad & 4(x+y+z)^2 \geq 3[(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)] \\
\Leftrightarrow\quad & x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geq 0
\end{aligned}
$$

ពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$ ។

ដូចគ្នាវិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង $xy+yz+zx>0$ ពិត ព្រោះ $x,y,z>0$ ។

180. ▲ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
& a^2+b^2>2ab \\
& a+b>c \quad \Longrightarrow a^2+b^2+2ab>c^2 \\
\Longrightarrow\quad & a^2+b^2+(a^2+b^2)>a^2+b^2+2ab>c^2 \\
\Longrightarrow\ & 2a^2+2b^2-c^2>0
\end{aligned}
$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$
\begin{aligned}
2b^2+2c^2-a^2>0 \\
2c^2+2a^2-b^2>0
\end{aligned}
$$

យើងនឹងបង្ហាញថា

$$(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \leq (2a^2+bc)^2$$

យើងមាន

$$
\begin{aligned}
& (2a^2+bc)^2-(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \\
& = 4a^2bc-2a^2(b^2+c^2)-4b^2c^2+2b^4+2c^4 \\
& = 2(b^2-c^2)^2-2a^2(b-c)^2 \\
& = 2(b-c)^2(b+c+a)(b+c-a) \geq 0
\end{aligned}
$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$
\begin{aligned}
0<(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \leq (2a^2+bc)^2 \\
0<(2b^2+2c^2-a^2)(2a^2+2b^2-c^2) \leq (2b^2+ac)^2 \\
0<(2c^2+2a^2-b^2)(2b^2+2c^2-a^2) \leq (2c^2+ab)^2
\end{aligned}
$$

គុណអង្គនឹងអង្គយើងទាញបានវិសមភាព។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a=b=c$ ។

181. ▲យើងទាញបាន

$$
\begin{aligned}
& a \geq 0; b^2-4ac \leq 0 \ \Longrightarrow b^2 \leq 4ac = 4.2a.\frac{c}{2} \leq \left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 \\
& \Longrightarrow 2b \leq 4a+c \\
& \Longrightarrow 2b-4a \leq c \\
& \Longrightarrow 3b-3a \leq a+b+c
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \frac{a+b+c}{b-a} \geq 3$$
$$\Longrightarrow \min F = 3$$

182. ▲ យើងមាន

$$S = bc\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha}{2} = \cos(\alpha - 60°)$$

យើងមាន

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} \iff b^2 + c^2 \geq bc\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right)$$
$$\iff (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos(\alpha - 60°)) \geq 0$$

យើងមានសមភាពទាល់តែ $b = c$ និង $\alpha = 60°$ មានន័យថា ត្រីកោណជាត្រីកោណសម័ង្ស។

183. ▲ សន្មតថា $a \geq 0; c \geq 0; 4ac \geq b^2$ ។ បើ $a = 0$ នោះ $b = 0$ ហើយវិសមភាពទៅជា $cg^2 \geq 0$ ។ បើ $a > 0$ នោះ

$$af^2 + bfg + cg^2 = a\left(f + \frac{b}{2a}g\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}g^2 \geq 0$$

ឥលូវយើងសន្មតថា $af^2 + bfg + cg^2 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់គូវ៉ិចទ័រ f, g ។ ជំនួស f ដោយ tg $(t \in \mathbb{R})$ យើងទាញបាន $(at^2 + bt + c)g^2 \geq 0$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត t ដូច្នេះនាំអោយ $a \geq 0, c \geq 0, 4ac \geq b^2$។

184. ▲យើងមាន

$$-a_i = \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_j$$
$$n\,|a_i| = |(n-1)a_i - (-a_i)| = \left|\sum_{j=1;j\neq i}^{n}\left(a_i - a_j\right)\right|$$
$$= \left|\sum_{i\neq j}\left(a_i - a_j\right)\right| \leq \sum_{i\neq j}\left|a_i - a_j\right|$$
$$\Longrightarrow \quad n\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq 2\sum_{i<j}\left|a_i - a_j\right|$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត។

ចំពោះ $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = x$ និង $a_n = -(n-1)x$ យើងទាញបានអង្គទាំង២ស្មើគ្នា។ ដូច្នេះ វិសមភាពជាវិសមភាពតូចជាងឬស្មើ។

185. ▲ ❶ ដំណោះស្រាយទី១

ជាដំបូងយើងសន្មតថា កត្តានិមួយៗនៃអង្គខាងស្តាំរបស់វិសមភាពមានតម្លៃវិជ្ជមានឬសូន្យ។

យើងមាន

$$b-1+\frac{1}{c}=b\left(1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right)=b\left(1-\frac{1}{b}+a\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)&=b\left[a-\left(1-\frac{1}{b}\right)\right]\left[a+\left(1-\frac{1}{b}\right)\right]\\&=b\left[a^2-\left(1-\frac{1}{b}\right)^2\right]\\&\le ba^2\end{aligned}$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le cb^2$$

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le ac^2$$

$$\Rightarrow\left[\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right]^2\le (abc)^2=1$$

ពិត។

ករណីមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន ឧទាហរណ៍ $a-1+\frac{1}{b}<0$ នោះ $a<1$ ហើយ $b>1$។ ក្នុងករណីនេះ $b-1+\frac{1}{c}>0$ និង $c-1+\frac{1}{a}>0$ ។ ដូច្នេះបើមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន នោះ មានតែកត្តាមួយនោះប៉ុណ្ណោះ ដែលអវិជ្ជមាន ដូច្នេះផលគុណនៃកត្តាទាំងបីនេះអវិជ្ជមាន ដូច្នេះតូចជាង១។

❷ ដំណោះស្រាយទី២

វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\left(a-(abc)^{\frac{1}{3}}+\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{b}\right)\left(b-(abc)^{\frac{1}{3}}+\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{c}\right)\left(c-(abc)^{\frac{1}{3}}+\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{a}\right)\le abc$$

ជំនួស $a=x^3;b=y^3;c=z^3$ ដែល $x,y,z>0$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&\left(x^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{y^3}\right)\left(y^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{z^3}\right)\left(z^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{x^3}\right)\le x^3y^3z^3\\\Leftrightarrow\ &(x^2y-y^2z+z^2x)(y^2z-z^2x+x^2y)(z^2x-x^2y+y^2z)\le x^3y^3z^3\\\Leftrightarrow\ &3x^3y^3z^3+\sum_{cyclic}x^6y^3\ge\sum_{cyclic}x^4y^4z+\sum_{cyclic}x^5y^2z^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x^2y)(y^2z)(z^2x) + \sum_{cyclic} (x^2y)^3 \geq \sum_{sym} (x^2y)^2(y^2z)$$

តាង $u = x^2y; v = y^2z; w = z^2x$ ។ យើងមាន $u, v, w > 0$

$$\Rightarrow \quad 3uvw + \sum_{cyclic} u^3 \geq \sum_{sym} u^2v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{cyclic} u(u-v)(u-w) \geq 0$$

ពិត តាមវិសមភាព Schur ។

186.▲ ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌ $a + b = 1$ យើងបំលែងវិសមភាពដែលអោយទៅជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{(a+b)(a+(a+b))} + \frac{b^2}{(a+b)\big(b+(a+b)\big)} \Leftrightarrow a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

ពិត។ សមភាពកើតមាន ពេល $a = b = 1/2$ ។

187.

188. ▲ដោយ $0 < x < 1$ នោះវិសមភាពដែលឲ្យអាចសរសេរជា

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) \geq 9$$
$$(x+1)(1-x+1) \geq 9x(1-x)$$
$$2 + x - x^2 \geq 9x - 9x^2$$
$$(2x-1)^2 \geq 0$$

ពិត។

189. ▲ យើងមាន

$$\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a^6}{b^6} + \frac{b^6}{a^6}\right) + \left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$\geq 2 + 2 + 2 = 6$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a = b$ ។

190. ▲ យើងមាន

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{x}{2\sqrt{x^4y^2}} + \frac{y}{2\sqrt{x^2y^4}}$$
$$\leq \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2xy^2} = \frac{1}{xy}$$

191. ▲ យើងមាន

$$0 \le \left(x - \sqrt{y^2+1}\right)^2 + \left(y - \sqrt{x^2+1}\right)^2$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 + 1 \ge x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2+1} \\ y = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2$ មិនអាច។ ដូច្នេះអង្គទី១ធំជាងអង្គទី២ដាច់ខាត មានន័យថា

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$$

192. ▲ យើងមាន

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \ge \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{z} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 - 2\frac{y}{x} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 - 2\frac{z}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \ge 0$$

ពិតជានិច្ច។ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា មានតែ$x = y = z$ ។

193. ▲តាង $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ នោះ $x, y, z > 0$ ។

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$(x + 2y + z)(x + y + 2z)(2x + y + z) \ge 64xyz$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= (x + y) + (y + z) \\ &\ge 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} \\ &\ge 4(xy^2z)^{1/4} \end{aligned}$$

ដូចគ្នា

$$x + y + 2z \ge 4(xyz^2)^{\frac{1}{4}}$$
$$2x + y + z \ge 4(x^2yz)^{1/4}$$

ដូច្នេះ

$$(x + 2y + z)(x + y + 2z)(2x + y + z) \ge 64(xy^2z.xyz^2.x\hat{\ }2yz)^{\frac{1}{4}} = 64xyz$$

ពិត។

194. ▲តាង $a=x+y; b=y+z; c=z+x$ នោះ $a;b;c>0$ ។ យើងមាន

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{zx^2-y^2}{x+y}=\frac{(a-b)c}{b}+\frac{(b-c)a}{c}+\frac{(c-a)b}{a}$$
$$=\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c$$

តែថា

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\right)= a\frac{b^2+c^2}{2bc}\geq a$$

ទៅជាស្មើគ្នា ទាល់តែ $b=c$ ។ ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right)\geq c$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}\right)\geq b$$

បូកអង្គនៃវិសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន$\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c\geq 0$ ។ ដូច្នេះ វិសមភាពពិត។ សញ្ញាស្មើកើតមានពេល$a=b=c$ មានន័យថា $x=y=z$ ។

195. ▲តាង $x=a+b-c, y=b+c-a, z=c+a-b$ ។

ដូច្នេះ $x,y,z>0$ និង $a=\frac{x+z}{2}, b=\frac{y+x}{2}, c=\frac{z+y}{2}$ ។ យើងមាន

$$2(x+y)=(x+y)+(x+y)\geq x+y+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$
$$\Longrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{2}.\sqrt{x+y}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើ $x = y$ ។

ដូច្នេះ

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{2}.\sqrt{x+y}=2\sqrt{b}$$

ដូចគ្នា

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq 2\sqrt{c}$$
$$\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\leq 2\sqrt{a}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាព យើងទាញបានវិសមភាពពិត។

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$ ។

196. ▲ ❶ ដំណោះស្រាយទី១

យើងមាន $(a-b)(a^2-b^2)\geq 0 \Longrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងមានតែ $a=b$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \le \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$
$$\frac{1}{b^3+c^3+abc} \le \frac{a}{abc(a+b+c)}$$
$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{c+b+a}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$$

❷ ដំណោះស្រាយទី២

វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$\begin{aligned}
&\sum_{sym}(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)abc \\
&\qquad \le 2(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc) \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{sym}(a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^2c^2+a^3b^3c^3) \\
&\qquad \le \sum_{sym}(a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+a^7bc+2a^5b^2c^2) \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{sym}(2a^6b^3-2a^5b^2c^2) \ge 0 \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{sym} a^6b^3c^0 \ge \sum_{sym} a^5b^2c^2
\end{aligned}$$

ពិតតាមវិសមភាព Muirhead ព្រោះ $(6;3;0)$លុបលើ $(5;2;2)$។ ស្មើត$(6;3;0)$លុបលើ $(5;2;2)$

ព្រោះ $6>5; 6+3=9>5+2=7; 6+3+0=5+2+2$ ។

197. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
a^5+b^5 &= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) \\
&= (a+b)[(a-b)(a^3-b^3)+a^2b^2] \\
&\ge (a+b)a^2b^2
\end{aligned}$$

ព្រោះ $(a-b)(a^3-b^3) \ge 0$ ។

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{ab}{a^5+b^5+ab} &\le \frac{ab}{(a+b)a^2b^2+ab} \\
&= \frac{1}{ab(a+b)+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{ab(a+b)+abc}$$
$$= \frac{1}{ab(a+b+c)}$$
$$= \frac{c}{a+b+c}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា ចំពោះតួផ្សេងទៀត។ យើងទាញបាន

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le \frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1$$

សមភាពកើតមានពេល $a=b=c$ ។

198.▲ តាង

$$A=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$
$$B=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$
$$A-B=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2+\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2-\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_i a_j b_j\right]$$
$$=\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2-2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_i a_j b_j$$
$$=\left[\sum_{1\le i<j\le n} a_i^2 b_j^2+\sum_{1\le i<j\le n} a_j^2 b_i^2\right]-2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_i a_j b_j$$
$$=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i^2 b_j^2+a_j^2 b_i^2-2a_i b_i a_j b_j\right)$$
$$=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2\ge 0$$

$\Longrightarrow$ សំណើពិត។

199.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2=n^2$$

200.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$(a+b+b+c+c+c)^2\le(1+1+1+1+1+1)(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(a+2b+3c)^2}{a^2+2b^2+3c^2} \le 6$$

201.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$\Rightarrow 3\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right] \ge \left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\right]^2$$

$$=\left(a+b+c+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)^2=\left(1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)^2$$

$$\ge\left(1+\frac{3}{(abc)^{\frac{1}{3}}}\right)^2 \quad \text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\ge\left(1+\frac{9}{a+b+c}\right)^2 \quad \text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$=(1+9)^2=100$$

$$\Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \ge \frac{100}{3}$$

202.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$(a+b+c+d)^2 \le (1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$\Rightarrow \quad (8-e)^2 \le 4(16-e^2)$

$\Rightarrow \quad e(5e-16) \le 0$

$\Rightarrow \quad 0 \le e \le \dfrac{16}{5}$

ដើម្បីឱ្យ $e=16/5$ លក្ខខណ្ឌគឺ $a=b=c=d$ និង $a+b+c+d=24/5 \Rightarrow a=b=c=d=6/5$។

203.▲ ❶ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}\right) \ge n^2$$

យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}=\sum_{i=1}^{n}1-\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}a_i=n-1 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\right) \ge \frac{n^2}{n-1} \qquad \text{ពិត។}$$

❷ ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{a_i}=-n+\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\quad (*)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី–ស្វាត

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}\right)\geq n^2$$

ដោយ

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i/s\right)=1\ \Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\geq n^2\,;(*)\ \Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{a_i}\geq -n+n^2=n(n-1)$$

ពិត។

❸ យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\geq\frac{s^2}{n}$$

តែថា

$$\left(\sum_{i=1}^{n}[a_i(s-a_i)]\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=s^2$$

$$\Rightarrow\quad\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right)\geq\frac{s^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}[a_i(s-a_i)]\right)}=\frac{s^2}{s\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

$$\geq\frac{s^2}{s^2-\frac{s^2}{n}}=\frac{n}{n-1}$$

ពិត។

204.▲ ក) សំនួរនេះគ្មានលក្ខណៈពិសេសណាលើលំដាប់ $a_1;a_2;a_3$ ទេ មានន័យថា បើយើងផ្លាស់ a_1 ទៅ a_2; a_2 ទៅ a_1 ។ល។នោះសម្មតិកម្មនៅដដែលគ្មានប្រែប្រួល។ តាមលក្ខណៈនេះ យើងអាចសន្មតថា $a_1\leq a_2\leq a_3$ ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $a_1+a_2>a_3$ ទៅបានហើយ។ យើងមាន

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$$

$$\Leftrightarrow\quad(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)>0$$

កត្តានិមួយៗសុទ្ធតែវិជ្ជមាន លើកលែងតែ$(a_1+a_2-a_3)$ដែលមិនទាន់ដឹង។ តែ ផលគុណរបស់កត្តាទាំងអស់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ$(a_1+a_2-a_3)$ ត្រូវតែវិជ្ជមាន។

ខ) ករណី $n=3$ បានស្រាយបញ្ជាក់រួចក្នុងសំនួរក)។ យើងសន្មតថា $n\geq 4$ ។

តាមដូចរៀបរាប់ក្នុងសំនួរក) យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $a_1;a_2;a_3$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ជាការគ្រប់គ្រាន់ហើយ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2$$
$$=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\sum_{k=4}^{n}a_k^2\right)^2$$
$$\leq(n-1)\left(\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{4}+\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{4}+\sum_{k=4}^{n}a_k^4\right)$$

$\Leftrightarrow\ 2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2$ ហើយតាម សំនួរ ក) យើងទាញបានថាសំនើពិត។

205.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$S_2-a_i^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{i-1}^2+a_{i+1}^2+\cdots+a_n^2$$
$$\geq\frac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n)^2=\frac{1}{n-1}(S_1-a_i)^2$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{S_2-a_i^2}{S_1-a_i}\geq\frac{1}{n-1}(S_1-a_i)$$
$$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n}\frac{S_2-a_i^2}{S_1-a_i}\geq\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(S_1-a_k)=S_1$$

206.▲ តាង $E=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^+/a^2+b^2=(c^2+d^2)^3\}$ និង f ជាអនុគមន៍ កំនត់លើ E ដោយ

$$f(a,b,c,d)=\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}-1$$

យើងឃើញថា ចំពោះ $\forall\lambda\in\mathbb{R}^+:(a,b,c,d)\in E$ និង $f(a,b,c,d)\geq 0$

$$a^2+b^2=(c^2+d^2)^3\ \Leftrightarrow\ (\lambda^3a)^2+(\lambda^3b)^2=[(\lambda c)^2+(\lambda d)^2]^3$$
$$\Leftrightarrow\ a_1^3+b_1^3=(c_1^2+d_1^2)^3$$
$$f(a,b,c,d)=\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}-1=\frac{(\lambda c)^3}{\lambda^3a}+\frac{(\lambda d)^3}{\lambda^3b}-1=f(\lambda^3a,\lambda^3b,\lambda c,\lambda d)$$
$$=f(a_1,b_1,c_1,d_1)$$

នោះ $(a_1=\lambda^3a,b_1=\lambda^3b,c_1=\lambda c,d_1=\lambda d)\in E$ និង

$f(a,b,c,d)\geq 0\ \Leftrightarrow f(a_1,b_1,c_1,d_1)\geq 0$ ។ លក្ខណៈខាងលើនេះពិតចំពោះ$\forall\lambda\in\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះយើងអាចជ្រើសរើសយក λ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1^2+b_1^2=1$ ។ តែយើងអាចជំនួសសំនេរ a_1,b_1,c_1,d_1

ដោយ a, b, c, d ដោយគ្មានបញ្ហាអ្វីទាំងអស់។ ដូច្នេះ មានន័យថាយើងអាចយក $(a, b, c, d) \in E$ និង $a^2 + b^2 = 1$ ដោយមិនធ្វើអោយបាត់ភាពទូទៅឡើយ។ ដូច្នេះ $c^2 + d^2 = 1$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត នាំអោយ

$$\left(\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b}\right)(ac + bd) \geq (c^2 + d^2)^2 = 1$$

តែយើងមាន

$$ac + bd \leq \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 + d^2}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq \frac{1}{ac + bd} \geq 1$$

207.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}\right)^2 \leq (x + y + z)\left(\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x + y + z}\sqrt{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}}$$

យើងមាន

$$\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$$

ដូច្នេះ

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x + y + z}\sqrt{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}} = \sqrt{x + y + z}$$

វិសមភាពពិត។

យើងមានសមភាព លុះត្រាតែ

$$\frac{x-1}{x^2} = \frac{z-1}{z^2} = \frac{z-1}{z^2}; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Longrightarrow x = y = z = \frac{3}{2}$$

208.▲ តាង $a = 1/x\,; b = 1/y\,; c = 1/z$ ។ លក្ខខណ្ឌ

$$xyz \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1 \Longrightarrow a + b + c \leq 1$$

វិសមភាព

$$xyz \geq 3(x + y + z) \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$$

យើងមាន

$$1 \geq (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
ហើយតាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត យើងមាន

$$ab+bc+ca \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2} \Longrightarrow \ a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$
ដូច្នេះ នាំអោយ $1 \geq 3(ab+bc+ca)$ ពិត។

209.▲ តាង $a = \tan x\,; b = \tan y\,; c = \tan z$ នោះ x, y, z ជាមុំនៃត្រីកោណស្រួច។ ដូច្នេះ វិសមភាពសមមូលនឹង $\max(\tan x\,, \tan y\,, \tan z) \geq \sqrt{3}$ ។ តែថា មានមុំមួយរបស់ត្រីកោណ ឧទាហរណ៍ x ដែលធំជាងរឺស្មើ $\pi/3$ (បើ តូចជាង$\pi/3$ ទាំងអស់គ្នា នោះ ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណមានតំលៃតូចជាង π)។ ដោយអនុគមន៍ tan កើនលើ $[0, \pi/2)$ នោះ $\tan x \geq \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ។

210.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4 = [(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+(2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots)]^2 \\
&\geq 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots) \quad (\text{វិសមភាពកូស៊ី}) \quad (1) \\
&= 8\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\left(\sum_{i<j} x_i x_j\right) \\
&= 8\sum_{i<j}\left[x_i x_j\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\right] \\
&\geq 8\sum_{i<j}\left[x_i x_j\left(x_i^2+x_j^2\right)\right] \qquad (2)
\end{aligned}$$
យើងមានសមភាព (2) ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់ x_i ចំនួន $(n-2)$ដែលស្មើសូន្យ។ ឧទាហរណ៍ $x_3 = \cdots = x_n = 0$ ។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ យើងមានសមភាព(1) ទាល់តែនិងមានតែ $2x_1x_2 = x_1^2+x_2^2$ មានន័យថា $x_1 = x_2$ ។

ដូច្នេះ $C = 1/8$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់ x_i ចំនួន $(n-2)$ តួ ដែលស្មើសូន្យ ហើយតួពីរទៀតស្មើគ្នា។

211.▲ យើងមាន

$$P^2 = (xy+yz+zt+tx)^2 \leq (x^2+y^2+z^2+t^2)(y^2+z^2+t^2+x^2) = 1$$
ដូច្នេះ $-1 \leq P \leq 1$ ។

បើ $x = z = \frac{1}{2}; y = t = -\frac{1}{2}$ នោះ $x+y+z+t = 0; x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$ ។ ហើយ $P = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ។ ដូច្នេះ $P_{\min} = -1$ ។

យើងមាន $P=(x+z)(y+t)=-(y+t)^2\le 0$ ។ បើ $x=y=1/2\,;z=t=-1/2$ នោះ $P=0$ ។ ដូច្នេះ $P_{\max}=0$ ។

ជាសរុប $P_{\min}=-1$ ឧទាហរណ៍ត្រង់ $x=z=1/2\,;y=t=-1/2$ ។

$P_{\max}=0$ ឧទាហរណ៍ត្រង់ $x=y=1/2\,;z=t=-1/2$ ។

212.▲ យើងតាង $x_1=\tan\alpha_1\,,x_2=\sec\alpha_1\tan\alpha_2$ និង

$$x_k=\sec\alpha_1\sec\alpha_2\dots\sec\alpha_{k-1}\tan\alpha_k$$

ដោយ $-\frac{\pi}{2}<\alpha_k<\frac{\pi}{2},1\le k\le n$ ។ យើងគួរកត់សំគាល់ថាការជំនួសនេះព្រោះលំដាប់របស់ $\tan\alpha$ គឺ $(-\infty,\infty)$ និង $\sec\alpha$ ខុសពីសូន្យជានិច្ច។ ដូច្នេះតួទីk របស់អង្គខាងឆ្វេងនៃវិសមភាពស្មើនឹង

$$\frac{\sec\alpha_1\dots\sec\alpha_{k-1}\tan\alpha_k}{1+\tan^2\alpha_1+\cdots+\sec^2\alpha_1\dots\sec^2\alpha_{n-1}\tan^2\alpha_n}=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_k\sin\alpha_k$$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_n\sin\alpha_n<\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow c_1s_1+c_1c_2s_2+\cdots+c_1c_2\dots c_ns_n<\sqrt{n}$$

ដែល $c_i=\cos\alpha_i$ និង $s_i=\sin\alpha_i$ ចំពោះ $1\le i\le n$ ។ ចំពោះ$2\le i\le n$ ដោយសារ $c_i^2+s_i^2=\cos^2\alpha_i+\sin^2\alpha_i=1$ យើងទាញបានថា

$$c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2s_i^2+c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2c_i^2=c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2$$

$$\Longrightarrow\ s_1^2+c_1^2s_2^2+\cdots+c_1^2s_2^2\dots c_{n-2}^2s_{n-1}^2+c_1^2s_2^2\dots c_{n-1}^2=1\quad(*)$$

តាម(*) និងតាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងទាញបាន

$$c_1s_1+c_1c_2s_2+\cdots+c_1c_2\dots c_ns_n$$

$$\le\sqrt{s_1^2+c_1^2s_2^2+\cdots+c_1^2c_2^2\dots c_{n-2}^2s_{n-1}^2+c_1^2c_2^2\dots c_{n-1}^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_{n-1}^2+c_n^2s_n^2}$$

$$=\sqrt{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_{n-1}^2+c_n^2s_n^2}$$

$$=\sqrt{\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_{n-1}+\cos^2\alpha_n\sin^2\alpha_n}\le\sqrt{n}$$

វិសមភាពចុងក្រោយ ក្លាយជាសមភាព នៅពេលដែល

$$\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=\cdots=\cos\alpha_{n-1}=\cos\alpha_n\sin\alpha_n=1$$

សមភាពនេះមិនអាចទេ ព្រោះ $\cos\alpha_n\sin\alpha_n=\frac{1}{2}\sin 2\alpha_n<1$។ ដូច្នេះ យើងមានវិសមភាពដាច់ខាត។

213.▲ តាង $a=1/x\,,b=1/y\,,c=1/z$ នោះ $a,b,c\in(0;1)$ និង $a+b+c=2$។ វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geq \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{a}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-b}{b}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geq \sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow [(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}\right)^2$$

ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត។

214.▲ ដោយចំនួនចំលាស់នៃលំដាប់ $b_1, b_2, \dots, b_n$ មានចំនួនកំនត់ (ទាំងអស់មាន $n!$ របៀប) នោះមានមួយបែបដែល S មានតំលៃធំបំផុត (ដូចគ្នា តូចបំផុត)។ តាង $i<j$ ជាសន្ទស្សន៍ពីរ, តាង σ ជាចំលាស់នៃ$\{1,2,\dots,n\}$ ហើយសន្មតថា $\sigma(i)>\sigma(j)$ ។ ដូច្នេះ$b_{\sigma(j)} \geq b_{\sigma(i)}$ ព្រោះស្វ៊ីត (b_k) កើន។ តាង σ'ជាចំលាស់នៃ$\{1,2,\dots,n\}$ ដែលដូចគ្នានឹង σ ដែរ តែខុសត្រង់ i,j ដែល $\sigma^{'}(j)=\sigma(i)$ និង $\sigma^{'}(i)=\sigma(j)$។ ដូច្នេះ

$$S_{\sigma'}-S_{\sigma}=\left(a_j-a_i\right)\left(b_{\sigma(i)}-b_{\sigma(j)}\right)$$

– បើ $a_i<a_j$ និង $b_{\sigma(j)}<b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}>S_{\sigma}$ មានន័យថា S_{σ} មិនមែនធំបំផុតទេ

– បើ $a_i=a_j$ រឺ $b_{\sigma(j)}=b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}=S_{\sigma}$

ដូច្នេះ ជំនួស σ ដោយ σ' ផលបូកមិនថយចុះទេ រឺក៏អាចធំជាងមុន។

បើ $\sigma(1)\neq 1$ ឧទាហរណ៍ $\sigma=\{3;1;2;\dots;n\}$; $\sigma(1)=3;\ \sigma(2)=1$។ យើងមានចំលាស់ σ' មួយ ដែល $\sigma^{'}(1)=1$ ឧទាហរណ៍ $\sigma'=\{1;3;2;\dots;n\}$; $\sigma'(1)=1; \sigma'(2)=3$ ដែលតួទាំងអស់ដូចគ្នានឹង σ លើកលែងតែតួទីមួយនឹងទីពីរចេញ។ តាមលក្ខណៈខាងលើ យើងទាញបាន $S_{\sigma}\leq S_{\sigma'}$ ។ មានន័យថា រៀប $\sigma=\{3;1;2;\dots;n\}$ ជា $\sigma=\{1;3;2;\dots;n\}$ យើងទាញបាន S_{σ} ធំជាងមុន។ មានន័យថាផលបូក

$$a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2+\cdots+a_nb_n \leq a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2+\cdots+a_nb_n$$

បន្ទាប់មកទៀតយើងចាប់ផ្តើម ឆ្លាស់សន្ទស្សន៍ចាប់ពីទី២ទៅ ឧទាហរណ៍ $\sigma = \{1; 3; 2; \dots ; n\}$ ។ យើងមាន $\sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$ ។ យើងមានចំលាស់ σ' មួយដែល $\sigma'(2) = 2$ ឧទាហរណ៍ $\sigma' = \{1; 2; 3; \dots ; n\}\,; \sigma'(2) = 2; \sigma'(3) = 3$ ដែលតួទាំងអស់ដូចគ្នា នឹង σ លើកលែងតែតួទីពីរនិង ទីបីចេញ។ តាមលក្ខណៈខាងលើ យើងទាញបាន $S_\sigma \le S_{\sigma'}$ ។ មានន័យថា រៀប $\sigma = \{1; 3; 2; \dots ; n\}$ ជា $\sigma = \{1; 2; 3; \dots ; n\}$ យើងទាញបាន S_σ ធំជាងមុន។ មានន័យថាផលបូក

$$a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + \cdots + a_nb_n \le a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$$

ដូចគ្នា ចំពោះ $i = 3, \dots , n - 1$ យើងទាញបាន $\sigma'(i) = i$ ដែលពេលនោះផលបូកមានតំលៃធំ ។ ដូច្នេះផលបូកមានតំលៃធំបំផុត ពេល $\sigma(i) = i$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីតូចបំផុត។

215.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_iz_i + z_i^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(-2x_iy_i + y_i^2\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(-2x_iz_i + z_i^2\right)$$

ដោយ $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ នោះវិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_iz_i$$

វិសមភាពក្រោយនេះពិត តាមវិសមភាពតំរៀប។

216.▲ មាន $x \in (0, \pi/2)$ ។ តាង $a_1 = \sin^3 x\,; a_2 = \cos^3 x$ និង $b_1 = 1/\cos x\,; b_2 = 1/\sin x$ ។ យើងឃើញថា បើ $a_1 \le a_2$ នោះ $b_1 \le b_2$ ហើយ បើ $a_1 \ge a_2$ នោះ $b_1 \ge b_2$ ។ ដូច្នេះ តាមវិសមភាពតំរៀប

$$f(x) = a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1 = \sin^3 x\frac{1}{\sin x} + \cos^3 x\frac{1}{\cos x} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងដឹងថា $f(\pi/4) = 1{,}0$ ដូច្នេះ តំលៃតូចបំផុតរបស់ f គឺស្មើ 1 ។

217.▲ ដោយវិសមភាពនេះគ្មានលក្ខណៈពិសេសចំពោះតំរៀប a,b,c យើងអាចសន្មតថា $a\geq b\geq c$ ។ ដូច្នេះ $a^2\geq b^2\geq c^2$ និង $ab\geq ac\geq bc$ ។ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$a^3+b^3+c^3=a^2a+b^2b+c^2c\geq a^2b+b^2c+c^2a$$
$$a^2b+b^2c+c^2a=(ab)a+(ac)c+(bc)b\geq(ab)c+(ac)b+(bc)a=3abc$$

218.▲ គេអោយ $n\geq 1$។ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$ មានតំលៃតូចបំផុត ពេល $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ ។

នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌបែបនេះ $(a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n)$ ហើយ ដោយសារ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលខុសគ្នាពីរៗ នោះ យើងទាញបាន $a_i\geq i$ ចំពោះគ្រប់ i ។

ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

219.▲ ❶ របៀបទីមួយ

យើងរៀប a_i តាមលំដាប់មួយដែល $a_{k(1)}\leq a_{k(2)}\leq\cdots\leq a_{k(n)}$។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a_{k(1)}}\geq\frac{1}{a_{k(2)}}\geq\cdots\geq\frac{1}{a_{k(n)}}$$

ដូច្នេះតាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}=a_1^2\frac{1}{a_2}+a_2^2\frac{1}{a_3}+\cdots+a_n^2\frac{1}{a_1}$$
$$\geq a_{k(1)}^2\frac{1}{a_{k(1)}}+a_{k(2)}^2\frac{1}{a_{k(2)}}+\cdots+a_{k(n)}^2\frac{1}{a_{k(n)}}$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

❷ របៀបទីពីរ

ចំពោះគ្រប់ $i\in\{1,2,\dots,n\}$ យើងមាន

$$\frac{a_i^2}{a_{i+1}}+a_{i+1}\geq 2a_i$$
$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}\geq 2\sum_{i=1}^{n}a_i$$

ដោយយក $a_{n+1}=a_1$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i\ \Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i$$

220.▲ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&(x^{1999}+y^{1999}+z^{1999})^2\\
&=\left[\sqrt{x^{1998}(py+qz)}.\sqrt{\frac{x^{2000}}{py+qz}}+\sqrt{y^{1998}(pz+qx)}.\sqrt{\frac{y^{2000}}{pz+qx}}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sqrt{z^{1998}(px+qy)}.\sqrt{\frac{z^{2000}}{px+qy}}\right]^2\\
&\le [x^{1998}(py+qz)+y^{1998}(pz+qx)+z^{1998}(px+qy)].\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right]\\
&=[p(x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x)+q(x^{1998}z+y^{1998}x+z^{1998}y)]\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

យើងមាន

$$x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x\le x^{1999}+y^{1999}+z^{1999} \qquad (2)$$

ព្រោះតាមវិសមភាពតំរៀប និងដោយសារ*(២)*មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x,y,z ដែលយើងអាចសន្មតថា $x\le y\le z$ បាន នោះ

$$a_1=x^{1998}\le a_2=y^{1998}\le a_3=z^{1998};$$
$$b_1=x\le b_2=y\le b_3=z$$

នោះដោយយក $b_{\sigma(i)}=\{b_2;b_3;b_1\}$ យើងទាញបាន

$$
\begin{aligned}
S_\sigma=\sum_1^3 a_ib_{\sigma(i)}&=x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x\le a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\
&=x^{1999}+y^{1999}+z^{1999}
\end{aligned}
$$

ពិត។ ដូច្នេះវិសមភាព(១)ទៅជា

$$
\begin{aligned}
&(x^{1999}+y^{1999}+z^{1999})^2\\
&\le (p+q)(x^{1999}+y^{1999}+z^{1999})\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right]\\
&\Leftrightarrow \frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\ge\frac{x^{1999}+y^{1999}+z^{1999}}{p+q}
\end{aligned}
$$

221.▲ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\
&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1\\
&\dots\\
&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}
\end{aligned}
$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$\Rightarrow$ វិសមភាពពិត។

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីស្វ៊ីត (b_n) រៀបតាមលំដាប់ច្រាសមកវិញ។

222.▲ ❶ របៀបទី១

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាព Chebyshev យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= a.\frac{1}{b+c} + b.\frac{1}{c+a} + c.\frac{1}{a+b}\\ &\geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)\\ &= \frac{1}{6}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)\\ &\geq \frac{1}{6}.3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}\frac{1}{a+b}}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

ពិត។

❷ របៀបទី២

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = a.\frac{1}{b+c} + b.\frac{1}{c+a} + c.\frac{1}{a+b}\\ &\geq a.\frac{1}{c+a} + b.\frac{1}{a+b} + c.\frac{1}{b+c}\end{aligned}$$

និង

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq a.\frac{1}{a+b} + b.\frac{1}{b+c} + c.\frac{1}{a+c}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$
$$\geq a.\frac{1}{c+a}+b.\frac{1}{a+b}+c.\frac{1}{b+c}+a.\frac{1}{a+b}+b.\frac{1}{b+c}+c.\frac{1}{a+c}=3$$
$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត។

223.▲ តាង

$$S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$$
$$x=b+c+d, y=c+d+a, z=d+a+b, t=a+b+c$$
$$x+y+z+t=3(a+b+c+d)$$

ដោយផលបូក S មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b,c,d (ឧទាហរណ៍ ជំនួស a ដោយ b និង b ដោយ a យើងទាញបាន S នៅដដែល) នោះ យើងអាចសន្មតថា $a\geq b\geq c\geq d \Longrightarrow a^n\geq b^n\geq c^n\geq d^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ និង

$$\frac{1}{x}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{z}\geq\frac{1}{t}$$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន $a^2+b^2+c^2+d^2\geq ab+bc+cd+da=1$។

តាមវិសមភាព Chebyshov យើងមាន

$$S=a^3\frac{1}{x}+b^3\frac{1}{y}+c^3\frac{1}{z}+d^3\frac{1}{t}$$
$$\geq\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

និង

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)$$
$$\geq\frac{1}{4}(1)(a+b+c+d)=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$
$$\Longrightarrow\quad S\geq\frac{1}{16}(a+b+c+d)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$
$$\geq\frac{1}{48}(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq\frac{1}{48}.4\sqrt[4]{xyzt}.4\sqrt[4]{\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}\frac{1}{t}}=\frac{1}{3}$$

224.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a\geq b\geq c$ ។ ដូច្នេះ $a^n\geq b^n\geq c^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ និង

$$\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n}{a+b}+\frac{b^n}{b+c}+\frac{c^n}{c+a}$$

និង

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n}{c+a}+\frac{b^n}{a+b}+\frac{c^n}{b+c}$$

បូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\right)$$

តាមវិសមភាព Chebyshev

$$a^n+b^n\geq\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})(a+b)\ \Longrightarrow\frac{a^n+b^n}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})$$

ដូចគ្នា

$$\frac{b^n+c^n}{b+c}\geq\frac{1}{2}(b^{n-1}+c^{n-1})$$
$$\frac{c^n+a^n}{c+a}\geq\frac{1}{2}(c^{n-1}+a^{n-1})$$
$$\Longrightarrow\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

225.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x\leq y\leq z$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{(1+y)(1+z)}\leq\frac{1}{(1+z)(1+x)}\leq\frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

តាមវិសមភាព Chebyshev យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\\&\geq\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\left[\frac{1}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{(1+z)(1+x)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right]\\&=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\frac{3+x+y+z}{(1+y)(1+z)(1+x)}\end{aligned}$$

តាង $(x+y+z)/3=a$ ។ តាមវិសមភាព Chebyshev យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{x^3+y^3+z^3}{3}&\geq\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{x+y+z}{3}.\frac{x+y+z}{3}.\frac{x+y+z}{3}\\&=\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=a^3\end{aligned}$$

និង តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$3a=x+y+z\geq3\sqrt[3]{xyz}=3$$

$$(1+y)(1+z)(1+x) \le \left[\frac{(1+y)+(1+z)+(1+x)}{3}\right]^3 = (1+a)^3$$

ដូច្នេះ

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \ge a^3 \frac{6}{(1+a)^3}$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\frac{6a^3}{(1+a)^3} \ge \frac{3}{4}$$

ដោយ $a^3 \ge 1$ នោះ

$$f(a) = \frac{6a^3}{(1+a)^3} = 6\left[1 - \frac{1}{1+a}\right]^3$$

ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^+$ ។ យើងមាន

$$f(a^3) \ge f(1) = \frac{3}{4}$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

226.▲ ❶ របៀបទីមួយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត មិនអវិជ្ជមាន គេមាន

$$\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \ge 0 \ \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពខាងលើពិត ចំពោះ $n = 2$ ។ សន្មតថា វិសមភាពខាងលើពិត រហូតដល់ $n = 2^{k-1}, k > 2$ ។ ដូច្នេះ

$$\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{k-1}}} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

តាង

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$
$$x_2 = \frac{a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}}{2^{k-1}}$$

យើងមាន

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}+\frac{a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}$$
$$\geq \sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\cdot\frac{a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}}$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{a_1a_2\ldots a_{2^{k-1}}}\cdot\sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1}\ldots a_{2^k}}} = \sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}$$
$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}$$
ដូច្នេះ វិសមភាពពិតចំពោះ គ្រប់ $n=2^k, k\geq 1$ ។ ឥលូវសន្មតថា $2^{k-1}<n<2^k$ ។ តាង
$$y_1=a_1, y_2=a_2,\ldots,y_n=a_n$$
$$y_{n+1}=y_{n+2}=\cdots=y_{2^k}=A$$
$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$
យើងមាន
$$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_{2^k}}{2^k}\geq\sqrt[2^k]{y_1y_2\ldots y_{2^k}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^k-n)A}{2^k}\geq \sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_n.A^{2^k-n}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{nA+(2^k-n)A}{2^k}\geq\sqrt[2^k]{G^nA^{2^k-n}}$$
$$\Leftrightarrow A\geq G^{\frac{n}{2^k}}A^{1-\frac{n}{2^k}}$$
$$\Leftrightarrow A^{\frac{n}{2^k}}\geq G^{\frac{n}{2^k}}$$
$$\Leftrightarrow A\geq G$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$
ដូច្នេះវិសមភាពពិតចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។

❷ របៀបទីពីរ

អនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន
$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1+\frac{1}{n}a_2+\cdots+\frac{1}{n}a_n\right)\geq\frac{1}{n}\ln a_1+\frac{1}{n}\ln a_2+\cdots+\frac{1}{n}\ln a_n=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$
$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

227.▲ តាង $a=x+y, b=y+z, c=z+x\ (x,y,z>0)$ វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$6xyz \le x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$$

វិសមភាពនេះពិត ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តមធ្យមធរណីមាត្រ សំរាប់ $x^2y, xy^2, x^2z, xz^2, y^2z, yz^2$ ។

228.▲ យើងមាន

$$(n!)^{2/n} = \left((1.2.\dots n)^{\frac{1}{n}}\right)^2 \le \left(\frac{1+2+\cdots+n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}$$

229.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$8a^2b^3c^3 \le 2a^8 + 3b^8 + 3c^8$$
$$8a^3b^2c^3 \le 3a^8 + 2b^8 + 3c^8$$
$$8a^3b^3c^2 \le 3a^8 + 3b^8 + 2c^8$$

បូកវិសមភាពអស់នេះបញ្ចូលគ្នា ហើយចែកនឹង $3a^3b^3c^3$ យើងទាញបានវិសមភាពដែលចង់បាន។

230.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$(n+k-1)x_1^n x_2 \dots x_k \le nx_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + x_k^{n+k-1}$$
$$(n+k-1)x_1 x_2^n \dots x_k \le x_1^{n+k-1} + nx_2^{n+k-1} + \cdots + x_k^{n+k-1}$$
$$\dots \quad \dots$$
$$(n+k-1)x_1 x_2 \dots x_k^n \le x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + nx_k^{n+k-1}$$

បូកវិសមភាពទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា បន្ទាប់មកចែកនឹង $(n+k-1)$ យើងទាញបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

231.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \ge n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\dots\frac{1}{x_n}}$$
$$\Rightarrow \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$$

232.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x \le y \le z$ ។ តាង

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx)$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z) - f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right)\\
&= y^2 + z^2 + y + z - 2(xy + yz + zx) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz}\\
&= (y-z)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2
\end{aligned}$$

$$= \left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left[\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2+1-2x\right]$$
$$= \left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left[y+z-2x+1+2\sqrt{yz}\right]$$
ដោយ $x \le y \le z$ នោះ $y+z-2x \ge 0 \Rightarrow f(x,y,z)-f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) \ge 0$ ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $y=z$ ។ បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា $f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) \ge 0$ ។

តាង $a=x$ និង $b=\sqrt{yz}$ ។ ដូច្នេះ $a,b>0$ និង $ab^2=1$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} f(a,b,b) &= a^2+a+2b-4ab \\ &= \frac{1}{b^4}+\frac{1}{b^2}+2b-\frac{4}{b} \\ &= \frac{1}{b^4}(2b^5-4b^3+b^2+1) \\ &= \frac{1}{b^4}(b-1)^2(2b^3+4b^2+2b+1) \ge 0 \end{aligned}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $b=1$។ ដូច្នេះ $f(x,y,z) \ge f(a,b,b) \ge 0$ ហើយស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $y=z, b=1, xyz=1 \ \Rightarrow x=y=z=1$។

233.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \ge 10\left(a^2b^2c^2d^2abacadbcbdcd\right)^{\frac{1}{10}}$$
$$= 10\left(a^5b^5c^5d^5\right)^{\frac{1}{10}} = 10$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $a=b=c=d=1$ ។

234.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+6abc+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \\ &\ge a^3+b^3+c^3+6abc+3.6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = a^3+b^3+c^3+24abc\end{aligned}$$

(តាមវិសមភាពកូស៊ី)

235.▲ ករណីអង្គខាងស្តាំនៃវិសមភាព អវិជ្ជមាន រឺ សូន្យ នោះវិសមភាពជាវិសមភាពដាច់ខាត។ ករណីអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន យើងសន្មតថា $a=\max(a,b,c)$ ។ ដូច្នេះ $a+b-c>0$ និង $c+a-b>0 \ \Rightarrow b+c-a>0$ ព្រោះអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន។ ដូច្នេះ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ។ ដូច្នេះ យើងតាង

$$a+b-c=x, b+c-a=y, c+a-b=z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ a=\dfrac{x+z}{2}, b=\dfrac{y+x}{2}, c=\dfrac{z+y}{2} \end{cases}$$

វិសមភាពទៅជា

$$(x+z)(y+x)(z+y)\geq 8xyz$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$(x+z)(y+x)(z+y)\geq 2\sqrt{xz}.2\sqrt{yx}.2\sqrt{zy}=8xyz$$

ពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាទាល់តែនិងមានតែ $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$ ។

236.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\prod_{k=1}^{n} a_k(1-a_k)=\left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]\left[\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right]\leq\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right]^n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)\right]^n=\frac{1}{n^n}.\frac{(n-1)^n}{n^n}$$
$$=\frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$$

237.▲ យើងមាន

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}=\left[b+\frac{1}{2a}\right]^2+a^2+\frac{3}{4a^2}$$
$$\geq a^2+\frac{3}{4a^2}\ \text{ស្មើគ្នាទាល់តែ}\ \mathrm{b}=-\frac{1}{2\mathrm{a}}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}\quad\text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}$$

ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a^4=3/4$ និង $b=-1/2a$ ។

238.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះ $n\geq 2$

$$\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}}<\frac{1+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{n}$$
$$=\frac{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{n}=1+\frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad\Rightarrow U_{n-1}<U_n$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n+1}}<\frac{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+1}=\frac{1+n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} < \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \frac{1}{V_{n-1}} < \frac{1}{V_n} \Rightarrow V_n < V_{n-1}$$

239.▲ យើងតាង

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2}$$

ក្នុងសំនេរបន្ទាប់មកទៀតនេះ យើងសន្មតថា $a_{n+1} = a_1; a_{n+2} = a_2; a_{n+3} = a_3; \dots$ ។

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}$$

យើងសន្មតថា $a_1 = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ។ តាង $i_1 = 1$ ។ តាង i_2 ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង a_2 និង a_3 គឺ បើ $a_2 > a_3$ យក $i_2 = 2$ និងបើ $a_3 > a_2$ យក $i_2 = 3$ ហើយបើ $a_2 = a_3$ នោះយើងយក $i_2 = 2$ ។ ដូច្នេះ $i_2 \le i_1 + 2$ ។

យើងបង្កើតស៊ីត (i_k) មួយ ដោយកំនើនដូចតទៅនេះ៖

បើ បង្កើតបាន i_k រួចហើយ តាង i_{k+1} ជាសន្ទស្សន៍នៃចំនួនធំជាងគេរវាង a_{i_k+1} និង a_{i_k+2} ដោយបើ $a_{i_k+1} = a_{i_k+2}$ យក $i_{k+1} = i_k + 1$។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ $i_{k+1} \le i_k + 2$។

ដោយ $i_1 = 1$ នោះ $i_{k+1} \le 1 + 2k$ ចំពោះគ្រប់ k ។

ដោយ $a_1 = a_{n+1} = \max(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max(a_n, a_{n+1})$ នោះ យើងមាន r ដែល $i_{r+1} = n + 1$ ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង a_n និង a_{n+1} ដែលត្រូវនឹងចំនួនធំបំផុតរវាង a_{i_r+1} និង a_{i_r+2}។ ដូច្នេះ $i_r = n - 1$ រឺ $i_r = n$ ។ ដូច្នេះ $n - 1 \le i_r \le 1 + 2(r - 1)$

$\Rightarrow r \ge n/2$ (1)

☹[*ដើម្បីពន្យល់អំនះអំនាងខាងលើ ខ្ញុំសូមដាក់ឧទាហរណ៍មួយ សន្មតថា $n = 5; a_1$ ធំជាងគេនិង $a_3 > a_2; a_4 > a_5$ ។ យើងមាន $i_1 = 1; i_2$ ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង $a_{i_1+1} = a_2$ និង $a_{i_1+2} = a_3$ ។ ដោយ $a_3 > a_2 \Rightarrow i_2 = 3; i_3$ ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង $a_{i_2+1} = a_4$ និង $a_{i_2+2} = a_5$ ។ ដោយ $a_4 > a_5$ នោះ $i_3 = 4$។ i_4 ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង $a_{i_3+1} = a_5$ និង $a_{i_3+2} = a_6 = a_1$ ។ ដោយ $a_1 > a_5$ នោះ $i_4 = 6$។ ករណីនេះយើងទាញបាន $r = 4$ ។ យើងមាន*

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_4+a_5} + \frac{a_4}{a_5+a_1} + \frac{a_5}{a_1+a_2}$$
$$> \frac{a_1}{a_2+a_3} + 0 + \frac{a_3}{a_4+a_5} + \frac{a_4}{a_5+a_1} + 0 \ge \frac{a_1}{2a_2} + \frac{a_3}{2a_4} + \frac{a_4}{2a_1} = \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \frac{a_{i_3}}{2a_{i_4}}$$

]☺

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n) \geq \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \cdots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_{r+1}}} \qquad (2)$$

$$\geq \frac{r}{2}\left(\frac{a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}}{a_{i_2}a_{i_3}\dots a_{i_{r+1}}}\right)^{\frac{r}{2}} \text{ (វិសមភាពកូស៊ី)}$$

$$= \frac{r}{2} \geq \frac{n}{4}$$

ដើម្បីអោយ $f(a_1,a_2,\dots,a_n) = n/4$ គេត្រូវតែមាន (1) និង (2) ជាសមភាព។ តែសមភាព (2) នាំអោយ $r = n$ តែសមភាពនេះ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព (1)។ ដូច្នេះ $f(a_1,a_2,\dots,a_n) > n/4$ ។

240.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geq 3\, a_i^{\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow \prod_{i=1}^{n}(2+a_i) \geq 3^n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{3}} = 3^n$$

241.▲ ❶ ដោយ a, b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន នោះគេមាន x, y ដែល $0 < x, y < 90^\circ$ ហើយដែល $\tan x = a; \tan y = b$ ។ វិសមភាពនេះពិត បើ $a = b$។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា $a \neq b$ រឺ សមមូលនឹង $x \neq y$ ។ ដូច្នេះ $1/\sqrt{1+a^2} = \cos x$; $1/\sqrt{1+b^2} = \cos y$ ។ យើងមាន

$$1 + ab = \frac{\cos x\cos y + \sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y}$$

ដូច្នេះវិសមភាពសមមូលនឹង

$$\cos x + \cos y \geq 2\sqrt{\frac{\cos x\cos y}{\cos(x-y)}} \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow \quad \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x\cos y \leq \frac{4\cos x\cos y}{\cos(x-y)}$$

ដោយ $0 < |x-y| < 90^\circ$ នោះ $0 < \cos(x-y) < 1$។ ដូច្នេះ $2\cos x\cos y \leq 2\cos x \cos y/\cos(x-y)$ ។ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\cos^2 x + \cos^2 y \leq \frac{2\cos x\cos y}{\cos(x-y)}$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y] \leq 2\cos x\cos y$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y + 2] \leq 4\cos x\cos y$$

$\Leftrightarrow\ \cos(x-y)[2\cos(x-y)\cos(x+y)+2] \le 2[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$
$\Leftrightarrow\ \cos^2(x-y)\cos(x+y) \le \cos(x+y)$
ពិត ព្រោះ $0 < a, b \le 1$ យើងមាន $0 < x, y < \frac{\pi}{4}$ ដូច្នេះ $0 < x+y < \frac{\pi}{2}$ និង $\cos(x+y) > 0$ ។

❷ យើងបំលែងវិសមភាព(*) ជា

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \ge 2\sqrt{\frac{1/2[\cos(x+y)+\cos(x-y)\,]}{\cos(x-y)}}$$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}\cos(x-y) \ge 2[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
$\Leftrightarrow [1+\cos(x+y)][1+\cos(x-y)]\cos(x-y) \ge 2[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
តាង $s=\cos(x+y)$ និង $t=\cos(x-y)$។ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$(1+s)(1+t)t \ge 2(s+t)$$

$\Leftrightarrow\ 0 \le (1+s)t^2+(s-1)t-2s = (t-1)[(1+s)t+2s]$
ដោយ $t \le 1$ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $(1+s)t+2s \le 0$
ដោយ $ab \ge 3$ នោះ $\tan x\tan y \ge 3$ វីសមមូលនឹង $\sin x\sin y \ge 3\cos x\cos y$ ។ នាំអោយ

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)] \ge \frac{3}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)] \Rightarrow t \le -2s$$

ដោយ $1+s \ge 0$ នោះ $(1+s)t \le -(1+s)2s$ ។ យើងទាញបាន $(1+s)t+2s \le -(1+s)2s+2s = -2s^2 \le 0$ ដូចដែលចង់បាន។

242.▲ ចំពោះគ្រប់ i តាង $a_i = 1/(1+x_i)$ ។ ដូច្នេះ $0 < a_i < 1, x_i = (1-a_i)/a_i$ និង $a_1+a_2+\cdots+a_{n+1} = 1$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$1-a_i = (a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+..+a_{n+1}) \ge n\,(a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_{n+1})^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1-a_i \ge n\left[\prod_{k\ne i} a_k\right]^{\frac{1}{n}}$$

ដោយអង្គទាំងពីស្មើគ្នាបើ $a_k, k\ne i$ ស្មើគ្នាទាំងអស់។ ដូច្នេះ

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) \ge n^{n+1}\left[\prod_{k\ne 1} a_k\right]^{\frac{1}{n}} \ldots \left[\prod_{k\ne n+1} a_k\right]^{\frac{1}{n}} = n^{n+1}\left[\prod_{i=1}^{n+1} a_i^n\right]^{\frac{1}{n}} = n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1} a_i$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \geq n^{n+1}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1} = 1/(n+1) \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = n$ ។

243.▲ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k, j តាង $\alpha_{k,j} = x_{j+k}/x_j$ ដែលក្នុងបណ្ដាសន្ទស្សន៍ទាំងអស់នេះ បើសន្ទស្សន៍ណាមួយ ធំជាង n យើងដក n ចេញ។ ឧទាហរណ៍ $(n+1)$ ជំនួសដោយ 1; $(n+2)$ ជំនួសដោយ 2; $(2n+1) \rightarrow n+1 \rightarrow 1$ ។ល។

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ k យើងមាន

$$\alpha_{k,1}\alpha_{k,2}\ldots\alpha_{k,n} = \frac{x_{1+k}}{x_1}\frac{x_{2+k}}{x_2}\ldots\frac{x_{n+k}}{x_n} = 1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{1+j} + x_{2+j} + \cdots + x_{n+j}$$
$$x_{n+j} = x_j$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(s-x_j)}{x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_j)}{x_j}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(x_{1+j} + x_{2+j} + \cdots + x_{n-1+j} + x_{n+j} - x_j)}{x_j}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(x_{1+j} + x_{2+j} + \cdots + x_{n-1+j})}{x_j}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\frac{x_{j+1}}{x_j} + \frac{x_{j+2}}{x_j} + \cdots + \frac{x_{j+n-1}}{x_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j\,(\alpha_{1,j} + \alpha_{2,j} + \cdots + \alpha_{n-1,j})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{1,j} + \sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{2,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{n-1,j} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{k,j}\right]$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n-1}\left[n\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\alpha_{k,j}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \sum_{k=1}^{n-1}\left[n\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}\right] = n(n-1)\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ។ ដូច្នេះ $C(n) = n(n-1)$ ។

244.▲ តាង

$$P=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right);\ Q=\frac{1}{(xyz)^{1/3}}$$

$$\Longrightarrow\quad P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3Q$$

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq 3Q^2$$

$$Q\geq\frac{3}{x+y+z}=3$$

$$\frac{1}{xyz}=Q^3$$

$$\Longrightarrow P\geq 1+3Q+3Q^2+Q^3=(1+Q)^3\geq(1+3)^3=64$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $x=y=z=1/3$ ។

245.▲ ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a,b>0$ គេមាន

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{1}{3}$$

ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $a=b$ ។

យើងមាន

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{1}{3}\iff 3(a^2-ab+b^2)\geq a^2+ab+b^2\iff a^2+b^2\geq 2ab$$

ពិត។ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $a=b$។ ■

តាង

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{x_i^9+x_j^9}{x_i^6+x_i^3x_j^3+x_j^6}$$

$$\forall i, a_i=x_i^3$$

យើងមាន $a_1a_2\dots a_n=1$ ហើយ

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_i^9+x_j^9}{x_i^6+x_i^3x_j^3+x_j^6}=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{a_i^3+a_j^3}{a_i^2+a_ia_j+a_j^2}$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}\left[(a_i+a_j)\frac{a_i^2-a_ia_j+a_j^2}{a_i^2+a_ia_j+a_j^2}\right]\ge\sum_{1\le i<j\le n}\left[(a_i+a_j)\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{1\le i<j\le n}(a_i+a_j)$$

$$=\frac{1}{3}[(a_1+a_2)+(a_1+a_3)+\cdots+(a_1+a_n)+(a_2+a_3)+(a_2+a_4)$$

$$+\cdots+(a_2+a_n)+\cdots.]=\frac{n-1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$\ge\frac{n(n-1)}{3}(a_1a_2\dots a_n)^{1/n}=\frac{n(n-1)}{3}$$

$$\Longrightarrow\ f(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge\frac{n(n-1)}{3}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ ។

246.▲ តាង

$$f(a,b,c,d)=abc+bcd+cda+dab-\frac{176}{27}abcd=bc(a+d)+ad\left[b+c-\frac{176}{27}bc\right]$$

យើងឃើញថា $f(a,b,c,d)$ជាទំនាក់ទំនងឆ្លុះ (បើគេប្តូរ a ទៅ b និង b ទៅ a ។ល។ នោះ f នៅដដែល)។

1) ករណី $b+c-\frac{176}{27}bc\le 0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$f(a,b,c,d)\le bc(a+d)\le\left[\frac{b+c+(a+d)}{3}\right]^3=\frac{1}{27}$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត។

2) ករណី $b+c-\frac{176}{27}bc>0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$f(a,b,c,d)\le bc(a+d)+\left(\frac{a+d}{2}\right)^2\left[b+c-\frac{176}{27}bc\right]=f\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)$$

ដូច្នេះ

$f(a,b,c,d)\le f\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)=f\left(b,\frac{a+d}{2},\frac{a+d}{2},c\right)$ ព្រោះ f ជាអនុគមន៍ស៊ីមេទ្រី

$$\le f\left(\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2},\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2}\right)=f\left(\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

$$\le f\left(\frac{a+d+b+c}{4},\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2},\frac{a+d+b+c}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4},\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2},\frac{1}{4}\right)$$
$$=f\left(\frac{b+c}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{a+d}{2}\right)\le f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{27}$$
$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត។

247.▲ តាង $E=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{+*}|a_1+a_2+\cdots+a_n=1\}$ និង f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ E ដោយ

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)=n^2(n-1)\prod_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}P_k(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

ដែល

$$P_k(a_1,a_2,\dots,a_n)=\frac{1}{a_k}\prod_{i=1}^{n}a_i$$

បើ សិនជាគ្រប់ a_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ នោះគេមានពីរក្នុងចំនោមនោះ ឧទាហរណ៍ a_1,a_2 ដែល $a_1<m<a_2$ ដែល $m=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n=1/n$ ។

យើងមាន

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)=(a_1+a_2)A+a_1a_2B$$

ដែល

$$A=\prod_{i=3}^{n}a_i\,;\;\; B=n^2(n-1)\prod_{i=3}^{n}a_i+\sum_{i=3}^{n}\frac{P_i(a_1,a_2,\dots,a_n)}{a_1a_2}$$

(បើ $n=2$ យើងតាង $A=1;B=n^2(n-1)$)។ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}f(m,a_1+a_2-m,\dots,a_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)&=B[m(a_1+a_2-m)-a_1a_2]\\&=B(m-a_1)(a_2-m)>0\end{aligned}$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$f(m,a_1+a_2-m,\dots,a_n)<f(m,m,\dots,a_n)<\cdots<f(m,m,\dots,m)$$

ដូច្នេះ $f(a_1,a_2,\dots,a_n)\le f(m,m,\dots,m)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a_1=a_2=\cdots=a_n=m\implies m=1/n$ ។ ចំពោះ $m=1/n$

$$f(m,m,\dots,m)=\frac{n^2(n-1)}{n^n}+n\frac{1}{n^{n-1}}=\frac{n^3}{n^n}=\frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\Longrightarrow f(a_1,a_2,\dots,a_n)\le\frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\Leftrightarrow\; n^2(n-1)\prod_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}P_k(a_1,a_2,\dots,a_n)\le\frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\Leftrightarrow n^2(n-1)a_1a_2\dots a_n + a_1a_2\dots a_n \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \le \frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\Leftrightarrow n^2(n-1) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \le \frac{1}{n^{n-3}}\frac{1}{a_1a_2\dots a_n}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1/n$ ។

248.▲ តាង $a_0 = 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ ។ យើងមាន

$$a_0 > 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 1,$$

$$\frac{a_1a_2\dots a_n(1-a_1-a_2-\cdots-a_n)}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}a_k}{\prod_{k=0}^{n}(1-a_k)}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងមាន

$$1-a_i = \left[\sum_{k=0}^{n}a_k\right]-a_i = \sum_{k\neq i}a_k \ge n\left[\prod_{k\neq i}a_k\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n}(1-a_k) \ge n^{n+1}\left[\prod_{k\neq 0}a_k\right]^{\frac{1}{n}}\left[\prod_{k\neq 1}a_k\right]^{\frac{1}{n}}\dots\left[\prod_{k\neq n}a_k\right]^{\frac{1}{n}} = n^{n+1}\prod_{k=0}^{n}a_k$$

ព្រោះ a_i និមួយៗមាន n ដង។

$$\Rightarrow \frac{\prod_{k=0}^{n}a_k}{\prod_{k=0}^{n}(1-a_k)} \le \frac{1}{n^{n+1}}$$

ពិត។ សមភាពកើតមាន ពេល $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 1/(n+1)$។

249.▲ តាមសម្មតិកម្ម $x_1; x_2$ និង $y_1; y_2$ ជាកូអរដោនេនៃចំនុចស្ថិតលើរង្វង់កាំរង្វាស់ c មានផ្ចិតនៅត្រង់គល់តំរុយ។ ដូច្នេះ $x_1 = c\cos\theta\,;\ x_2 = c\sin\theta\,; y_1 = c\cos\phi\,; y_2 = c\sin\phi$ ។ដូច្នេះ

$$S = 2 - c(\cos\theta+\sin\theta+\cos\phi+\sin\phi) + c^2(\cos\theta+\cos\phi+\sin\theta+\sin\phi)$$
$$= 2-\sqrt{2}c\left[\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)\right]+c^2\cos(\theta-\phi) \le 2+2\sqrt{2}c+c^2 = \left(\sqrt{2}+c\right)^2$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $\theta = \phi = 5\pi/4$ មានន័យថា $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = -c\sqrt{2}/2$ ។

250.▲ ❶ របៀបទី១

តាង $a = 1/x\,, b = 1/y\,, c = 1/z$ យើងទាញបាន $xyz = 1$ ។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)]\left[\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right] \geq (x+y+z)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{3}{2}$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

❷ របៀបទី២

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2(abc)^{\frac{4}{3}}}$$

តាង $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ ដែល $x, y, z > 0$ នោះ

$$\frac{1}{x^9(y^3+z^3)} + \frac{1}{y^9(z^3+x^3)} + \frac{1}{z^9(x^3+y^3)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & 2y^9z^9(z^3+x^3)(x^3+y^3) + 2x^9z^9(y^3+z^3)(x^3+y^3) + 2x^9y^9(y^3+z^3)(z^3+x^3) \\
&\geq 3x^5y^5z^5(y^3+z^3)(z^3+x^3)(x^3+y^3) \\
\Leftrightarrow\ & 2y^9z^9(x^3z^3+z^3y^3+x^6+x^3y^3) + 2x^9z^9(x^3y^3+y^6+x^3z^3+y^3z^3) \\
&+ 2x^9y^9(y^3z^3+x^3y^3+z^6+x^3z^3) \\
&\geq 3x^5y^5z^5(y^3z^3+x^3y^3+z^6+x^3z^3)(x^3+y^3) \\
\Leftrightarrow\ & 2x^3y^9z^{12} + 2y^{12}z^{12} + 2x^6y^9z^9 + 2x^3y^{12}z^9 + 2x^{12}y^3z^9 + 2x^9y^6z^9 + 2x^{12}z^{12} \\
&+ 2x^9y^3z^{12} + 2x^9y^{12}z^3 + 2x^{12}y^{12} + 2x^9y^9z^6 + 2x^{12}y^9z^3 \\
&\geq 3x^5y^5z^5(x^3y^3z^3 + y^6z^3 + x^6y^3 + x^3y^6 + x^3z^6 + y^3z^6 + x^6z^3 \\
&+ x^3y^3z^3) \\
\Leftrightarrow\ & 2(x^{12}y^{12} + y^{12}z^{12} + z^{12}x^{12}) \\
&+ 2(x^{12}y^9z^3 + x^{12}y^3z^9 + x^9y^{12}z^3 + x^9y^3z^{12} + x^3y^{12}z^9 + x^3y^9z^{12}) \\
&+ 2(x^6y^9z^9 + x^9y^6z^9 + x^9y^9z^6) \\
&\geq 3x^8y^8z^8 + 3x^5y^{11}z^8 + 3x^{11}y^8z^5 + 3x^8y^{11}z^5 + 3x^8y^5z^{11} \\
&+ 3x^5y^8z^{11} + 3x^{11}y^5z^8 + 3x^8y^8z^8
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} x^{12}y^{12} + 2\sum_{sym} x^{12}y^9z^3 + \sum_{sym} x^9y^9z^6$$
$$\geq 3(x^{11}y^8z^5 + x^{11}y^5z^8 + x^8y^{11}z^5 + x^8y^5z^{11} + x^5y^{11}z^8 + x^5y^8z^{11}$$
$$+ 6x^8y^8z^8$$
$$\Leftrightarrow \sum_{sym} x^{12}y^{12} + 2\sum_{sym} x^{12}y^9z^3 + \sum_{sym} x^9y^9z^6 \geq 3\sum_{sym} x^{11}y^8z^5 + \sum_{sym} x^8y^8z^8$$
$$\Leftrightarrow \left[\sum_{sym} x^{12}y^{12} - \sum_{sym} x^{11}y^8z^5\right] + 2\left[\sum_{sym} x^{12}y^9z^3 - \sum_{sym} x^{11}y^8z^5\right]$$
$$+ \left[\sum_{sym} x^9y^9z^6 - \sum_{sym} x^8y^8z^8\right] \geq 0$$

-យើងមាន (12,12,0) លុបលើ (11,8,5) ព្រោះ

$$12 \geq 12 \geq 0; 11 \geq 8 \geq 5$$
$$12 \geq 11; 12 + 12 \geq 11 + 8$$
$$12 + 12 + 0 = 11 + 8 + 5$$

តាមវិសមភាព Muirhead យើងទាញបាន

$$\sum_{sym} x^{12}y^{12} - \sum_{sym} x^{11}y^8z^5 \geq 0$$

-យើងមាន (12,9,3) លុបលើ (11,8,5) ព្រោះ

$$12 \geq 9 \geq 3; 11 \geq 8 \geq 5$$
$$12 \geq 11; 12 + 9 \geq 11 + 8$$
$$12 + 9 + 3 = 11 + 8 + 5$$

តាមវិសមភាព Muirhead យើងទាញបាន

$$\sum_{sym} x^{12}y^9z^3 - \sum_{sym} x^{11}y^8z^5 \geq 0$$

-យើងមាន (9,9,6) លុបលើ (8,8,8) ព្រោះ

$$9 \geq 9 \geq 6; 8 \geq 8 \geq 8$$
$$9 \geq 8; 9 + 9 \geq 8 + 8$$
$$9 + 9 + 6 = 8 + 8 + 8$$

តាមវិសមភាព Muirhead យើងទាញបាន

$$\sum_{\mathrm{sym}} x^9y^9z^6 - \sum_{\mathrm{sym}} x^8y^8z^8 \geq 0$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

251.▲ ❶ របៀបទី១

យើងតាង

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}},z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

យើងឃើញថា $x,y,z\in(0;1)$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $x+y+z\geq 1$ ។ យើងមាន

$$\frac{a^2}{8bc}=\frac{x^2}{1-x^2},\frac{b^2}{8ac}=\frac{y^2}{1-y^2},\frac{c^2}{8ac}=\frac{z^2}{1-a^2}$$
$$\Longrightarrow\frac{1}{512}=\frac{x^2}{1-x^2}\frac{y^2}{1-y^2}\frac{z^2}{1-z^2}$$
$$\Longrightarrow(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=512\,(xyz)^2$$

ឧបមាថា $1>x+y+z$ នោះ

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)>[(x+y+z)^2-x^2][(x+y+z)^2-y^2][(x+y+z)^2-z^2]$$
$$=(x+x+y+z)(y+z)(x+y+z+y)(x+z)(x+y+z+z)(x+y)$$
$$\geq 4(x^2yz)^{\frac{1}{4}}.2(yz)^{\frac{1}{2}}.4(xy^2z)^{\frac{1}{4}}.2(xz)^{\frac{1}{2}}.4(xyz^2)^{\frac{1}{4}}.2(xy)^{\frac{1}{2}}$$ (តាមវិសមភាពកូស៊ី)
$$=512(xyz)^2$$

ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ។ ដូច្នេះ $x+y+z\geq 1$ ។

❷ របៀបទី២

យើងជំនួស

$$x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c}$$

វិសមភាពទៅជា

$$xf(x^2+8yz)+yf(y^2+8zx)+zf(z^2+8xy)\geq 1$$

ដែល $f(t)=1/\sqrt{t}$។

ដោយ f ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ហើយ $x+y+z=1$ នោះដោយប្រើវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$xf(x^2+8yz)+yf(y^2+8zx)+zf(z^2+8xy)$$
$$\geq f\big(x(x^2+8yz)+y(y^2+8zx)+z(z^2+8xy)\big)$$

យើងមាន $f(1)=1$ ។ ដោយអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាត នោះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$1\geq x(x^2+8yz)+y(y^2+8zx)+z(z^2+8xy)$$

ជាការស្រេច។ ដោយ $x+y+z=1$ នោះ វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$(x+y+z)^3\geq x(x^2+8yz)+y(y^2+8zx)+z(z^2+8xy)$$
$$\Longleftrightarrow\quad 3[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2]\geq 0$$ ពិត។

❸ របៀបទី៣

តាង $x = bc/a^2\,, y = ca/b^2\,, z = ab/c^2$ នោះ $xyz = 1$។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(1+8x)(1+8y)}+\sqrt{(1+8y)(1+8z)}+\sqrt{(1+8z)(1+8x)} \ge \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}$$

$$\Leftrightarrow (1+8x)(1+8y)+(1+8y)(1+8z)+(1+8z)(1+8x) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z}\right) \ge (1+8x)(1+8y)(1+8z)$$

$$\Leftrightarrow 1+8x+8y+64xy+1+8y+8z+64yz+1+8x+8z+64xz + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z}\right) \ge (1+8x+8y+64xy)(1+8z)$$

$$\Leftrightarrow 3+16x+16y+16z+64xy+64yz+64xz + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z}\right) \ge 1+8z+8x+64xz+8y+64yz+64xy+512xyz$$

$$\Leftrightarrow 8(x+y+z)+2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z}\right)\ge 510$$

ដោយ $xyz = 1$ នោះតាមវិសមភាពកូស៊ី

$$x+y+z\ge 3$$

$$1+8x = 1+x+x+\cdots+x \ge 9\,(x^8)^{\frac{1}{9}} = 9x^{\frac{8}{9}}$$

$$1+8y = 1+y+y+\cdots+y \ge 9\,(y^8)^{\frac{1}{9}} = 9y^{\frac{8}{9}}$$

$$1+8z = 1+z+z+\cdots+z \ge 9\,(z^8)^{\frac{1}{9}} = 9z^{\frac{8}{9}}$$

$$\Longrightarrow\ (1+8x)(1+8y)(1+8z)\ge 9x^{\frac{8}{9}}.9y^{\frac{8}{9}}.9z^{\frac{8}{9}} = 729$$

$$\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z}\ge\sqrt{9x^{\frac{8}{9}}}+\sqrt{9y^{\frac{8}{9}}}+\sqrt{9z^{\frac{8}{9}}} = 3\left(x^{\frac{4}{9}}+y^{\frac{4}{9}}+z^{\frac{4}{9}}\right)$$

$$\ge 9\,\left(x^{\frac{4}{9}}y^{\frac{4}{9}}z^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{1}{3}} = 9$$

$$\Longrightarrow\ 8(x+y+z)+2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z}\right) \ge 8.3+2.\sqrt{729}.9 = 510$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត។

252.▲ តាង $a = \tan x\,, b = \tan y\,, c = \tan z$ ដែល $-\frac{\pi}{2} < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ ។ នោះ $a^2+1 = 1/\cos^2 x\,, b^2+1 = 1/\cos^2 y\,, c^2+1 = 1/\cos^2 z$ ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពដោយ $\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z$ យើងទាញបាន

$$[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2\le 1$$

យើងមាន

$$(ab+bc)\cos x\cos y\cos z=\sin x\sin y\cos z+\sin y\sin z\cos x=\sin y\sin(x+z)$$

និង

$$(ca-1)\cos x\cos y\cos z=\sin z\sin x\cos y-\cos x\cos y\cos z=-\cos y\cos(x+z)$$

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$\begin{aligned}[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2&=[\sin y\sin(x+z)-\cos y\cos(x+z)]^2\\&=\cos^2(x+y+z)\le 1\end{aligned}$$

253.▲ ❶ របៀបទី១

តាង $f(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz$ ។ តាមលក្ខណៈឆ្លុះ យើងអាចសន្មតថា $0\le x\le y\le z\le 1$ ។ ដោយ $x+y+z=1$ នោះ $x\le 1/3$ ។ ដូច្នេះ

$$f(x,y,z)=(1-3x)yz+xyz+zx+xy\ge 0$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

ដោយ $1-2x>0$ នោះ

$$f(x,y,z)=x(y+z)+yz(1-2x)\le x(1-x)+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2(1-2x)=\frac{-2x^3+x^2+1}{4}$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងត្រូវរកតំលៃធំបំផុតរបស់អនុគមន៍

$$F(x)=\frac{-2x^3+x^2+1}{4}$$

ដែល $x\in[0,1/3]$ ។ យើងមាន

$$F'(x)=\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3}-x\right)\ge 0;\ \forall x\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$$

យើងទាញបាន $F(x)\le F(1/3)=7/27\,;\ \ \forall x\in[0;1/3]$ ។

❷ របៀបទី២

យើងបំលែងវិសមភាពទៅជា

$$0\le(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz\le\frac{7}{27}(x+y+z)^3$$

យើងមាន

$$0\le(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz\ \Leftrightarrow 0\le xyz+\sum_{\text{sym}}x^2y$$

ពិត។ យើងមាន

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz \le \frac{7}{27}(x+y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow 7\sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6\sum_{\text{sym}} x^2y \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right) + 5\left(3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right) \ge 0$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \ge 0; \text{ និង } 3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \ge 0$$

ជាការគ្រប់គ្រាន់។ យើងមាន

$$\begin{aligned} 2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y &= \sum_{\text{cyclic}} (x^3+y^3) - \sum_{\text{cyclic}} (x^2y+xy^2) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} (x^3+y^3-x^2y-xy^2) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} \left(x^2(x-y)-y^2(x-y)\right) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} (x-y)^2(x+y) \ge 0 \end{aligned}$$

វិសមភាព

$$3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z) \ge 0$$

ពិត តាមវិសមភាព Schur ករណី $r=1$ ។

254. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) = 2+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y} \\ &= \left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+1\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right)-1 \\ &\ge 3\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}+\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}\right)-1 \\ &= 3\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)-1 \\ &= 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)+\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)-1 \end{aligned}$$

$$\ge 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)+3\left(\frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{xyz}}\right)-1$$
$$=2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)+2$$
$$=2\left(1+\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

255. ▲ តាង $a/b=p; b/c=q$ ។ ដូច្នេះ $d/c=a/b=p; a/d=b/c=q$ ។ យើងមាន

$$p+q+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=4 \quad (1)$$
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=pq+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}+\frac{1}{pq}=\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)$$

លក្ខខណ្ឌ a,b,c,d ជាចំនួនពិតខុសគ្នា នាំអោយ $p\neq 1; q\neq; pq\neq 1$ ។

បើ $p>0; q>0$ នោះ

$$p+\frac{1}{p}\ge 2;$$
$$q+\frac{1}{q}\ge 2$$

(1) នាំអោយ $p+1/p=2; q+1/q=2 \ \Rightarrow p=q=1$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ ដូច្នេះត្រូវមានមួយក្នុងចំនោម $p; q$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន សន្មតថា $p<0$ ។ ដូច្នេះ

$$p+\frac{1}{p}\le -2$$
$$(1)\Rightarrow q+\frac{1}{q}\ge 6;\ \left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)\le -12$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $p=-1; q+1/q=6 \Rightarrow q=3\pm 2\sqrt{2}$ ។

យក $c=1; \frac{d}{c}=p=-1 \Rightarrow d=-1$ ។ យក $q=3-2\sqrt{2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{b}{c}=q=3-2\sqrt{2}\Rightarrow b=3-2\sqrt{2}$$
$$\frac{a}{b}=-1 \ \Rightarrow a=-3+2\sqrt{2}$$

ដូច្នេះតំលៃធំបំផុតស្មើ -12 ។ តំលៃធំបំផុតនេះកើតមាន ឧទាហរណ៍នៅត្រង់ចំនុច

$$a=-3+2\sqrt{2}; b=3-2\sqrt{2}; c=1; d=-1$$

256. ▲ សន្មតថា $a\le b\le c$ ។ យើងមាន $c<a+b \ \Rightarrow 2c<a+b+c=2 \ \Rightarrow c<1$ ។

$$a^2+b^2+c^2+2abc=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+2abc$$
$$=4-2(ab+bc+ca)+2abc$$
$$2-2(1-a)(1-b)(1-c)=4-2(ab+bc+ca)+2abc$$

ដូច្នេះ $a^2+b^2+c^2+2abc=2-2(1-a)(1-b)(1-c)<2$ ព្រោះ $a<1;b<1;c<1$ ។

ដោយ $a\le b\le c<1$ នោះ $1-a,1-b,1-c$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន។ តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\ge\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$\Rightarrow(1-a)(1-b)(1-c)\le\frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow\ a^2+b^2+c^2+2abc\ge 2-\frac{2}{27}=\frac{52}{27}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a=b=c$ ។

257.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង abc យើងទាញបាន

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

តាង $x=a/b\,,y=b/c\,,z=c/a\ \Rightarrow xyz=1$ ។ ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)+xyz}\ge 1+\sqrt[3]{\frac{(x+z)(y+x)(z+y)}{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)+1}\ge 1+\sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$$

តាង $p=\sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$ ។ វិសមភាពទៅជា

$$\sqrt{p^3+1}\ge 1+p\ \Leftrightarrow p^3+1-(1+p)^2\ge 0\ \ \Leftrightarrow p(p+1)(p-2)\ge 0\ \ (*)$$

យើងមាន

$$p\ge\sqrt[3]{2\sqrt{xz}.2\sqrt{yx}.2\sqrt{zy}}=2$$

ដូច្នេះ (*) ពិត។

258.▲ ❶ យក $p=\frac{m}{m+n};q=\frac{n}{m+n}$ ដែល m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ វិសមភាព

$$pa+qb\ge a^pb^q\quad\Leftrightarrow\ \frac{ma+nb}{m+n}\ge\sqrt[m+n]{a^mb^n}$$

ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ី។

❷ យើងជ្រើសរើសស៊ីតនៃចំនួនសនិទាន $a_1, a_2, \dots, a_n, ..$ ដែល $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ ។ តាង $b_i = 1 - a_i$ យើងទាញបាន $\lim_{n\to\infty} b_n = q$ ។

តាមសំនួរទីមួយ យើងទាញបាន

$$a_n x + b_n y \geq x^{a_n} y^{b_n}$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x + b_n y \geq \lim_{n\to\infty} x^{a_n} y^{b_n} \Leftrightarrow px + qy \geq x^p y^q$$

❸ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងមាន

$$\ln(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) \geq a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n \ln x_n = \ln\left(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}\right)$$
$$\Longrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

❹ តាង

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}; v = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{a_i}{u}\right)^p + \left(\frac{1}{q}\right)\left(\frac{b_i}{v}\right)^q \geq \left[\left(\frac{a_i}{u}\right)^p\right]^{\left(\frac{1}{p}\right)} \left[\left(\frac{b_i}{v}\right)^q\right]^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{a_i}{u}\frac{b_i}{v}$$

$$\Leftrightarrow uv\left[\frac{a_i^p}{p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)} + \frac{b_i^q}{q\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)}\right] \geq a_i b_i$$

$$\Longrightarrow uv\left[\frac{|a_i|^p}{p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)} + \frac{|b_i|^q}{q\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)}\right] \geq uv\left|\frac{a_i^p}{p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)} + \frac{b_i^q}{q\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)}\right| \geq |a_i b_i|$$

$$\Longrightarrow uv\left[\frac{|a_i|^p}{p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)} + \frac{|b_i|^q}{q\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)}\right] \geq |a_i b_i|$$

$$\Longrightarrow uv\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{|a_i|^p}{p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)} + \frac{|b_i|^q}{q\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)}\right] \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$$

$$\Leftrightarrow uv\left[\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)} + \frac{\sum_{i=1}^n |b_i|^q}{q\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)}\right] \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$$

$$\Leftrightarrow uv\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right] \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \quad \Leftrightarrow uv \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាទាល់តែ $\left(\frac{a_i}{u}\right)^p = \left(\frac{b_i}{v}\right)^q$ និង $a_i b_i$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ចំពោះគ្រប់ i

$$\Rightarrow \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \Rightarrow a_i^p = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q}\ b_i^q = cb_i^q \Rightarrow \vec{u}\left(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p\right) = c\vec{v}\left(b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q\right)$$

ដូច្នេះមានន័យថា វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ កូលីនេអ៊ែរនឹង $\vec{v}$ ហើយ $a_i b_i$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ចំពោះគ្រប់ i ។ ករណីនេះយើងទាញបានសមភាព។

សំគាល់

បើ $p = q = 2$ វិសមភាពនេះ ក្លាយជាវិសមភាពកូស៊ី-ស្វាត។

259.▲ តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រ...

259.▲ តាមវិសមភាពមន-មធទូទៅ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q \geq (a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}} = ab$$

260.▲ តាង $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ និង ចំពោះ $i = 1,2,\dots,n$ តាង $w_i = 1/(iH_n)$ ។
យើងមាន $w_i > 0$ ហើយ

$$\sum_{i=1}^n w_i = \frac{1}{H_n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{H_n} H_n = 1$$

តាង $S = x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \dots + \frac{x_n^2}{n}$ ។ យើងមាន

$$\frac{S}{H_n} = \sum_{i=1}^n w_i x_i^i \geq \prod_{i=1}^n \left(x_i^i\right)^{w_i} \qquad (\text{តាមវិសមភាពមន} - \text{មធទូទៅ})$$

$$= \prod_{i=1}^n x_i^{iw_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{1/H_n} = \left[\prod_{i=1}^n x_i\right]^{1/H_n}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\prod_{i=1}^n x_i \geq \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}\right)^n = 1$$

ដូច្នេះ $\frac{S}{H_n} \geq 1$ ហើយស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$។

261.▲ តាង $q > 0$ ដែល

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (p-1)q = p$$

ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$|a_i+b_i|^p=|a_i+b_i|^{p-1}|a_i+b_i|\le |a_i||a_i+b_i|^{p-1}+|b_i||a_i+b_i|^{p-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\le \sum_{i=1}^{n}|a_i||a_i+b_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|b_i||a_i+b_i|^{p-1}$$

តាមវិសមភាព Hölder យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i||a_i+b_i|^{p-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

ដូចគ្នា

$$\sum_{i=1}^{n}|b_i||a_i+b_i|^{p-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

ដូច្នេះ

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\le\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{1-\frac{1}{q}}\le\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

យើងទាញបានសមភាពបើ (1) a_i មានសញ្ញាដូច b_i និង (2) $a_i^p=c(a_i+b_i)^p;\ \forall i$ និង (3) $b_i^p=d(a_i+b_i)^p;\ \forall i$ ។ (2) និង (3) $\Rightarrow a_i^p=\alpha b_i^p$ និង (1) $\Rightarrow a_i=\beta b_i,\beta>0$ ។ ដូច្នេះ សមភាពកើតមានពេល $\vec{u}(a_1,a_2,\dots,a_n)=\beta\,\vec{v}(b_1,b_2,\dots,b_n)$ ដែល $\beta>0$។

262.▲ តាង

$$S=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}+(y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}(y+x)^{\frac{2}{3}}}+\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}}+(z^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(z+y)^{\frac{2}{3}}}$$

$x=a^3;y=b^3;z=c^3$

តាមវិសមភាព Hölder យើងមាន

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}} = [(a^2)^3+(b^2)^3]^{\frac{1}{3}}\left[(c^2)^{\frac{3}{2}}+(a^2)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} \geq a^2c^2+b^2a^2$$
$$= (xy)^{\frac{2}{3}}+(xz)^{\frac{2}{3}}$$
$$\Longrightarrow \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+(xy)^{\frac{2}{3}}+(xz)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា

$$\frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}+(y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}(y+x)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$$
$$\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}}+(z^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(z+y)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាពបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $S \leq 1$។

263.▲ យើងមាន $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ។ តាង $s=a+b+c+d$ ។ តាមវិសមភាព Minkowski

$$S_1 = \sqrt{(a+1)^2+2(b-2)^2+(c+3)^2}+\sqrt{(b+1)^2+2(c-2)^2+(d+3)^2}$$
$$\geq \sqrt{(a+b+2)^2+2(b+c-4)^2+(c+d+6)^2}$$
$$S_2 = \sqrt{(c+1)^2+2(d-2)^2+(a+3)^2}+\sqrt{(d+1)^2+2(a-2)^2+(b+3)^2}$$
$$\geq \sqrt{(c+d+2)^2+2(d+a-4)^2+(a+b+6)^2}$$
$$S=S_1+S_2 \geq \sqrt{(s+4)^2+2(s-8)^2+(s+12)^2} = \sqrt{4s^2+288} \geq \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

ចំពោះ $a=b=c=d=0$ យើងមាន $S=12\sqrt{2}$ ។ ដូច្នេះតំលៃតូចបំផុតរបស់ S គឺ $12\sqrt{2}$ ។

264.▲ ❶ តាង $x=\tan A\,, y=\tan B\,, z=\tan C$ ដែល $0<A,B,C<\pi/2$។ លក្ខខណ្ឌសមមូលនឹង

$$\tan A+\tan B+\tan C = \tan A\tan B\tan C \implies A+B+C=\pi$$

និងដោយ

$$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \sin A$$

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

អនុគមន៍ $y=\sin x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$។ ដូច្នេះ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \leq \sin\frac{A+B+C}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

នាំអោយវិសមភាពពិត។

❷ តាង $x=\tan\frac{A}{2}; y=\tan\frac{B}{2}; z=\tan\frac{C}{2}$ ដែល $0<A,B,C<\frac{\pi}{2}$ ។ លក្ខខណ្ឌសមមូលនឹង

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1 \implies A+B+C=\pi$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$$

ពិតតាមវិសមភាពយិនសិន។

265.▲ តាង $x_n=\tan a_n$ ដែល $0<a_n<\pi/2$ ។ យើងមាន

$$x_{n+1}=\tan a_n+\sqrt{1+\tan^2 a_n}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a_n}{2}\right)$$

យើងទាញបាន $a_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6.2^{n-1}}$ ។ ដូច្នេះ $x_n=\cot\theta_n$ ដែល $\theta_n=\frac{\pi}{6.2^{n-1}}$ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $y_n=\tan 2\theta_n$ ។ ដូច្នេះ $x_n y_n=\frac{2}{1-\tan^2\theta_n}$ ។ ដោយ $0<\theta_n<\frac{\pi}{4}$ នោះយើងមាន $0<\tan^2\theta_n<1$ និង $x_n y_n>2$។ ចំពោះ $n>1$ យើងមាន $\theta_n<\pi/6$ ដូច្នេះ $\tan^2\theta_n<1/3$ និង $x_n y_n<3$ ។

266.▲ តាង T_n ជាពហុធា Chebyshev ទី n ។ យើងដឹងថា $T_n(\cos x)=\cos nx$ និង T_n កំនត់ដោយ $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), T_0(x)=1$ និង $T_1(x)=x$ ។ ដូច្នេះមេគុណធំរបស់ T_n ស្មើនឹង 2^{n-1} ចំពោះ $n\geq 1$ ។

ប្រើរូបមន្តអាំងទែរប៉ូឡាស្យុងរបស់ Lagrange ទៅលើពហុធាដឺក្រេទី $T_{n-1}(x)$ និងចំពោះចំនុច $x_1,x_2,\cdots,x_n$ យើងមាន

$$T_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-1}(x_k)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

ផ្ទឹមមេគុណធំ យើងទាញបាន

$$2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-1}(x_k)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

យើងយក θ_k ដែល $\cos\theta_k=x_k$ ។ ដូច្នេះ $|T_{n-1}(x_k)|=|\cos(n-1)\theta_k|\leq 1$ ។ ដូច្នេះ

$$2^{n-2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{|T_{n-1}(x_k)|}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_k}$$

នាំអោយវិសមភាពពិត។

267.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង 4 យើងទាញបាន

$$\left|\frac{a}{2}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

យើងជំនួស $\frac{a}{2}=\sin x$ និង $\frac{b}{2}=\sin y$ ។ វិសមភាពក្រោយនេះទៅជា

$$|\sin(x-y)|=|\sin x\cos y-\sin y\cos x|\leq\sin\frac{\pi}{6}\qquad(*)$$

យើងចង់បាន t_1 និង t_2 ដែល $\sin t_1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ និង $\sin t_2=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ។

យើងទាញបាន $\cos 2t_1=1-2\sin^2 t_1=1-\frac{8-4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$ និង $\cos 2t_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}$ ។ ព្រោះ $y=\sin x$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយពី $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ទៅ $[-1;1]$ នោះ $t_1=-\frac{\pi}{12}$ និង $t_2=\frac{5\pi}{12}$ ។

យើងចែកចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right]$ ជាចន្លោះដាច់បី ដែលនិមួយៗមានប្រវែង $\frac{\pi}{6}$ គឺ $I_1=\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right)$,$I_2=\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right)$ និង $I_3=\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{12}\right]$។ អនុគមន៍ $y=2\sin x$ អនុវត្តចំពោះចន្លោះ I_1,I_2,I_3 មានរូបភាពមួយគត់លើចន្លោះ $I_1'=\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2};2\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $I_2'=\left[2\sin\frac{\pi}{12};\sqrt{2}\right)$, $I_3'=\left[\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right]$ រៀងគ្នា។ តាមគោលការណ៍រន្ធព្រាប ចន្លោះមួយនៃ I_1',I_2',I_3' មានចំនួនពីរនៃចំនួនដែលអោយចំនួនបួន តាងដោយ a និង b។ យើងទាញបាន ចន្លោះមួយក្នុងចំនោម I_1,I_2,I_3 មានចំនួនពិត x និង y ដែល $a=2\sin x$ និង $b=2\sin y$ ។ ដោយចន្លោះ I_1,I_2,I_3 មានរង្វាស់ស្មើ $\pi/6$ ដូចគ្នា នោះ $|x-y|\leq\pi/6$ ។ យើងទាញបានវិសមភាព(*) ពិត។

268.▲ ចំពោះ $n=1$: $f(l_1x_1)\leq l_1f(x_1)$ សំនើពិត។

ចំពោះ $n=2$ វាជានិយមន័យរបស់ភាពផត។ សន្មតថាពិតរហូតដល់ n ។

យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n+1}l_kx_k=\sum_{k=1}^{n}l_kx_k+l_{n+1}x_{n+1}=(1-l_{n+1})y+l_{n+1}x_{n+1}$$

ដែល

$$y=\sum_{k=1}^{n}\frac{l_k}{1-l_{n+1}}x_k;\ \sum_{k=1}^{n}\frac{l_k}{1-l_{n+1}}=1$$

ដូច្នេះ

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} l_k x_k\right) = f\big((1-l_{n+1})y + l_{n+1}x_{n+1}\big) \le (1-l_{n+1})f(y) + l_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$= (1-l_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{1-l_{n+1}} x_k\right) + l_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$\le (1-l_{n+1})\left[\frac{l_1}{1-l_{n+1}}f(x_1) + \frac{l_2}{1-l_{n+1}}f(x_2) + \cdots + \frac{l_n}{1-l_{n+1}}f(x_n)\right]$$

$$+ l_{n+1}f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} l_k\, f(x_k)$$

269.▲ តាង $a = \tan x\,, b = \tan y\,, c = \tan z$ ។ ដូច្នេះ x, y, z ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណស្រួចមួយ។ យើងមាន

$$\cos x + \cos y + \cos z \le \frac{3}{2}$$

វិសមភាពនេះពិត តាមវិសមភាពយិនសិន។ យើងមានសមភាពពេល $a = b = c = \sqrt{3}$ ។

270.▲ អនុគមន៍ $f(x) = x^{1/3}$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $(0;+\infty)$ ។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងមាន

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{2} \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \implies a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \le \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}}(a+b)^{\frac{1}{3}}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងនាំអោយ $a = b$ ។ ដូច្នេះចំនួនថេរ M តូចបំផុត គឺ $M = \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{1}{3}}$ ។

271.▲ អនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ផតលើ $(1;+\infty)$។ ដោយ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ នោះតាមវិសមភាពយិនសិន

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) \ge f(x_1.x_1 + x_2.x_2 + \cdots + x_n.x_n)$$
$$\Leftrightarrow\ x_1\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + x_2\frac{1}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + x_n\frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{1}{\sqrt{1-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងមាន

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \ge \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$ ។

272.▲ បើ $n \ge 0$ អនុគមន៍ $f(x) = x^n$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \ge 2\left(\frac{1+\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}}{2}\right)^n = 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right)^n$$

តែថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$ នោះ

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \ge 2(2)^n = 2^{n+1}$$

បើ $n<-1$ តាង $p=-n>1$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \ge 2^{n+1} \Leftrightarrow \frac{b^p}{(a+b)^p}+\frac{a^p}{(a+b)^p} \ge \frac{1}{2^{p-1}} \Leftrightarrow \frac{a^p+b^p}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$$

អនុគមន៍ $f(x)=x^p$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន

$$\frac{a^p+b^p}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត។ យើងឃើញថា អង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពស្មើគ្នា ទាល់តែ $n \in \{0;-1\}$ និង a,b យ៉ាងម៉េចក៏បាន រឺ $n \notin \{0;-1\}$ និង $a=b$ ។

273.▲ យើងឃើញថាវិសមភាពនៅដដែល បើយើងជំនួស (a,b,c) ដោយ $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ (វិសមភាពអូម៉ូសែន)។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a+b+c=1$ (*)។

អនុគមន៍ $f(x)=1/\sqrt{x}$ ជាអនុគមន៍ផត ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន និង (*) យើងទាញបាន

$$af(a^2+\lambda bc)+bf(b^2+\lambda ca)+cf(c^2+\lambda ab) \ge f[a(a^2+\lambda bc)+b(b^2+\lambda ca)+c(c^2+\lambda ab)]$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \ge \frac{1}{\sqrt{a(a^2+\lambda bc)+b(b^2+\lambda ca)+c(c^2+\lambda ab)}}$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$a(a^2+\lambda bc)+b(b^2+\lambda ca)+c(c^2+\lambda ab) \le \frac{1+\lambda}{9}$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3\lambda abc \le \frac{1+\lambda}{9}$$

យើងមាន

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc)$$

តាម(*) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3+3\lambda abc\\&=1-3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+3(\lambda-2)abc\\&\le 1-3.6abc+3(\lambda-2)abc \ \text{(វិសមភាពកូស៊ី)}\\&=1+3(\lambda-8)abc\end{aligned}$$

$$\leq 1+3(\lambda-8)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad (\text{វិសមភាពកូស៊ី និង ដោយសារ } \lambda \geq 8)$$
$$= 1+\frac{\lambda-8}{9}=\frac{1+\lambda}{9}$$
ពិត ។ សមភាពកើតមានពេលវិសមភាពកូស៊ីទៅជាសមភាព មានន័យថា $a = b = c$ ។

274.▲ ដោយអនុគមន៍ $f(x)=x^t$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$នោះតាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^\alpha+\frac{1}{a_i^\beta}\right)^t \geq n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha+\frac{1}{a_i^\beta}\right]^t = n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^\beta}\right]^t \quad (*)$$
តែ

ក) ដោយ $\alpha \geq 1$ នោះអនុគមន៍ $f(x)=x^\alpha$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \geq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right]^\alpha = \frac{1}{n^\alpha}$$
ខ) ដោយ $\beta > 0$ នោះអនុគមន៍ $f(x)=1/x^\beta$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^\beta} \geq \left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right]^\beta = n^\beta$$
តាម (*), ក) និង ខ) យើងទាញបាន
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^\alpha+\frac{1}{a_i^\beta}\right)^t \geq n\left(\frac{1}{n^\alpha}+n^\beta\right)$$
អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ។ ដោយ $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ នោះ $a_1=a_2=\cdots=a_n=1/n$។

275.▲ អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ព្រោះ
$$f''(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{(1+e^x)^3} \geq 0$$
ចំពោះ $i=1,2,\ldots,n$ តាង $x_i=e^{y_i}$ ។ ដោយ $x_i \geq 1$ នោះ $y_i \geq 0$ ។

តាមវិសមភាពយិនសិន
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{y_i}+1} \geq \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}+1}=\frac{1}{(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}+1}$$
ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \mathrm{L} = x_n$ ។

276.▲ តាង
$$f(a)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

ដោយចាត់ទុកថា b, c ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។ យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍ផតធៀបនឹង a ដូច្នេះ តំលៃធំបំផុតរបស់វា គឺនៅត្រង់ $a = 0$ រឺ $a = 1$។ តាមវិចារដូចគ្នា យើងទាញបានថា f មានតំលៃធំបំផុតនៅត្រង់ចំនុចមួយ (រឺច្រើនជាងមួយ) ក្នុងចំនោមចំនុចទាំងប្រាំបី ដែលមាន $(a, b, c) = \{0; 0; 0\}, \{0; 0; 1\}, \{0; 1; 0\}, \{0; 1; 1\}, \{1; 0; 0\}, \{1; 1; 0\}, \{1; 0; 1\}, \{1; 1; 1\})$។ យើងពិនិត្យឃើញថា ចំពោះត្រីធាតុនិមួយៗ តំលៃរបស់អនុគមន៍ f ស្មើ 1 ។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

277.▲ អង្គខាងឆ្វេងជាអនុគមន៍ផត ចំពោះអថេរនិមួយៗ ដោយទប់អថេរផ្សេងទៀត។ វាមានតំលៃធំបំផុតនៅត្រង់ចំនុចមួយនៃបញ្ចធាតុ (a, b, c, d, e)ទាំង 32 ដែល $a, b, c, d, e \in \{p; q\}$ ។ តាង n ជាចំនួនអថេរ ដែលស្មើ p ហើយដូច្នេះអថេរចំនួន $5 - n$ ផ្សេងទៀតស្មើ q ដែល $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរកតំលៃធំបំផុតរបស់

$$f(n) = [np + (5-n)q]\left[\frac{n}{p} + \frac{5-n}{q}\right]$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
f(n) &= n^2 + (5-n)^2 + n(5-n)\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \\
&= n^2 + (5-n)^2 + n(5-n)\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2 + 2\right) \\
&= n^2 + (5-n)^2 + 2n(5-n) + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \\
&= 25 + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f(n)$ ធំបំផុត បើ

$$n(5-n) = \frac{25}{4} - \left(n - \frac{5}{2}\right)^2$$

មានតំលៃធំបំផុត មានន័យថា $n = 2$ រឺ $n = 3$ ។ ដូច្នេះ

$$f_{\max} = 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

278.▲ តាង $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ និង $a = \sqrt{2}\tan A$, $b = \sqrt{2}\tan B$ និង $c = \sqrt{2}\tan C$ ។ តាមទំនាក់ទំនង $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (2\tan^2 A+2)(2\tan^2 B+2)(2\tan^2 C+2)$$
$$\geq 9(2\tan A\tan B+2\tan B\tan C+2\tan C\tan A)$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}\geq \cos A\cos B\cos C\,(\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B)$$
យើងមាន
$$\cos(A+B+C)$$
$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C$$
$$-\sin A\sin B\cos C$$
ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា
$$\frac{4}{9}\geq \cos A\cos B\cos C\,(\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C))$$
តាង $q=\frac{A+B+C}{3}$ ។ តាមវិសមភាពកូស៊ី និង វិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន
$$\cos A\cos B\cos C\leq\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\leq\cos^3 q$$
យើងត្រូវបង្ហាញថា
$$\frac{4}{9}\geq \cos^3 q\,(\cos^3 q-\cos 3q)$$
យើងមាន
$$\cos 3q=4\cos^3 q-3\cos q\ \Rightarrow \cos^3 q-\cos 3q=3\cos q-3\cos^3 q$$
ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា
$$\frac{4}{27}\geq\cos^4 q\,(1-\cos^2 q)\qquad (*)$$
តាមវិសមភាពកូស៊ី
$$\left[\frac{\cos^2 q}{2}.\frac{\cos^2 q}{2}.(1-\cos^2 q)\right]^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{3}\left[\frac{\cos^2 q}{2}+\frac{\cos^2 q}{2}+(1-\cos^2 q)\right]=\frac{1}{3}$$
$\Rightarrow$ (*) ពិត។ សមភាពកើតមាន ទាល់តែ
$$\tan A=\tan B=\tan C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow a=b=c=1$$
279.▲ ❶ ដំនោះស្រាយទី១
តាង $a=y+z,b=z+x,c=x+y$ ។
$$a+b>c\ \Rightarrow y+z+z+x>x+y\ \Rightarrow z>0$$
ដូចគ្នា $x,y,z>0$ ។
វិសមភាពខាងលើសមមូលនឹង
$$x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z$$

ដោយវិសមភាពខាងលើអូម៉ូសែន (បើយើងជំនួស (x,y,z) ដោយ tx,ty,tz) នោះវិសមភាពនៅដដែល)នោះយើងអាចសន្មតថា $x+y+z=1$ ។ ដូច្នេះវិសមភាពសមមូលនឹង

$$yf\left(\frac{x}{y}\right)+zf\left(\frac{y}{z}\right)+xf\left(\frac{z}{x}\right) \geq 1$$

ដែល $f(t)=t^2$ ។ ដោយ f ផតលើ $\mathbb{R}$ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$yf\left(\frac{x}{y}\right)+zf\left(\frac{y}{z}\right)+xf\left(\frac{z}{x}\right) \geq f\left(y.\frac{x}{y}+z.\frac{y}{z}+x.\frac{z}{x}\right)=f(1)=1$$

❷ ដំនោះស្រាយទី២

តាង $f(a,b,c)=a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$ ។ យើងឃើញថា f មិនប្រែប្រួលទេពេលយើងធ្វើចំលាស់ស៊ីគ្លិចនៃ (a,b,c) មានន័យថា ដូរ (a,b,c) ជា (b,c,a) រឺ (c,a,b) ។ ដូច្នេះយើងអាចសន្មតថា $a=\max(a,b,c)$ (តែមិនអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$ បានទេ ព្រោះ f មិនស៊ីមេទ្រី)។ យើងទាញបាន

$$f(a,b,c)=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c) \geq 0$$

សមភាពកើតមានពេល $a=b=c$ ។

280.▲ បើគ្រប់ a_i ស្មើគ្នាទាំងអស់ នោះអនុគមន៍ M ថេរលើ $\mathbb{R}^*$ ។ ឥលូវនេះ យើងសន្មតថា បណ្ដា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ។ តាង $f(\alpha)=\ln[l_1a_1^\alpha+l_2a_2^\alpha+\cdots+l_na_n^\alpha]$ ។

យើងមាន

$$\ln M(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln[l_1a_1^\alpha+l_2a_2^\alpha+\cdots+l_na_n^\alpha]=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

យើងមាន $\lim_{\alpha\to 0} a_i^\alpha=1$ ចំពោះគ្រប់ $a_i>0$ ដូច្នេះ $\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha)=0$ ។ ម៉្យាងវិញទៀត ដោយ

$$f^{'}(\alpha)=\frac{l_1a_1^\alpha\ln a_1+l_2a_2^\alpha\ln a_2+\cdots+l_na_n^\alpha\ln a_n}{l_1a_1^\alpha+l_2a_2^\alpha+\cdots+l_na_n^\alpha}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0} f^{'}(\alpha)=\frac{l_1\ln a_1+l_2\ln a_2+\cdots+l_n\ln a_n}{l_1+l_2+\cdots+l_n}=l_1\ln a_1+l_2\ln a_2+\cdots+l_n\ln a_n$$
$$=\ln\left(a_1^{l_1}a_2^{l_2}\dots a_n^{l_n}\right)$$

តាមក្បួន អូពីតាល់ យើងទាញបាន

$$\lim_{\alpha\to 0}\ln M(\alpha)=\ln\left(a_1^{l_1}a_2^{l_2}\dots a_n^{l_n}\right) \Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0} M(\alpha)=a_1^{l_1}a_2^{l_2}\dots a_n^{l_n}$$

ដូច្នេះ ដោយយក $M(0)=a_1^{l_1}a_2^{l_2}\dots a_n^{l_n}$ យើងទាញបាន M ជាប់ត្រង់ 0 ។

ក) ករណី $\alpha>1$

អនុគមន៍ $f(x)=x^\alpha$ ផតដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះ

$$l_1a_1^{\alpha}+l_2a_2^{\alpha}+\cdots+l_na_n^{\alpha}>(l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_na_n)^{\alpha}$$

វិសមភាពនេះ ដាច់ខាត ព្រោះ បណ្ដា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ។

ដូច្នេះ

$$M(\alpha)=(l_1a_1^{\alpha}+l_2a_2^{\alpha}+\cdots+l_na_n^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}>l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_na_n=M(1)$$

១) ករណី $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

ករណីទី១: $0<\alpha<\beta$

តាង $t=\beta/\alpha>1$ ។ ចំពោះគ្រប់ $i\in\{1,\dots,n\}$ យើងតាង $b_i=a_i^{\alpha}$ ។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}l_ib_i^t\right)^{\frac{1}{t}}>\sum_{i=1}^{n}l_ib_i\ \Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}l_ia_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}>\sum_{i=1}^{n}l_ia_i^{\alpha}\ \Rightarrow M(\beta)>M(\alpha)$$

ករណីទី២: $\alpha<\beta<0$

តាង $t=\alpha/\beta>1$។ ចំពោះគ្រប់ $i\in\{1,\dots,n\}$ យើងតាង $b_i=a_i^{\beta}$។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}l_ib_i^t\right)^{\frac{1}{t}}>\sum_{i=1}^{n}l_ib_i\ \Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}l_ia_i^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}>\sum_{i=1}^{n}l_ia_i^{\beta}\ \Rightarrow M(\beta)>M(\alpha)$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}$; $\mathbb{R}^{-*}$ ហើយជាប់ត្រង់ 0 ។ ដូច្នេះ វាកើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$។

281.▲ ● ចំពោះ $\alpha>0$:

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ ។

ដូច្នេះ

$$\ln M(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln[l_1a_1^{\alpha}+l_2a_2^{\alpha}+\cdots+l_na_n^{\alpha}]=\frac{1}{\alpha}\ln\left[a_1^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}l_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right]=$$
$$\ln a_1+\frac{1}{\alpha}\ln\left[\sum_{i=1}^{n}l_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right]$$

ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន $0<\frac{a_i}{a_1}\le 1$ ។ ដូច្នេះ $0<\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\le 1$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}l_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\le\sum_{i=1}^{n}l_i=1$$
$$\ln M(\alpha)\le\ln a_1+\frac{1}{\alpha}\ln 1=\ln a_1$$
$$\Rightarrow\lim_{\alpha\to+\infty}\ln M(\alpha)=\ln a_1$$
$$\Rightarrow\lim_{\alpha\to+\infty}M(\alpha)=a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

● ចំពោះ $\alpha<0$

លើកនេះយើងសន្មតថា $a_1=\min\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$។ ដូចខាងលើ យើងមាន

$$\ln M(\alpha) = \ln a_1 + \frac{1}{\alpha}\ln\left[\sum_{i=1}^{n} l_i \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right]$$

ដែល $\frac{a_i}{a_1} \geq 1$ ចំពោះគ្រប់ i ។ ដូច្នេះ $0 < \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha} \leq 1$ ។

តាមវិចារដូចករណីខាងលើ យើងទាញបាន

$$\lim_{\alpha\to-\infty} M(\alpha) = a_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{\alpha\to+\infty} M(\alpha) = a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$
$$\lim_{\alpha\to-\infty} M(\alpha) = a_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

ហើយដោយអនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $\alpha \in \mathbb{R}$ គេមាន

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} < M(\alpha) < \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

● យក $l_1 = l_2 = \cdots = l_n = \frac{1}{n}$ យើងទាញបាន

$$M(-1) = \left[\frac{1}{n}(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1})\right]^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

$$M(0) = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$M(1) = \left[\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \cdots + \frac{1}{n}a_n\right]^{1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$M(2) = \left[\frac{1}{n}a_1^2 + \frac{1}{n}a_2^2 + \cdots + \frac{1}{n}a_n^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

282.▲ តាង $A = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ និង $A_i = A - x_i^3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} A_i$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\frac{1}{3}A_1 \geq (x_2^3 x_3^3 x_4^3)^{1/3} = x_2 x_3 x_4 = 1/x_1$$

តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$\frac{1}{3}A_i \geq \frac{1}{x_i};\ \ \forall i = 1,2,3,4$$
$$\Rightarrow A \geq \sum_{i=1}^{4} 1/x_i \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^3 \qquad \text{(តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 3 និង 1)}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \geq \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)$$

ព្រោះ

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right) \geq (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}} = 1 \quad (\text{តាមវិសមភាពកូស៊ី})$$

$$\Longrightarrow A \geq \sum_{i=1}^{4} x_i \quad (2)$$

(1) និង (2) $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\{\sum_{i=1}^{4} x_i\,; \sum_{i=1}^{4} 1/x_i\}$ ។

283.▲ បើមានចំនួនណាមួយស្មើសូន្យ ឧទាហរណ៍ $z = 0$ នោះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$8(x^6 + y^6 + 2x^3y^3) \geq 9x^3y^3$$

ពិត ហើយស្មើគ្នាពេល $x = y = z = 0$ ។

បើ $x, y, z > 0$ យើងមាន

$$9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy) \leq \frac{9}{8}(2x^2+y^2+z^2)(x^2+2y^2+z^2)(x^2+y^2+2z^2)$$

$$\leq \frac{9}{8}\left[\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{3}\right]^3 \quad (\text{តាមវិសមភាពកូស៊ី})$$

$$= 9.8\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3 \leq 9.8\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^2 \; (\text{តាម មធ្យមលំដាប់៣និង២})$$

$$= 8(x^3+y^3+z^3)^2$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $x = y = z$ ។

284.▲ អនុគមន៍ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ ជាអនុគមន៍ផត។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{n-1}} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង 1/2 យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leq \sqrt{n} \Longrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$

ពិត។

285.▲ តាង $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ។ យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{S - x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(S - x_i)\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^5}\right)^2 \quad \text{(តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត)}$$

$$= n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{5}{2}}\right)^2 \geq n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{5}{2}} \left(\text{តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់}\ \frac{5}{2}\ \text{និង}\ 2\right)$$

$$= \frac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}} \qquad (*)$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/\sqrt{n}$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$0 < \sum_{i=1}^{n}(S - x_i) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i = n(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

$$\leq n(n-1)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង 2)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{\sqrt{n}}$$

$$\Longrightarrow 0 < \sum_{i=1}^{n}(S - x_i) \leq \frac{n(n-1)}{\sqrt{n}} \qquad (**)$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/\sqrt{n}$ ។

(*) និង (**)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S - x_i}\right)\frac{n(n-1)}{\sqrt{n}} \geq \frac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S - x_i} \geq \frac{1}{n(n-1)}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/\sqrt{n}$ ។

286.▲ ដោយវិសមភាពស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងអថេរទាំងបី យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$ ដោយមិនបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅអ្វីទាំងអស់។ វិសមភាពដែលអោយ អាចសរសេរជា

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow (x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

ពិត ព្រោះតួនិមួយៗ សុទ្ធតែវិជ្ជមានទាំងអស់។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $x = y = z$ ។

287.▲ ❶ វិសមភាពខាងឆ្វេងដែលអោយមក សមមូលនឹង

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

ពិត តាមវិសមភាព Schur ករណី $r=1$ ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ $a=b=c$ ។

វិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 2\left[(ab)^{\frac{3}{2}}+(bc)^{\frac{3}{2}}+(ca)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}}(a^2b+ab^2)\geq \sum_{\text{cyclic}} 2(ab)^{\frac{3}{2}}$$

ពិតតាមវិសមភាពកូស៊ី។

❷ តាង $x=a^{2/3},y=b^{2/3},z=c^{2/3}$ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$(3-t)+t(abc)^{\frac{2}{t}}+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow (3-t)+t(xyz)^{3/t}+x^3+y^3+z^3\geq 2\left[(xy)^{\frac{3}{2}}+(yz)^{\frac{3}{2}}+(zx)^{\frac{3}{2}}\right]$$

តាមសំនួរទី❶ យើងមាន

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq 2\left[(xy)^{\frac{3}{2}}+(yz)^{\frac{3}{2}}+(zx)^{\frac{3}{2}}\right]$$

ដូច្នេះ ពេលនេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$(3-t)+t(xyz)^{\frac{3}{t}}\geq 3xyz$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-t}{3}.1+\frac{t}{3}(xyz)^{\frac{3}{t}}\geq 1^{\frac{3-t}{3}}.\left[(xyz)^{\frac{3}{t}}\right]^{\frac{t}{3}}=xyz$$

ពិត តាមវិសមភាពមធ-មធទូទៅ។ យើងឃើញថាអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b=c=1$ ។

❸ ចំពោះ $t=\frac{1}{2};1;2$ យើងមាន

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(abc)^4+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$
$$2+(abc)^2+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$
$$1+2abc+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$

288.▲ ❶ យើងមាន

$$\frac{1}{a}-\frac{b+c}{a^2+bc}=\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}$$
$$\frac{1}{b}-\frac{c+a}{b^2+ca}=\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}$$
$$\frac{1}{c}-\frac{a+b}{c^2+ab}=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}$$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}\geq 0 \quad (*)$$

វិសមភាពខាងលើស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b,c ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a\leq b\leq c$។ ដូច្នេះ

$$\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}\geq 0$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $c=a$ ឬ $c=b$ ។

បន្ទាប់មកទៀត

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}=\frac{(b-a)^2(a+b)}{ab(a^2+bc)(b^2+ca)}[a(c-b)+cb]\geq 0$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b$ ។

ដូច្នេះវិសមភាព(*) ពិត ដោយ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b=c$ ។

❷ តាមវិសមភាព Schur ចំពោះ $r=-1$ និង តាង $x=a+b,y=b+c$ និង $z=c+a$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}0&\leq\frac{1}{x}(x-y)(x-z)+\frac{1}{y}(y-z)(y-x)+\frac{1}{z}(z-x)(z-y)\\&=\frac{(a-c)(b-c)}{a+b}+\frac{(b-a)(c-a)}{b+c}+\frac{(c-b)(a-b)}{c+a}\\&=\frac{c^2+ab}{a+b}-c+\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b\\&\Longrightarrow\ \frac{c^2+ab}{a+b}+\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}\geq a+b+c\end{aligned}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x=y=z$ ឬ $a=b=c$ ។

289.▲ ❶ យើងអាចសន្មតថា $a_1\geq a_2; b_1\geq b_2; a_1\geq b_1$ ដោយមិនធ្វើអោយបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅទេ។ បើ x ឬ y ស្មើសូន្យ នោះវិសមភាពពិត។ ដូច្នេះ សន្មតថា x និង y មិនសូន្យទាំងពីរ។ បន្ទាប់មកទៀត វិសមភាពស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x,y ដូច្នេះ សន្មតថា $x\geq y$ ។ដោយ $a_1+a_2=b_1+b_2$ នោះ

$$\begin{aligned}&a_1-a_2=(b_1-a_2)+(b_2-a_2)\\&\Longrightarrow x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}-x^{b_1}y^{b_2}-x^{b_2}y^{b_1}\\&\qquad=x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-a_2}+y^{a_1-a_2}-x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2}-x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}\right)\\&=x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{b_1-a_2}-y^{b_1-a_2}\right)\left(x^{b_2-a_2}-y^{b_2-a_2}\right)\\&=x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-b_2}-y^{a_1-b_2}\right)\left(x^{a_1-b_1}-y^{a_1-b_1}\right)\\&=x^{a_2}y^{a_2}y^{a_1-a_2}\ \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_2}-1\right]\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_1}-1\right]\geq 0\end{aligned}$$

ពិត។

❷ ក) ករណី $b_1 \geq a_2$

ដោយ $a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1$ និង $a_1 \geq b_1$ នោះ $a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1) \Longrightarrow \max(a_1, a_2) = a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b, b_1)$ ។ យើងមាន $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$ និង $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$ ។

$$\Longrightarrow \max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3)$$

តាមសំនួរទី១ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3}(x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1}) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3}\left(x^{a_1+a_2-b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1+a_2-b_1}\right) \\
&= \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{a_1+a_2-b_1} z^{a_3} \\
&= \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1}\left(y^{a_1+a_2-b_1} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_1+a_2-b_1}\right) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1}\left(y^{b_2} z^{b_3} + y^{b_3} z^{b_2}\right) \\
&= \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}
\end{aligned}$$

ខ) ករណី $b_1 \leq a_2$

ដោយ $3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3$ នោះ

$$\begin{gathered}
b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1 \\
a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1
\end{gathered}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{gathered}
\max(a_2, a_3) \geq \max(b_1, a_2 + a_3 - b_1) \\
\max(a_1, a_2 + a_3 - b_1) \geq \max(b_2, b_3)
\end{gathered}$$

តាមសំនួរទី១ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}(y^{a_2} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_2}) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{b_1} z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1} z^{b_1}\right) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{a_1} z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1} z^{a_1}\right) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{b_2} z^{b_3} + x^{b_3} z^{b_2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$$

សមភាពកើតមាន ទាល់តែ និង មានតែ $x = y = z$ ។

290.▲ វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{b+c+(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{c+a+(abc)^{\frac{1}{3}}} \le \frac{1}{(abc)^{\frac{1}{3}}}$$

តាង $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ ដែល $x, y, z > 0$ ។ វិសមភាពទៅជា

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{z^3+x^3+xyz} \le \frac{1}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow xyz \sum_{\text{cyclic}} (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)$$

$$\le (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)(z^3+x^3+xyz)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} x^6 y^3 \ge \sum_{\text{sym}} x^5 y^2 z^2$$

ពិតតាមវិសមភាព Muirhead ព្រោះស្វ៊ីត (6,3,0) លប់លើស្វ៊ីត (5,2,2) ។

291.▲ យើងមាន

$$\sum_{\text{sym}} a^3 = 6(a^3+b^3+c^3+d^3)$$

$$\sum_{\text{sym}} ab\sqrt{cd} = 4\left(ab\sqrt{cd} + ac\sqrt{bd} + ad\sqrt{bc} + bc\sqrt{da} + bd\sqrt{ca} + cd\sqrt{ab}\right)$$

ដូច្នេះវិសមភាព សមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \ge \sum_{\text{sym}} ab\sqrt{cd} \quad \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} a^3 b^0 c^0 d^0 \ge \sum_{\text{sym}} a^1 b^1 c^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}$$

ពិត តាមវិសមភាព Muirhead ព្រោះ (3,0,0,0) លប់លើ $\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ។

292.▲ វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$4\sum_{\text{sym}} x^5 y + 2\sum_{\text{cyclic}} x^4 yz + 6x^2y^2z^2 - \sum_{\text{sym}} x^4 y^2 - 6\sum_{\text{cyclic}} x^3 y^3 - 2\sum_{\text{sym}} x^3 y^2 z \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{\text{sym}} x^5 y - \sum_{\text{sym}} x^4 y^2\right] + 3\left[\sum_{\text{sym}} x^5 y - \sum_{\text{sym}} x^3 y^3\right] + 2xyz\left[3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2 y\right]$$

$$\ge 0$$

តាមវិសមភាព Muirhead

$$\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^4y^2 \geq 0$$
$$\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^3y^3 \geq 0$$

តាមវិសមភាព Schur ចំពោះ $r = 1$

$$\sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x(x^2 - xz - xy + yz) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} (\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2\mathrm{z} - \mathrm{x}^2\mathrm{y} + \mathrm{xyz}) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{cyclic}} (x^2z + x^2y) + \sum_{\text{cyclic}} xyz \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y + 3\mathrm{xyz} \geq 0$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត ព្រោះអង្គខាងឆ្វេងជាផលបូកនៃតួមិនអវិជ្ជមាន។

293.▲ ដោយ $xy + yz + zx = 1$ យើងបំលែងវិសមភាពអោយទៅជាអូម៉ូសែន

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 4\sum_{\text{sym}} x^5y + \sum_{\text{sym}} x^4yz + 14\sum_{\text{sym}} x^3y^2z + 38x^2y^2z^2 \geq \sum_{\text{sym}} x^4y^2 + 3\sum_{\text{sym}} x^3y^3$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^4y^2\right]}_{\geq 0} + 3\left[\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^3y^3\right] + xyz\left[\sum_{\text{sym}} x^3 + 14\sum_{\text{sym}} x^2y + 38xyz\right]$$

តាមវិសមភាព Muirhead វិសមភាពខាងលើពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $x = y, z = 0$ រឺ $y = z, x = 0$ រឺ $z = x, y = 0$ ។ តែដោយ $xy + yz + zx = 1$ នោះ វាស្មើគ្នាពេល $(x, y, z) = \{(1,1,0); (1,0,1), (0,1,1)\}$ ។

294.▲ យើងមាន

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$$
$$=\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^3b^3+\frac{1}{2}a^2b^2c^2+\frac{1}{2}a^4bc+2a^3b^2c+a^4b^2\right]$$

ហើយ

$$(ab+bc+ca)^3=\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^3b^3+a^2b^2c^2+3a^3b^2c\right]$$

ដូច្នេះ

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)-(ab+bc+ca)^3$$
$$=\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^4bc+a^4b^2-\frac{1}{2}a^2b^2c^2-a^3b^2c\right]$$

តែថា ស្វ៊ីត (4,2,0) និង (4,1,1) លប់ស្វ៊ីត(2,2,2) និង (3,2,1) ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាព Muirhead

$$\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^4bc+a^4b^2-\frac{1}{2}a^2b^2c^2-a^3b^2c\right]\geq 0$$

295.▲ យើងមាន

$$(xy+yz+zx)[(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2]$$
$$=\sum_{\text{sym}}\left(x^5y+2x^4y^2+\frac{5}{2}x^4yz+\frac{3}{2}x^3y^3+13x^3y^2z+4x^2y^2z^2\right)$$

និង

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=\sum_{\text{sym}}\left(x^4y^2+x^4yz+x^3y^3+6x^3y^2z+\frac{5}{3}x^2y^2z^2\right)$$

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}(4x^5y+x^4yz+x^2y^2z^2-x^4y^2-3x^3y^3-2x^3y^2z)\geq 0 \quad (*)$$

តែស្វ៊ីត (5,1,0) លប់លើស្វ៊ីត (4,2,0) និង ស្វ៊ីត (3,3,0) ដូច្នេះតាមវិសមភាព Muirhead

$$\sum_{\text{sym}}(4x^5y-x^4y^2-3x^3y^3)\geq 0 \qquad (**)$$

ម៉្យាងវិញទៀត តាមវិសមភាព Schur ចំពោះ $r=1$ យើងមាន

$$\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}xyz-x^2y\right)\geq 0$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2xyz$ វិសមភាពនេះទៅជា

$$\sum_{\text{sym}}(x^4yz+x^2y^2z^2-2x^3y^2z)\geq 0 \qquad (***)$$

បូក(**) និង (***) យើងទាញបាន (*)ពិត។ សមភាពកើតមានពេល $x=y=z$ ។

296.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}(b+c-a)^2&[(c+a)^2+b^2][(a+b)^2+c^2]+(c+a-b)^2[(b+c)+a^2][(a+b)^2+c^2]\\&+(a+b-c)^2[(b+c)^2+a^2][(c+a)^2+b^2]\\&=\sum_{\text{sym}}\left[\frac{3}{2}a^6+2a^5b+a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3+3a^2b^2c^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(b+c)^2+a^2][(c+a)^2+b^2][(a+b)^2+c^2]\\=\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^6+2a^5b+3a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3+8a^3b^2c+\frac{7}{3}a^2b^2c^2\right]\end{aligned}$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}(3a^6+2a^5b-2a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3-12a^3b^2c+4a^2b^2c^2)\geq 0 \quad (1)$$

តែតាមវិសមភាព Schur

$$\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}abc-a^2b\right]\geq 0 \quad (2)$$

ដោយគុណអង្គនិមួយៗនៃ (2) នឹង $4abc$ យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}}(4a^4bc-8a^3b^2a+4a^2b^2c^2)\geq 0 \quad (3)$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\sum_{\text{sym}}(3a^6+2a^5b-2a^4b^2-a^4b^2+2a^3b^3-4a^3b^2c)\geq 0 \quad (4)$$

តែស៊ីុត (6,0,0) លប់លើស៊ីុត (4,1,1) និង ស៊ីុត (3,2,1) ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}(3a^6-a^4bc-2a^3b^2c)\geq 0 \quad (5)$$

បន្ទាប់មកទៀតស៊ីុត (5,1,0) លប់លើស៊ីុត (4,2,0) ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}(2a^5b-2a^4b^2)\geq 0 \quad (6)$$

ហើយជាចុងក្រោយ ស៊ីុត(3,3,0) លប់លើស៊ីុត (3,2,1) ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}(2a^3b^3-2a^3b^2c)\geq 0 \quad (7)$$

ដោយបូក (5), (6) និង (7) យើងទាញបាន (4)។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a=b=c$ ។

VI. វិសមីការ

297. $(-3;2)\cup(4;\infty)$. **298.** $(-\infty;-2]\cup\{-1\}$. **299.**$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **300.**$(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$. **301.**$(-5;-1)$. **302.**$(-\infty;-\sqrt{3})\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(\sqrt{3};\infty)$. **303.**$(2-4/\sqrt{3};1)\cup(3;2+4/\sqrt{3})$. **304.**$(-\infty;\infty)$. **305.**$\left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2};\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right)$.

306.$\left(-1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}};1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right)$.▲ វិសមីការនេះសមមូលនឹង $p(x)=x^4-4x^3-6x^2-4x+1<0$ ។ យើងកំនត់ x ដែល $p(x)=0$ ។ ដោយ $x=0$ មិនមែនជាឫសនៃពហុធានេះ ដូច្នេះយើងចែក$p(x)=0$ នឹង x យើងទាញបាន $x^2+1/x^2-4(x+1/x)-6=0$ ។ តាង $y=x+1/x$ យើងទាញបាន $y^2-4y-8=0$ ។ ដូច្នេះ $y_1=2(1+\sqrt{3})$ និង $y_1=2(1-\sqrt{3})$។ ដូច្នេះពហុធា$p(x)$ អាចសរសេរជា $p(x)=(x^2-2(1+\sqrt{3})x+1)(x^2-2(1-\sqrt{3})x+1)$។ ដោយ $x^2-2(1-\sqrt{3})x+1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដូច្នេះវិសមីការសមមូលនឹង $x^2-2(1+\sqrt{3})x+1<0$។

. **307.** $\left(-1-\sqrt{3};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{3}-1;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.● **តាង** $y=x-2/x$. **308.**$(-2;0)\cup(2;\infty)$. **309.**$(-1;2)$. **310.**$(-\infty;-1)\cup(0;1/2]\cup(1;2)$. **311.**$(-1;5/8)\cup(2;7/3)\cup(3;\infty)$. **312.** $(-2;-1)\cup[0;1]\cup[2;\infty)$. **313.**$(-7;-\sqrt{37})\cup(-5;0)\cup(5;\sqrt{37})\cup(7;\infty)$.

314. $(-1;0)$. **315.** $(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(2;3)\cup(4;6)\cup(7;\infty)$. **316.** $(-\infty;1)\cup(3/2;5/2)\cup(7/2;4)$. **317.**$(-1/2;1)$. **318.**$[-2;1]$. **319.**$(0;1/3)\cup(0;\infty)$. **320.**$\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$. **321.**$(-\infty;-6)\cup\left(\frac{6-6\sqrt{26}}{5};-4\right)\cup(-4;0)\cup\left(6;\frac{6+6\sqrt{26}}{5}\right)$. **322.**$[0;\sqrt{2}]$. **323.**$[-1-2\sqrt{2};-3)\cup(1;3]$. **324.**$\{-1\}\cup[2;\infty)$. **325.**$[0{,}5;2]$. **326.**$[-\sqrt{3};0)\cup(0;2]$. **327.**$[-0{,}5;\infty)$ **ចំពោះ** $a\in[1;\infty)$; $\left[-0{,}5;-0{,}5\left(1-\frac{1}{(1-a)^2}\right)\right)$ **ចំពោះ** $a\in(-\infty;1)$. **328.**$[1;3]$. **329.**$[-2;\infty)$ **ចំពោះ** $a\in[-2;\infty)$; $\emptyset$ **ចំពោះ** $a\in(-\infty;-2)$. **330.**$\left(-\frac{5}{8};2{,}4\right]$. **331.**$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$. **332.**$(3;4{,}8]$. **333.**$(1;2/\sqrt{3}]$. **334.**$\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2};1\right]$. **335.**$[3;12)$. **336.**$[-2;\infty)$.

337.$\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\infty\right)$. **338.**$\left(\frac{8}{3};\infty\right)$. **339.**$\left[2;\frac{2}{3}\sqrt{21}\right)$. **340.**$[3/2;2)\cup(2;26)$. **341.**$(-2;1)\cup(1;\infty)$. **342.**$[0;1/2)$. **343.**$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$.

344.$[-4;0)\cup(4;6)$.▲ លក្ខខណ្ឌរបស់វិសមីការ $24+2x-x^2\geq 0$ និង $x\neq 0$ នាំអោយយើងទាញបានចន្លោះពីរ $[-4;0)$ និង $(0;6]$។ យើងឃើញថា $x\in[-4;0)$ ជាចំលើយរបស់វិសមីការ ព្រោះអង្គខាងឆ្វេងអវិជ្ជមាន ដែលតូចជាង១ជានិច្ច។ ចំពោះចន្លោះទីពីរ យើងទាញបាន $\sqrt{24+2x-x^2}<x$។ .

345.$\left[-1;-\frac{3}{4}\right]$.▲ តាង $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$ ។ យើងទាញបាន $y^2-3y+2<0$។ ដូច្នេះ $1<y<2$ សមមូលនឹង

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}>1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}<2\\ x\geq -1\end{cases}$$

យើងពិនិត្យវិសមីការទីមួយ។ វាសមមូលនឹង $2\sqrt{x^2+4x+3}>-3-2x$ ។ អង្គខាងស្តាំអវិជ្ជមានបើ $x\geq -1$ ។ ដូច្នេះ $x\in[-1;\infty)$ ជាចំលើយរបស់វិសមីការ។ លើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការទីពីរជាការេ សំរួលរួចហើយ យើងទាញបាន $\sqrt{x^2+4x+3}<-x$ ។ វិសមីការនេះមានចំលើយទាល់តែ $-1\leq x\leq 0$ (ដោយគិតលក្ខខណ្ឌវិសមីការទីមួយចូល)។ លើអង្គទាំងពីរជាការេ យើងទាញបាន $4x+3<0$។.

346.▲ យើងមាន

$$P(x)=(x-1)x(x^4(x^2+x+1)+1)+1 \qquad (1)$$

រឺ

$$P(x)=(1-x)+x^2(1-x^3)+x^8 \qquad (2)$$

តាម(១) យើងមាន $P(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty;0]\cup[1;\infty)$ ហើយតាម(២) យើងមាន $P(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0;1)$ ។ ដូច្នេះ $P(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

347.▲ អនុគមន៍ $f(x)=P(x)/Q(x)$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ x លើកលែងតែចំចំនុច $x_k,k\in\mathbb{N},k\leq n$ ដែលជាចំនុចសូន្យរបស់ពហុធា $Q(x)$ ។ សន្មតថា x_0 ជាចំលើយមួយរបស់វិសមីការ $f(x)>0$ ។ ដូច្នេះ $P(x_0)$ និង $Q(x_0)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ដូច្នេះ $\phi(x_0)=P(x_0)Q(x_0)>0$ មានន័យថា x_0 ក៏ជារឺសនៃ$\phi(x)=P(x)Q(x)>0$ ។ ចំពោះ $x=x_k$ យើងមាន $\phi(x_k)=0$។ ដូច្នេះ x_k មិនមែនជារឺសនៃ $\phi(x)$ ទេ។ ដូច្នេះរឺសទាំងអស់របស់ $f(x)>0$ ក៏ជារឺសរបស់ $\phi(x)>0$ ដែរ ។ យើងស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាថា រឺសរបស់ $\phi(x)>0$ ក៏ជារឺសរបស់$f(x)>0$ ដែរ។ បើ$P(x)$ និង $Q(x)$ មានតំលៃ

មានសញ្ញាផ្សេងគ្នា ចំពោះតំលៃx ស្ថិតក្នុងដែនកំនត់របស់$f(x)$ នោះវិសមភាព $f(x) > 0$ និង $\phi(x) > 0$ គ្មានរឹស។ ដូច្នេះវិសមីការទាំងពីរសមមូលគ្នា។.

348. $a < 0$.

349. $\left[-\frac{1}{2};\frac{45}{8}\right) \setminus \{0\}$▲ អង្គខាងឆ្វេងកំនត់បើ $x \geq -\frac{1}{2}$ និង $x \neq 0$ ។ យើងមាន $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} = \left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2$។ ដោយអនុគមន៍ $f(x) = \left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2 - 2x - 9 = 2\sqrt{1+2x} - 7$ កើន ហើយដោយ $f(45/8) = 0$ នោះ វិសមីការមានរឹស $-\frac{1}{2} \leq x < 45/8$ និង $x \neq 0$ ។

350. $\left[-1; 1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right)$.▲ យើងមាន $f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$ មានន័យចំពោះ $-1 \leq x \leq 3$ ហើយជាអនុគមន៍ថយ ហើយជាប់នៅលើចន្លោះនេះ។ យើងមាន $f(-1) = 2 > \frac{1}{2}$ និង $f\left(1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right) = \frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះវិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$ ។

351. ▲ លក្ខខណ្ឌ

$$\begin{cases} 2x+4 \geq \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$$

ដោយអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការវិជ្ជមាន នោះលើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការជាការេ យើងទាញបាន

$$9x^2 + 16 \geq 4(2x+4) + 16(2-x) + 16\sqrt{(2x+4)(2-x)}$$
$$9x^2 + 16 \geq -8x + 48 + 16\sqrt{-2x^2+8}$$
$$9x^2 + 8x - 32 - 8\sqrt{-8x^2+32} \geq 0 \qquad (1)$$

តាង $t = \sqrt{-8x^2+32} \geq 0; t^2 = -8x^2 + 32$ ។ វិសមីការសមមូលនឹង

$$-t^2 - 8t + x^2 + 8x \geq 0 \qquad (2)$$

យើងមាន $g(t) = -t^2 - 8t + x^2 + 8x$ មាន $\Delta = 16 + (x^2+8x) = (x+4)^2$ ។ ដូច្នេះ $g(t)$ មានរឹស

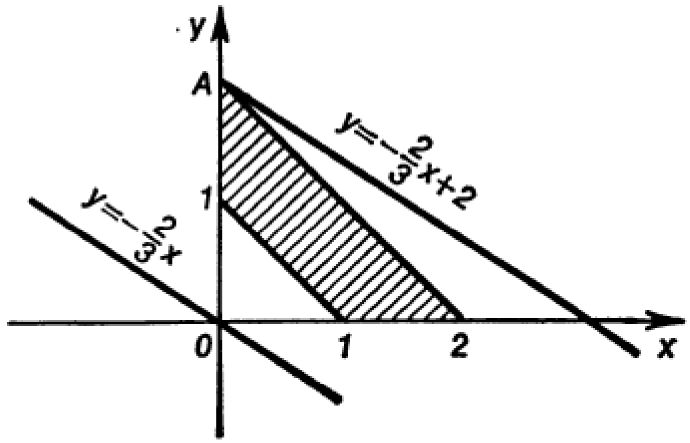
$$t_1 = x; t_2 = -x - 8$$

វិសមីការ(២) សមមូលនឹង $\min(t_1; t_2) \leq t \leq \max(t_1; t_2)$ ។ យើងមាន $t_1 - t_2 = 2x + 8$ ដោយ $-2 \leq x \leq 2$ នោះ $2x + 8 > 0$ ។ ដូច្នេះ

$$-x - 8 \leq t \leq x \quad \Leftrightarrow t \leq x$$
$$\sqrt{-8x^2+32} \leq x \quad \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq \frac{32}{9} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{4\sqrt{2}}{3} \leq x \leq 2$$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

352. $(0;2)$▲ ចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធស្ថិតនៅក្នុងផ្ទៃឆូត។ យើងសង់បន្ទាត់ $2x+3y=0$។ យើងចង់បានតំលៃធំបំផុតនៃ $z=2x+3y$ ។ ចំពោះតំលៃផ្សេងគ្នានៃ z យើងគូសបានបន្ទាត់ស្របនឹងបន្ទាត់ $2x+3y=0$។ នៅពេលដែល z កាន់តែធំទៅៗ បន្ទាត់ត្រូវនឹងតំលៃz ទាំងនោះឃ្លាតកាន់តែឆ្ងាយពីគល់តំរុយ។ ដូច្នេះ z ធំបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធជាតំលៃ z នៅពេលដែលបន្ទាត់ $z=2x+3y$ កាត់តាមA។



353. $\{(3;1)\}$. **354.** $a=-1$. ចំនុចចង់បានគឺ $(0;-1)$។ **355.** $\left\{\left(3;\frac{7}{2}\right);\left(-3;-\frac{7}{2}\right)\right\}$. **356.**$\{1\}$.

357. ▲ សមីការទី៣ នាំអោយ $4\le x\le 7$ ។ តាង $u=y+z; v=yz$ ។ សមីការ(១)និង(២) ទៅជា

$$\begin{cases}x^3+x^2(13-u)+x(2u-2v-26)+5v-7u+30=0\\ x^3+x^2(17-u)-x(2u+2v-26)-3v+u-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}u(-x^2+2x-7)+v(-2x+5)+x^3+13x^2-26x+30=0 & (4)\\ u(-x^2-2x+1)+v(-2x-3)+x^3+17x^2+26x-2=0 & (5)\end{cases}$$

យកសមីការទី(៤)ដកទី(៥) យើងទាញបាន

$$u(4x-8)+8v-4x^2-52x+32=0$$
$$\Rightarrow\quad v=\frac{1}{2}[u(2-x)+x^2+13x-8]$$

ជំនួសចូលសមីការទី(៤) យើងទាញបាន

$$2u(-x^2+2x-7)+(-2x+5)(u(2-x)+x^2+13x-8)+2x^3+26x^2-52x+60=0$$
$$\Rightarrow\quad u(-5x-4)+29x+5x^2+20=0$$
$$\Rightarrow\quad u(5x+4)=(5x+4)(x+5)$$

ដោយ $4 \leq x \leq 7$ នោះ $5x+4 \neq 0$ ដូច្នេះ $u = x+5$ ។ យើងទាញបាន $v = 5x+1$ ។ ដូច្នេះ

$$y+z = x+5; yz = 5x+1$$

ដូច្នេះ y, z ជាឫសនៃសមីការ $t^2-(x+5)t+5x+1=0$ ។ សមីការនេះមានឫសបើ ឌីសគ្រីសមីណង់

$$\Delta = (x-3)(x-7) \geq 0$$
$$\Rightarrow x \leq 3 \quad \text{ឬ} \quad x \geq 7$$

តែ $4 \leq x \leq 7$ ដូច្នេះ $x = 7$ ។ យើងទាញបាន $y = z = 6$ ។

358. ▲ គុណវិសមីការទីមួយនឹង (-2) រួចបូកចូលវិសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$(x+3y)^2 \leq -\frac{4}{a+1} \qquad (1)$$

ពី(១) យើងទាញបាន $-\frac{4}{a+1} > 0 \Rightarrow a < -1$ ។

យើងមាន $\frac{1-a}{a+1} + 1 = \frac{2}{a+1} < 0 \Rightarrow \frac{1-a}{a+1} < -1$ ។ ពិនិត្យប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 = -1 & (4) \\ 3x^2+10xy-5y^2 = -2 & (5) \end{cases}$$

ដោយ $\frac{1-a}{a+1} < -1$ នោះ បើ (4)និង(៥) មានឫស នោះប្រព័ន្ធវិសមីការក៏មានឫសដែរ។ គុណសមីការទី៤ នឹង(-2) បូកចូលសមីការទី៥ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 = -1 & (4) \\ (x+3y)^2 = 0 & (5) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y^2 = \frac{1}{y} \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធនេះមានឫស។ ដូច្នេះ $a < -1$ ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានឫស។

២. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល-លោការីត

I. គណនា

359. 9. **360.** $\ln 3$. **361.** $\ln|a|$. **362.** $4\log_a|b|$.

363. 3. **364.** 2. **365.** 1 **366.** 2.

367. 0 ▲ $a^{\sqrt{\log_a b}} = \left(a^{\sqrt{\log_a b}}\right)^{1/\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$, ដូច្នេះផលសងស្មើសូន្យ។

368. $3(1-c-d)$; **369.** $\frac{5-d}{2(c-2d+cd+1)}$;

370. $5c-6d-4$.▲ យើងមាន $0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40} = 7/(2^2.10)$.។ ដូច្នេះ $\log 0{,}175 = \log 7 - 2\log 2 - 1$ ។ យើងមាន $\log 196 = \log 2^2.7^2 = 2\log 2 + 2\log 7 = c$; និង $\log 56 = \log 2^3.7 = 3\log 2 + \log 7 = d$ ។ យើងទាញបាន $\log 2 = \frac{2d-c}{4}; \log 7 = \frac{3c-2d}{4}$ ។ ដូច្នេះ $\log(0{,}175)^4 = 4(\log 7 - 2\log 2 - 1) = 5c-6d-4$.

371. 3 ▲ តាង $\log_2 12 = a$ យើងមាន $1/\log_{96} 2 = \log_2 2^3.12 = a+3; \log_2 24 = 1 + a; \log_2 196 = a+4$ និង $\frac{1}{\log_{12} 2} = a$ ។ កន្សោមដែលអោយសមមូលនឹង $(a+1)(a+3) - a(a+4) = 3$ ។

II. សមភាព

372. 1. ▲ យើងមាន

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3}$$
$$\log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3}$$

តាង $\log_2 3 = x$ យើងទាញបាន

$$ab + 5(a-b) = \frac{1+2x}{2+x}\frac{1+3x}{3+x} + 5\left(\frac{1+2x}{2+x} - \frac{1+3x}{3+x}\right) = \frac{6x^2+5x+1+5(-x^2+1)}{(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)} = 1$$

III. សមីការ

373. $\{\log_{3/2} 2\,; 2\log_{3/2} 2\}$. **374.** $\{1-\sqrt{3}; 0; 2; 1+\sqrt{3}\}$. **375.** $\{1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\}$.

376. $\left\{\log_{1\sqrt{5\sqrt{2}-7}} 6\,; 0\right\}$

377. ▲ $\{-2; 3\}$. តាង $3^{x^2} = u, 3^{x+6} = v$ ។ សមីការដែលអោយមានរាង $u^2 - 2uv + v^2 = 0$ រឺ $(u-v)^2 = 0$ ។ ដូច្នេះ $3^{x^2} = 3^{x+6}$ ។ ...។

378. ▲ $\{-2; 3\}$. តាង $2^{\sqrt{2x+1}} = y, 2^x = z$ យើងទទួលបាន $x^2y + z = 2y + x^2z/4$ រឺ $\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)(2y - z) = 0$ ។ យើងទាញបាន $x_1 = 2$ រឺ $2y = z$ នាំអោយ $x_4 = 4$ ។

379. $\{11\}$.▲ យើងបំលែងអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ$4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 4^{\log_4 3(x-3)}\left(2^{\log_2 5}\right)^2 = 5^2\left(4^{\log_4(x-3)}\right)^{1/3} = 25(x-3)^{1/3}$។ យើងមាន $25(x-3)^{1/3} = 50, x-3 = 2^3, x = 11$ ។

380. $\{4\}$. **381.** $\{-3;\ -1\}$. **382.** $\{27\}$; **383.** $\{-1\}$ ▲ យើងបង្រួមសមីការទៅជារាង $\log_2(3-x)(1-x) = \log_2 2^3$ នាំអោយ $x^2 - 4x - 5 = 0$ នាំអោយ $x = -1$ ។

384. $\{4\}$; **385.** $\{8\}$; **386.** $\{2\}$; **387.** $\{3\}$; **388.** $\{3; 3+\sqrt{2}\}$; **389.** $\{-11;\ -6-\sqrt{7}; -6+$
7; −1;

390. $\{3\}$; **391.** $\{-17\}$; **392.** $\{1\}$; **393.** $\{2\}$; **394.** $\{\sqrt{2}; \sqrt{6}\}$.

395. $\left\{-2^{1/\log_a 4a^4};\ 2^{1/\log_a 4a^4}\right\}$ ចំពោះ $a \in \left(0;\ 1/\sqrt{2}\right) \cup \left(1/\sqrt{2}\,; 1\right) \cup (1; \infty)$ ក្រៅពីនេះ សមីការគ្មានរឹស។

396. $\left\{\frac{3a+3}{7-a}\right\}$ ចំពោះ $a \in (3;\ 7)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានរឹស។

397. $\left\{\frac{2a-1}{6}\right\}$ ចំពោះ $a \in (-\infty;\ -12) \cup (1/2\,;\infty)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានរឹស។

398. $\{1; 60\}$. ចំពោះ $x = 1$ អង្គទាំងពីរនៃសមីការស្មើសូន្យ ដូច្នេះ $x = 1$ ជារឹសមួយនៃសមីការនេះ។ ឥលូវនេះយើងរករឹសផ្សេងទៀតដែលផ្សេងពីមួយ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\frac{1}{\log_3 x \log_4 x \log_5 x}$ យើងទាញបាន

$$1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} = \log_x 3 + \log_x 4 + \log_x 5$$
$$\Longrightarrow \quad \log_x 3.4.5 = 1; \quad \Longrightarrow \quad x = 60$$

399. $\{1; \sqrt{3}/8\}$. **400.** $\left\{\frac{1}{10}; \sqrt{10}\right\}$. **401.** $\left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$. **402.** $\{3; 3^9\}$. **403.** $\{1/625; 5\}$.**404.** $\{\sqrt[5]{5}; 5\}$.

405. $\{10\}$.

406. $\{-1/4\}$. **407.** $\left\{0; \frac{7}{4}; \frac{3+\sqrt{24}}{2}\right\}$. **408.** $\{2\}$. **409.** $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; 8\right\}$. **410.** $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; 1; 4\right\}$. **411.** $\left\{\frac{1}{8}; 1; 4\right\}$. **412.** $\left\{\frac{1}{9}; 1; 3\right\}$.

413. $\{5\}$. **414.** $\{a-1; a+1\}$ ចំពោះ $a \in (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; \infty)$; $\{3\}$ ចំពោះ $a = 2$ ។

415. $\{a^2\}$ ចំពោះ $a \in (0; 1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1) \cup (1; \infty)$ ។

416. $\{25\}$	**417.** $\{1/9\}$	**418.** $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}$	**419.** $\{2\}$	**420.** $\{3\}$
421. $\{1/3\}$	**422.** $\{3; 10\}$	**423.** $\{2; 4\}$	**424.** $\left\{\log_2 \frac{3}{5}; \log_2 \frac{2}{5}\right\}$	
425. $\{2\}$	**426.** $\{2\}$	**427.** $\{0\}$	**428.** $\{-1; 2\}$	
429. $\{2\}$	**430.** $\{-\log_2 3\}$	**431.** $\left\{-\frac{9}{10}; 99\right\}$	**432.** $\left\{-\frac{1}{10^5}; 10^3\right\}$	
433. $\{1000\}$	**434.** $\{0\}$	**435.** $\left\{\frac{1}{10}; 2; 1000\right\}$	**436.** $\{0{,}2; 6\}$	

437. $\{2\}$. ● តាង $2^{\log_{x^2}(3x-2)} = u, 3^{\log_{x^2}(3x-2)} = v$ រួចហើយដោះស្រាយសមីការ $3u^2 - 5uv + 2v^2 = 0$ ជាអនុគមន៍នៃ u រឺ v ។

438. $\left[\frac{1}{5}; \infty\right)$

439. $\{1/16\} \cup [4; \infty)$.▲ តាង $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y$ សមីការដែលអោយទៅជា $\log_2 \sqrt{y+6} = \log_2 \sqrt{2}|y|$ រឺ $2y^2 - y - 6 = 0$ ដែលមានរឹស $y_1 = 2$ និង $y_2 = -3/2$ ។ ដូច្នេះ $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_1 = 2 \Longrightarrow \sqrt{x} - 2 = |\sqrt{x} - 2| \Longrightarrow x \geq 4$ ។ ជំនួស $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_2 = -\frac{3}{2} \Longrightarrow 2\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 1/16$ ។

440. $\{2\}$.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង 13^x យើងទាញបាន

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$$

យើងមាន $\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$ ។ អនុគមន៍ $y_1=\left(\frac{5}{13}\right)^x$ និង $y_2=\left(\frac{12}{13}\right)^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ។ ដូច្នេះ

- បើ $x<2$ នោះ $\left(\frac{5}{13}\right)^x<\left(\frac{5}{13}\right)^2$; $\left(\frac{12}{13}\right)^x<\left(\frac{12}{13}\right)^2$

  $\Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x<\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$
- បើ $x>2$ នោះ $\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x>\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$

ដូច្នេះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=2$ ។

441. $\{3\}$ **442.** $\{0\}$ **443.** $\{3\}$ **444.** $\{15\}$ ហើយ $\mathrm{a}=3$។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

445. $\{(|a|^{66/5};|a|^{72/5})\}$ ចំពោះ $a\neq\{-1;0;1\}$ ។ **446.** $\{(1/2;1/2)\}$ **447.** $\{(9/2;1/2)\}$

448. $\{(8;1)\}$ **449.** $\{(3/2;1/2)\}$ **450.** $\{(\sqrt[4]{3};-1);(\sqrt[4]{3};1)\}$ **451.** $\{(4;-1/2)\}$

452. $\{(0{,}1;2);(100;-1)\}$ **453.** $\{(2;10);(10;2)\}$

454. $\{(2;1/6)\}$ **455.** $\{(9a/2;a/2);(a/2\,;9a/2)\}$ ចំពោះ $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$ ។

456. $\{(2;4);(4;2)\}$

457. $\{(a^2;a);(a;a^2)\}$ ចំពោះ $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$;

$\{((a+1)^2;-(a+1));(-(a+1);(a+1)^2)\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$ ។

458. $\{(3;9);(9;3)\}$ **459.** $\{(3;2)\}$ **460.** $\{(-2;-2);(2;2)\}$ **461.** $\{(12;4)\}$

462. $\{(5;1/2)\}$ **463.** $\{(64;1/4)\}$ **464.** $\{(-2;4)\}$

V. វិសមភាព

465.▲ យើងមាន $2^{300}=8^{100}<3^{200}=9^{100}$ ។

466.▲ យើងមាន $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$។ ចំពោះ $n>1$ យើងមាន

$$\log_n\frac{n+1}{n}>\log_{n+1}\frac{n+1}{n}>\log_{n+1}\frac{n+2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \log_n(n+1)-\log_n n>\log_{n+1}(n+2)-\log_{n+1}(n+1)$$

យើងទាញបាន $\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+1)$ ។

467.▲ ដោយ $27>25$ នោះ $\log_8 27=\log_4 9>\log_9 25$។

468.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា ស្វីត (x_i) ជាស្វីតកើន។ ដូច្នេះ ស្វីត $(\ln x_i)$ ក៏ជាស្វីតកើនដែរ។ តាមវិសមភាព Chebyshev យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \geq \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right] \Rightarrow \ln\left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i}\right] \geq \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \ln\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geq \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]}$$

469.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$(x^2 + 2yz)\ln x + (y^2 + 2zx)\ln y + (z^2 + 2xy)\ln z \geq (xy + yz + zx)(\ln x + \ln y + \ln z)$

$\Leftrightarrow (x - y)(x - z)\ln x + (y - z)(y - x)\ln y + (z - x)(z - y)\ln z \geq 0$

យើងមាន $\ln x, \ln y, \ln z > 0$ ព្រោះ $x, y, z > 1$ ។

វិសមភាពខាងលើមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី (ជំនួស x ដោយ y រឺ ដោយ z គ្មានអ្វីប្រែប្រួល)។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$ ។ ដូច្នេះ $(z - x)(z - y)\ln z \geq 0$ ។ បន្ទាប់មកទៀត អនុគមន៍ ln ជាអនុគមន៍កើន លើ $\mathbb{R}^{+*}$ យើងទាញបាន

$$(x - y)(x - z)\ln x \geq (y - z)(x - y)\ln y$$

ព្រោះ កត្តានិមួយៗ សុទ្ធតែ វិជ្ជមានរឺសូន្យ ហើយកត្តានិមួយៗនៅអង្គខាងឆ្វេង ធំជាងកត្តានិមួយៗនៃអង្គខាងស្តាំ។

VI. វិសមីការ

470. $(-\infty;\ -2{,}5) \cup (0; \infty)$

471. $\left(-1 - \sqrt{2};\ -2\right) \cup \left(0; \sqrt{2} - 1\right)$

472. $\left(-\infty;\ 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}; \infty\right)$

473. $(-\infty;\ -2) \cup (5/8; \infty)$

474. $\left[-7; -\sqrt{35}\right) \cup \left[5; \sqrt{35}\right)$

475. $(2; 7)$

476. $\left(-\sqrt{5}; -2\right) \cup \left(1; \sqrt{5}\right)$

477. $(-1; 1) \cup (3; \infty)$

478. $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

479. $\left(-1; 1 + 2\sqrt{2}\right)$

480. $(2; 7) \cup (22; 27)$

481. $(2; 4)$

482. $(1; 11/10)$

483. $[-1; 4)$

484. $\left(-4; -1 - \sqrt{3}\right] \cup \left(0; \sqrt{3} - 1\right]$

485. $(3; 5]$

486. $(2; 5)$

487. $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

488. $(0; 10^{-4}] \cup [10; \infty)$

489. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [\sqrt{2}; \infty)$

490. $(0; 1) \cup \left(\sqrt{3}; 9\right)$

491. $(1/16;1/8)\cup(8;16)$ **492.** $\left(0;1/\sqrt{27}\right]\cup\left[\frac{1}{3};\sqrt{243}\right]\cup[27;\infty)$

493. $(1/16;1/4)\cup(1/2;2)$ **494.** $(0;1/2)\cup(32;\infty)$

495. $\left[\log_2\frac{\sqrt{3}}{2};\infty\right]$ **496.** $(-1;\infty)$

497. $\left(\log_2\frac{3-\sqrt{5}}{2};\log_2\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ **498.** $\left(-\infty;1-\log_3\sqrt[3]{5}\right]$

499. $(-\infty;0)\cup(\log_2 3;\infty)$ **500.** $(0{,}01;\infty)$ **501.** $(-\infty;-1)\cup(-0{,}1;0)$

502. $\left(\log_2(5+\sqrt{33})-1;\infty\right)$ **503.** $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;1)$

504. $\left(\log_5(\sqrt{2}+1);\log_5 3\right)$ **505.** $(-\infty;0]\cup(0;\infty)$

506. $[2;\infty)$ **507.** $[28/3;\infty)$ **508.** $\left[\log_3\frac{83}{19};\infty\right)$

509. $\left(-3;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};3\right)$ **510.** $(-1/2;2)$

511. $[-3;1)$ **512.** $\left(-4;\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

513. $(0;2)\cup(4;\infty)$ **514.** $(1000;\infty)$ **515.** $\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[4;\infty)$

516. $\left(\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2};\infty\right)$ ចំពោះ $a\in(1;\infty)$; $\left(1;\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right)$ ចំពោះ $a\in(0;1)$

517. $(0;a^5)\cup(a^3;a^2)\cup(\frac{1}{a};\infty)$

518. $(1/a;a^4)$ ចំពោះ $a\in(1;\infty)$; $(a^4;1/a)$ ចំពោះ $a\in(0;1)$

519. $\left[\log_a\left(4+\sqrt{16+a^2}\right);3\log_a 2\right)$ ចំពោះ $a\in(0;1)$; $\left[\log_a\left(4+\sqrt{16+a^2}\right);\infty\right)$ ចំពោះ $a\in(1;\infty)$

520. $(3;4)\cup(5;\infty)$ **521.** $(1;2)$

522. $(0;1/2)\cup(1;2)\cup(3;6)$ **523.** $(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(1;3)$

524. $\left(-\frac{4}{3};-\frac{23}{22}\right)$ **525.** $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup[-1;3]$

526. $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right)$ **527.** $(-3;-1)$

528. $\left(0;\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\cup(1;\infty)$ **529.** $[-1;1/2)\cup[1;2)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right)$

530. $\left(3;5-\sqrt{3}\right)\cup(7;\infty)$ **531.** $(1;2)$

532. $(0;3)\cup(4;6)\cup(6;12)\cup(14;\infty)$

533. $(0;4)$ **534.** $[2;4)$ **535.** $\left(\frac{1}{2};4\right)$

536. $(1;2)$ **537.** $(0;2)$ **538.** $\left(1/\sqrt{5};1\right)\cup(3;\infty)$

539. $(-1;\infty)$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

540. $\{8\}$ **541.** $\{4\}$ **542.** $(0; 1/a^4)$ ចំពោះ $a \in (1; \infty), (0; a^8)$ ចំពោះ $a \in (0; 1)$ ។

៣. ត្រីកោណមាត្រ

I. គណនា

543. ក) $\sqrt{2-a^2}$;

ខ) $1-\frac{(a^2-1)^2}{2}$ ● $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2$; $a^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$.

544. ក) p^2-2; ខ) p^3-3p

545. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$;

546. $\frac{\sqrt{3(1-b^2)}-b}{2}$ ▲ តាង $40^o+\alpha=\beta$ ។ $\cos(70^o+\alpha)=\cos(30^o+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-\frac{1}{2}\sin\beta$ ។ ដោយ $0<\alpha<45^o$ នោះ $\cos\beta>0$ ដូច្នេះ $\cos\beta=\sqrt{1-b^2}$ ។

547. $1073/1105$; **548.** $\sin 3\alpha=-\frac{117}{125}, \cos 3\alpha=\frac{44}{125}, \tan 3\alpha=-117/44$.

549. $\tan 2\alpha$; **550.** $-\tan\alpha$; **551.** $\tan 2\alpha$; **552.** $\operatorname{cosec}\alpha$

553. $-1/2$. ▲

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\times\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

554. 1. ● បំលែងជា $\frac{\sin\frac{13}{14}\pi-\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)}{2\sin\frac{\pi}{14}}$

555. $1/3$ ▲ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}+\frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=1{,}4$ ។ ដូច្នេះ $2{,}4\tan^2(\alpha/2)-2\tan(\alpha/2)+0{,}4=0 \Rightarrow \tan\alpha/2=1/3; \tan\alpha/2=1/2$ ។ យើងមាន $0<\alpha/2<\pi/8; \tan\pi/8=\sqrt{2}-1<1/2$ ។

556. π ▲ តាមសម្មតិកម្ម យើងទាញបាន $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}, 0<\frac{\beta+\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}, \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}<1$ ។ ដូច្នេះ

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}\frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\Longrightarrow\ \tan\frac{\beta+\gamma}{2}-\cot\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\Longrightarrow\ -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=0$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$$

557. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ● $\cos 292°30' = \sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$;

558. 4 ▲ $\operatorname{cosec} 10° - \sqrt{3}\sec 10° = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10° \cos 10°} = \frac{4\sin(30°-10°)}{\sin 20°} = 4$

559. $\sqrt{3}$ ▲

$$\frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°} = \frac{\cos 40° - 2\sin 30°\sin 10°}{\sin 20°} = \frac{\sin 50° - \sin 10°}{\sin 20°} = \frac{2\cos 30°\sin 20°}{\sin 20°} = \sqrt{3}$$

560. 4 ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&-2\sqrt{2}\sin 10°\left(2\sin 35° - \frac{\sec 5°}{2} - \frac{\cos 40°}{\sin 5°}\right)\\
&= -2\sqrt{2}\left(2\sin 35°\sin 10° - \frac{\frac{1}{2}\sin 10°}{\cos 5°} - \frac{\cos 40°\sin 10°}{\sin 5°}\right)\\
&= -2\sqrt{2}(2\sin 35°\sin 10° - \sin 5° - 2\cos 40°\cos 5°)\\
&= -2\sqrt{2}(-2\cos 45° - \sin 5° + \cos 25° - \cos 35°)\\
&= -2\sqrt{2}\left(-\sqrt{2} - \sin 5° + 2\sin 30° \times \sin 5°\right) = 4
\end{aligned}$$

561. 3/4 ▲ យើងមាន

$$\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 73° \cos 47°$$
$$= \frac{1+\cos 146°}{2} + \frac{1+\cos 94°}{2} + \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 26°)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \cos 146° + \cos 94° + \cos 26°\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \cos(180° - 146°) + 2\cos\frac{120°}{2}\cos\frac{68°}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \cos 34° + \cos 34°\right) = \frac{3}{4}$$

562. $-\frac{1}{2}$ ▲ យើងមាន

$$(\sin 6° - \sin 66°) + (\sin 78° - \sin 42°) = 2\cos 60° \sin 18° - 2\sin 30° \cos 36°$$
$$= \sin 18° - \sin 54° = -\frac{2\cos 36° \sin 18°}{\cos 18°}\cos 18° = -\frac{2\cos 36° \sin 36°}{2\cos 18°}$$
$$= -\frac{\sin 72°}{2\cos 18°} = -\frac{1}{2}$$

563. $-1/\sqrt{2}$; **564.** 1 ; **565.** 0 ● $\tan^2 20° = \frac{1-\cos 40°}{1+\cos 40°}$

566. 1/5 ▲ យើងមាន

$$\cot^2 36° \cot^2 72° - 1 + 1 = 1 + \frac{\cos 108° \cos 36°}{\sin^2 36° \sin^2 72°}$$
$$= 1 - (\cot 36° \cot 72°)^2 \frac{1}{\cos 36° \cos 72°}$$
$$= 1 - \cot^2 36° \cot^2 72° \frac{2.2\sin 36°}{\sin 144°}$$
$$= 1 - 4\cot^2 36° . \cot^2 72°; \Longrightarrow 5\cot^2 36° \cot^2 72° = 1 \Longrightarrow \cot^2 36° \cot^2 72° = \frac{1}{5}$$

567. 433▲យើងមាន

$$\tan^2\left(3\frac{\pi}{18}\right) = \tan^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\tan^2\left(3\frac{5\pi}{18}\right) = \tan^2\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\tan^2\left(3\frac{7\pi}{18}\right) = \tan^2\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ $x_1 = \frac{\pi}{18}; x_2 = \frac{5\pi}{18}; x_3 = \frac{7\pi}{18}$ ជាឫសបីនៃសមីការ $\tan^2 3x = \frac{1}{3}$ ។ សមីការនេះសមមូលនឹង

$$\left(\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tan^6 x - 6\tan^4 x + 9\tan^2 x}{9\tan^4 x - 6\tan^2 x + 1} = \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\tan^6 x - 25\tan^4 x + 33\tan^2 x - 1 = 0$$

តាង $t = \tan^2 x \geq 0$ នោះ $t_1 = \tan^2\frac{\pi}{18}$; $t_2 = \tan^2\frac{5\pi}{18}$; $t_3 = \tan^2\frac{7\pi}{18}$ ជាចំលើយនៃសមីការ $3t^3 - 27t^2 + 33t - 1 = 0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត យើងទាញបាន

$$t_1+t_2+t_3=\frac{27}{3}=9;$$
$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\frac{33}{3}=11$$
$$t_1t_2t_3=\frac{1}{3}$$
ដូច្នេះ
$$\begin{aligned}A&=t_1^3+t_2^3+t_3^3\\&=(t_1+t_2+t_3)^3-3(t_1+t_2+t_3)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)+3t_1t_2t_3\\&=9^3-3.9.11+3.\frac{1}{3}=433\end{aligned}$$
568. ▲យើងមាន
$$\begin{cases}\sin 1999x=0\\0<x<\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{1999};k=1,2,\dots,1998\quad(1)$$
$$\begin{aligned}&2\sin x\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)\\&=\sin x+\sin(-x)+\sin 3x+\sin(-3x)+\sin 5x+\cdots+\sin(-1997x)+\sin 1999x\\&=\sin 1999x\end{aligned}$$
$$\Longrightarrow\frac{\sin 1999x}{\sin x}=2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right),\forall x\in(0,\pi)\quad(2)$$
យើងដឹងថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m យើងមាន $\cos mx$ ជាពហុធាដឺក្រេទីm នៃ $\cos x$ ហើយដែលមានមេគុណរបស់តួដឺក្រេទីm ស្មើ 2^{m-1} (ពហុធា Tchebyshev)។ ដូច្នេះ
$$2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)$$
ជាពហុធាដឺក្រេទី 1998 នៃ $\cos x$ ហើយដែលមានមេគុណរបស់តួដឺក្រេ1998 ស្មើ $2.2^{1998-1}=2^{1998}$ ។ (3)

ពី(១)(២)និង(៣) យើងទាញបាន
$$\begin{aligned}\frac{\sin 1999x}{\sin x}&=2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)\\&=2^{1998}\prod_{k=1}^{1998}\left(\cos x-\cos\frac{k\pi}{1999}\right)\end{aligned}$$
តែយើងមាន $\cos\frac{1998\pi}{1999}=-\cos\frac{\pi}{1999};\cos\frac{1997\pi}{1999}=-\cos\frac{2\pi}{1999};\dots;\ \cos\frac{1000\pi}{1999}=-\cos\frac{999\pi}{1999}$; នោះ
$$\frac{\sin 1999x}{\sin x}=2^{1998}\prod_{k=1}^{1998}\left(\cos x-\cos\frac{k\pi}{1999}\right)$$

$$= 2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{k\pi}{1999}\right) \quad (4)$$

ក្នុង(៤) យើងយក $x = \pi/3$ យើងទាញបាន

$$\frac{\sin\frac{1999\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\frac{1}{4} - \cos^2\frac{k\pi}{1999}\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 666\pi\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\frac{1 - 4\cos^2\frac{k\pi}{1999}}{2^2}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{999}\left(1 - 4\cos^2\frac{k\pi}{1999}\right) = 1$$

ដូច្នេះ $P = 1$ ។

II. សមភាព

569. 570.

571. ● $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Longrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$ ។

572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590.

591. ▲ យើងមាន

$$16\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70° = 8\cos 80°\cos 40°\cos 20°$$
$$= 4\cos 80°\cos 40°\frac{2\sin 20°\cos 20°}{\sin 20°} = 2\cos 80°\frac{2\sin 40°\cos 40°}{\sin 20°}$$
$$= \frac{2\cos 80°\sin 80°}{\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{\sin 20°} = \frac{\sin(180° - 160°)}{\sin 20°} = 1$$

592. ● ប្រើរូបមន្ត $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha\,, 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

593.594.

595. ● ប្រើរូបមន្ត $1 \pm \sin\alpha = \left(\sin\frac{\alpha}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

596. ▲ តាង $R_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n}$ ។ យើងមាន

$$R_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

$$R_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$
$$\ldots$$
$$R_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

597. ▲ យើងមាន

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x$$
$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\ldots$$
$$\cos nx = T_n(\cos x)$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\cos(n+1)x = T_{n+1}(\cos x)$ ។ យើងមាន

$\cos(n+1)x = \cos nx\cos x - \sin nx\sin x$

$\cos nx = \cos(n-1)x\ \cos x + \sin(n-1)x\ \sin x \implies \sin(n-1)x\ \sin x$

$= \cos nx - \cos(n-1)x\ \cos x$

$\sin nx = \sin(n-1)x\cos x - \sin x\cos(n-1)x \implies \sin nx \sin x$

$= \sin(n-1)x\cos x\sin x - \sin x\cos(n-1)x\sin x$

$= [\cos nx - \cos(n-1)x]\cos x - (1-\cos^2 x)\cos(n-1)x$

$= \cos nx\cos x - \cos(n-1)x\cos x - \cos(n-1)x + \cos^2 x\cos(n-1)x$

$\implies \cos(n+1)x = (\cos^2 x + 1 - \cos^2 x)\cos(n-1)x = (1+\cos x - \cos^2 x)T_{n-1}(\cos x)$

$= T_{n+1}(\cos x)$

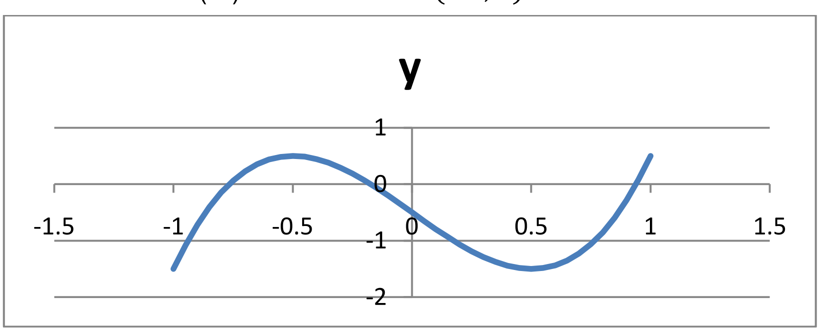
598. ▲ យើងមាន

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}-1\right)^x + 3 \iff \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} + 3 \quad (1)$$

តាង $2t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x > 0$ ។ សមីការ(1) សមមូលនឹង

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3 \iff 4t^3 - 3t = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

អនុគមន៍ $f(t) = 4t^3 - 3t - \frac{1}{2}$ មាន ខ្សែកោងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុចបីស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(-1;1)$ ។ មានន័យថាសមីការ(២)មានចំលើយ $t \in (-1;1)$ ។ តាង $t = \cos\alpha$ ដែល$\alpha \in (0;\pi)$ ។



យើងទាញបាន

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\cos 3\alpha=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\quad \alpha=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

ដោយ $\alpha\in(0;\pi)$ នោះ $\alpha=\left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$ ។ ដូច្នេះសមីការមានរឹសបីគឺ $t_1=\cos\frac{\pi}{9}$; $t_2=\cos\frac{5\pi}{9}; t_3=\cos\frac{7\pi}{9}$ ។ យើងមាន $t_2; t_3<0$ ។ ដូច្នេះមានតែ $t_1=\cos\frac{\pi}{9}$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $t>0$ ។មានន័យថា$\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2t=2\cos\frac{\pi}{9}$ ។

599. ▲ យើងមាន

$$\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

តាង $A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$ នោះ

$$2\sin\frac{\pi}{7}.A=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$
$$2\sin\frac{\pi}{7}.A=\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}$$
$$2\sin\frac{\pi}{7}.A=-\sin\frac{\pi}{7}\quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\ \sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$$

III. សមីការ

600. $\{\pi n; 2\pi n\pm 3\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

601. $\{2\pi n\pm\pi/6\,; 2\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

602. $\{\pi n/2+(-1)^n\,\pi/12\,|n\in\mathbb{Z}\}$

603. $\left\{\frac{\pi n}{3};\frac{2\pi n}{3}\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

604. $\{\pi n+\pi/4; 2\pi n\pm\pi/3\,|n\in\mathbb{Z}\}$

605. $\{\pi n+(-1)^{n+1}\pi/6\,|n\in\mathbb{Z}\}$

606. $\{2\pi n\pm\pi/3\,|n\in\mathbb{Z}\}$

607. $\left\{\pi n+(-1)^n\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

608. $\{2\pi n\pm 2\pi/3\,|n\in\mathbb{Z}\}$

609. $\{\pi(5n+2)+\pi/2\,;5\pi n|\ n\in\mathbb{Z}\}$

610. $\{\pi n;2\pi n+\pi/6|\ n\in\mathbb{Z}\}$

611. $\{\pi n+\pi/4;\pi n+\arctan 3|\ n\in\mathbb{Z}\}$

612. $\{\pi n-\arctan(1/2)\,;\pi n+\arctan 2|\ n\in\mathbb{Z}\}$

613. $\{\pi n+\pi/6;\pi n+\pi/3|\ n\in\mathbb{Z}\}$

614. $\{\pi n+3\pi/4;\pi n+\operatorname{arccot} 2|\ n\in\mathbb{Z}\}$

615. $\{\pi n+(-1)^{n+1}\pi/4;\pi n+\operatorname{arccot} 2|\ n\in\mathbb{Z}\}$

616. $\{\pi n+(-1)^{n}\pi/4|\ n\in\mathbb{Z}\}$

617. $\{2\pi n+\arctan(1/2)|\ n\in\mathbb{Z}\}$

618. $\{\pi n/2+\pi/8|\ n\in\mathbb{Z}\}$

619. $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin 2(2-\sqrt{3})\middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

620. $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin(1-\sqrt{3+2a})\middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$

621. $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\frac{\pi}{12}\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

622. $\left\{\frac{\pi n}{5};\frac{2\pi n}{5}\pm\frac{1}{5}\arccos\frac{1}{4}\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

623. $\left\{\pi n+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{33}-3}{4}\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

624. $\{\pi n/5+(-1)^n\pi/20-6/5\ |\ n\in\mathbb{Z}\}$

625. $\{\pi n/2+\pi/4\ |\ n\in\mathbb{Z}\}$

626. $\{\pi(2n+1)\ |\ n\in\mathbb{Z}\}$

627. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi n\pm\frac{\pi}{3};2\pi n\pm(\pi-\arccos(2/3))\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

628. $\{\pi n-\pi/4\,;\pi n\pm\pi/3\ |\ n\in\mathbb{Z}\}$

629. $\left\{2\pi n;2\pi n\pm 2\,\pi/3\,;2\pi n\pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

630. $\{\pi n+\arctan 5\ |\ n\in\mathbb{Z}\}$

631. $\{\pi n+\pi/4\ |\ n\in\mathbb{Z}\}$

632. $\{\pi n-\pi/4\ |\ n\in\mathbb{Z}\}$

633. $\{2\pi n-\pi/4\,;\ 2\pi n+\pi/2|\ n\in\mathbb{Z}\}$

634. $\{\pi n+\pi/2\,;\ \pi n+\arctan(1/4)|\ n\in\mathbb{Z}\}$

635. $\{\pi n+\pi/4\,;\ 2\pi n\pm 2\pi/3|\ n\in\mathbb{Z}\}$

636. $\{\pi n + \arctan 2 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

637. $\{2\pi n; \pi n + \pi/4 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

638. $\{\pi n - \pi/4; \pi n |\, n \in \mathbb{Z}\}$

639. $\{\pi n + \pi/4 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

640. $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \arctan 2 \middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

641. $\{\pi n + \pi/4\,; \pi n - \arctan(1/4) |\, n \in \mathbb{Z}\}$

642. $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4}; \pi n + \arctan(3/5) \middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

643. $\{\pi n + \arctan 2\,; \pi n - \arctan(3/4) |\, n \in \mathbb{Z}\}$ ● សរសេរអង្គខាងស្តាំជា $-2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ រួចចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\cos^2 x$ ។

644. $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n + \arctan 5 \middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

645. $\{\pi n - \arctan \sqrt[3]{4} |\, n \in \mathbb{Z}\}$

646. $\{\pi n - \pi/4\,; \pi n \pm \pi/3 |\, n \in \mathbb{Z}\}$ ● បំលែងអង្គខាងស្តាំនៃសមីការជា

$$\begin{aligned} 3\sin x\,(\cos x - \sin x) + 3 &= 3\sin x \cos x - 3\sin^2 x + 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 3\cos x\,(\sin x + \cos x) = 3\cos^2 x\,(\tan x + 1) \end{aligned}$$

647. $\{\pi n/2 |\, n \in \mathbb{Z}\}$ ● បំលែងអង្គខាងស្តាំនៃសមីការជា $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$

648. $\{2\pi n; 2\pi n + \pi/3 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

649. $\{2\pi n + \pi/12\,; 2\pi n + 7\pi/12 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

650. $\{2\pi n/5 - \pi/5\,; 2\pi n/5 + 2\pi/15 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

651. $\{2\pi n; 2\pi n + \pi/2 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

652. $\{2\pi n + 5\pi/3 |\, n \in \mathbb{Z}\}$

653. $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}(2n+1); \frac{\pi}{8}(1-2n) \middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

654. $\left\{\pi n + \frac{7\pi}{12} \middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

655. $\{\pi n/4 |\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{4k+2 | k \in \mathbb{Z}\}\}$

656. $\left\{\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{12} \middle| n \in \mathbb{Z} \setminus \{1 + 3m | m \in \mathbb{Z}\}\right\}$

657. $\{\emptyset\}$

658. $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$ ▲ បំលែងសមីការជា $2(\tan 3x - \tan 2x) = \tan 2x\,(1 + \tan 3x \tan 2x)$ (១)។ បើ $1 + \tan 3x \tan 2x = 0$ នោះ

$$\frac{\sin 3x \sin 2x + \cos 3x \cos 2x}{\cos 2x \cos 3x} = 0 \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos 2x \cos 3x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos 2x\,(4\cos^2 x - 3)} = 0$$

មិនមានរឹស។ ដូច្នេះយើងអាចចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(១) នឹង $1 + \tan 3x \tan 2x$ បាន។ សមីការ(១)ទៅជា

$$2\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = \tan 2x$$
$$2\tan x = \tan 2x$$
$$2\tan x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$
$$\tan x = 0$$

659. $\{90°n + 25°|n \in \mathbb{Z}\}$

660. $\{2\pi n|n \in \mathbb{Z}\}$

661. $\{2\pi n - \pi/2|n \in \mathbb{Z}\}$

662. $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{6}; \pi n + \pi/2 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

663. $\{2\pi n \pm 2\arctan 5|n \in \mathbb{Z}\}$

664. $\{2\pi n \pm 2\arctan 3;\ 2\pi n \pm 2\arctan\sqrt{3/11}|n \in \mathbb{Z}\}$

665. $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{4} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

666. $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{3}; \pi n + \pi/2 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

667. $\{2\pi n/3 \pm 2\pi/9; \pi n/3 + \pi/6|n \in \mathbb{Z}\}$● សរសេរសមីការជារាង $\cos 3(3x) - 2\cos 2(3x) = 2$

668. $\{\pi n; \pi n/2 \pm \pi/12|n \in \mathbb{Z}\}$ ● សរសេរសមីការជារាង $2\cos 2(2x) = 1 + \cos 3(2x)$

669. $\{3\pi n|n \in \mathbb{Z}\}$

670. $\left\{\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

671. $\{2\pi n; 4\pi n \pm 2\pi/3|n \in \mathbb{Z}\}$

672. $\left\{\pi n + \frac{(-1)^n \pi}{6}; 2\pi n + \pi/2 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$ ● ប្រើសមភាព

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}x\right) = \sin 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

673. $\{\pi n - \pi/4|n \in \mathbb{Z}\}$

674. $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \arctan\frac{b}{a} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $c^2 \le a^2 + b^2$; $\{\emptyset\}$ ចំពោះ $c^2 > a^2 + b^2$ ▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\sqrt{a^2 + b^2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (1)$$

យើងមាន

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

ហើយ

$$-1 \le \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$$

តាង $a/\sqrt{a^2+b^2} = \cos\phi$; $b/\sqrt{a^2+b^2} = \sin\phi$ ។ សមីការ(១) ទៅជា

$$\cos x\cos\phi + \sin x\sin\phi = \cos(x-\phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2)$$

សមីការ(២) មានរឹសបើ

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1 \ \Rightarrow c^2 \le a^2+b^2$$

យើងទាញបាន

$$x-\phi = 2\pi k \pm \arctan\left(c/\sqrt{a^2+b^2}\right), k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

ដែល $\phi = 2\pi m + \arctan\frac{b}{a}$, $m \in \mathbb{Z}$ ។ ត្រង់នេះយើងសន្មតថា $a > 0$ ។ ករណី $a = 0$ សមីការទៅជា $b\sin x = c$ ។ ករណី $a < 0$ គុណសមីការនឹង -1 ។

675. $\{\pi n - \pi/8 | n \in \mathbb{Z}\}$

676. $\left\{\pi n; \frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{6}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

677. $\left\{\frac{4\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi n}{3} + \frac{2\pi}{3}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

678. $\left\{\frac{\pi n}{4}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

679. $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8}; \pi n + \frac{3\pi}{4}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

680. $\left\{n; \frac{-1\pm\sqrt{4l+3}}{2}\middle| n \in \mathbb{Z}; l \in \mathbb{Z}_0\right\}$; $\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \dots\}$

681. $\{\pi n + \pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$

682. $\{\pi n/4 | n \in \mathbb{Z}\}$

683. $\left\{\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{12}; 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

684. $\{\pi n; 2\pi n \pm \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$

685. $\{\pi n - \pi/4 ; \pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$

686. $\{2\pi n/3 ; \pi n + \pi/4 ; 2\pi n - \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$

687. $\{\pi n/2|n \in \mathbb{Z}\}$

688. $\{\pi n + \pi/2|n \in \mathbb{Z}\}$

689. $\left\{\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{48}; \frac{\pi n}{4} + \frac{3\pi}{32}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

690. $\mathbb{R} \setminus \{\pi n|n \in \mathbb{Z}\}$

691. $\{\pi n/5\,; \pi n \pm 3\pi/8|n \in \mathbb{Z}\}$

692. $\left\{4\pi n + \frac{17}{6}\pi; \frac{8\pi n}{3} - \frac{5}{18}\pi; \frac{8\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

693. $\left\{\frac{2\pi n}{5}; \pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

694. $\left\{\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

695. $\{\pi n + \pi/2\,; \pi n/6 + \pi/24|n \in \mathbb{Z}\}$

696. $\{\pi n/4 + \pi/8\,; \pi n/3 + (-1)^{n+1}\,\pi/18|n \in \mathbb{Z}\}$

697. $\{\pi n/5 + (-1)^{n+1}\,\pi/30\,; \pi n/4 + \pi/16\,; \pi n + 3\pi/4|n \in \mathbb{Z}\}$

698. $\{\pi n + \pi/2\,; \pi n + (-1)^n\pi/6\,; 2\pi n \pm 2\pi/3|n \in \mathbb{Z}\}$

699. $\{\pi n/2; 2\pi n \pm 2\pi/3|n \in \mathbb{Z}\}$

700. $\left\{\frac{\pi}{7}(2n+1)\middle| n \in \mathbb{Z} \setminus \{7l - 4|\, l \in \mathbb{Z}\}\right\}$

701. $\{\pi n|n \in \mathbb{Z}\}$

702. $\left\{\frac{\pi n}{3}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

703. $\left\{\frac{\pi n}{10}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

704. $\{\pi n/3 + \pi/6\,; \pi n/5 + \pi/10|n \in \mathbb{Z}\}$

705. $\{\pi n; \pi n/5 + \pi/10|n \in \mathbb{Z}\}$

706. $\{\pi n; \pi n/3 + \pi/6|n \in \mathbb{Z}\}$

707. $\{n - 5/12\,; n + 1/4|n \in \mathbb{Z}\}$

708. $\{\pi n/2\,; \pi n \pm \pi/6|n \in \mathbb{Z}\}$▲ សមីការសមមូលនឹង $(1 - \cos 2x) + 2\sin^2 2x = (1 - \cos 6x)$; $\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - (\cos 2x - \cos 6x) = 0 \;\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 2\sin 2x \sin 4x = 0$

709. $\left\{\pi n/2 + \frac{\pi}{4}; \frac{\pi n}{5} + \pi/10\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

710. $\{\pi n + \pi/2\,; 2\pi n/11 + \pi/11\,; 2\pi n/5|n \in \mathbb{Z}\}$

711. $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

712. $\left\{\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

713. $\left\{\frac{2\pi n}{7}\middle| n \in \mathbb{Z} \setminus \{7k|k \in \mathbb{Z}\}\right\}$

714. $\left\{\frac{\pi n}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$▲ សមីការសមមូលនឹង $\sin x\cos 3x\,(1-\cos 2x)+\cos x\sin 3x\,(1+\cos 2x)=-\frac{3}{4}$; $\Leftrightarrow$ $(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)+\cos 2x-\frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow$ $\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 4x=-\frac{3}{4}$; $\Leftrightarrow$ $\sin 4x=-\frac{1}{2}$ ។

715. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{8}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

716. $\left\{\frac{\pi n}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$▲ បំបែកអង្គខាងស្តាំនៃសមីការ

$$\frac{1}{2}\sin x\left(2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)=\frac{1}{2}\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(2\sin x\cos 2x+\sin x)=\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x+\sin x)=\frac{1}{4}\sin 3x$$

717. $\left\{\frac{2\pi n}{3}\pm\frac{2\pi}{9}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

718. $\left\{\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{9}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

719. $\{\pi n;\pi n\pm\pi/6\,|n\in\mathbb{Z}\}$

720. $\{\pi n;\pi n\pm\pi/6\,|n\in\mathbb{Z}\}$

721. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

722. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right);\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

723. $\{\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

724. $\{\pi n\pm\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$

725. $\{\pi n\pm\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$

726. $\{\pi n/2+\pi/4\,;\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

727. $\left\{\pi n/2+\pi/4\,;\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

728. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{4};\pi n+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

729. $\left\{\frac{\pi(4n+1)}{2};\pi(2n+1)\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ ● តាង $\sin x-\cos x=y\;\Longrightarrow 1-\sin 2x=y^2$ ។

730. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4};\frac{\pi n}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

731. $\left\{2\pi n+\frac{\pi}{4};2\pi n+\frac{11\pi}{12};2\pi n-\frac{5\pi}{12};\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

732. $\left\{2\pi n;2\pi n+\frac{\pi}{2};\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

733. $\left\{2\pi n-\frac{\pi}{2};\pi n-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

734. $\{(4\pi n+\pi/2)^2;(4\pi n+11\pi/6)^2|n\in\mathbb{Z}_0\,;\,(4\pi m-5\pi/6)^2|m\in\mathbb{N}\}$

735. $\{2\pi n+5\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$ ▲ ដោះស្រាយសមីការរក $\tan x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin x$ យើងទាញបាន

$$\tan x=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2}\right)/2$$

សមីការមានរឹសទាល់តែ $\sin x=1/2$ និង $\tan x=-1/\sqrt{3}$ ។

736. $\{2\pi n; 2\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

737. $\{2\pi n-\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

738. $\{2\pi(1+4n)|n\in\mathbb{Z}\}$ ▲ សំរួលសមីការជា

$$\sin\frac{5x}{4}+\cos x=2 \qquad (1)$$

ដោយ $\sin(5x/4)\le 1, \cos x\le 1$ នោះសមីការ(១) មានរឹសទាល់តែ $\sin(5x/4)=1$ និង $\cos x=1$ ។

739. $\{\pi n/3 ; 2\pi n-\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

740. $\left\{\pi n-\arctan\frac{1}{6} ; \pi n-\arctan\frac{1}{3}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

741. $\left[2\pi n-\frac{\pi}{3} ; 2\pi n+\frac{2\pi}{3}\right] ; n\in\mathbb{Z}$

742. $\{\pi n\pm\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$

743. $\{2\pi n+3\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

744. $\left\{2\pi n-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

745. $\{2\pi n+\pi/8 ; 2\pi n-3\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$

746. $\left\{\frac{\pi n}{2} ; \pi n+\pi/6\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

747. $\{2\pi n+\pi/2 ; 2\pi n-\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$

748. $\{2\pi n; 2\pi n-\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

749. $\left\{2\pi n+\frac{3\pi}{8} ; 2\pi n+7\pi/8 ; 2\pi n+\pi; \pi n+\pi/4\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

750. $\{2\pi n; \pi n-\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

751. $\{\pi n/3+(-1)^{n+1}\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$

752. $\left\{\pi n+\arctan\frac{2}{3}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

753. $\{2\pi n+\pi/12 ; 2\pi n-7\pi/12|n\in\mathbb{Z}\}$

754. $\{2\pi n+\pi/6 ; 2\pi l/3+5\pi/18|n,l\in\mathbb{Z}\}$

755. $\{4\pi n+13\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$

756. $\{2\pi n+\arccos(1/3)|n\in\mathbb{Z}\}$

757. $\{2\pi n + \arccos(1/10) | n \in \mathbb{Z}\}$

758. $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$

759. $\{\log_2(\pi n/4 + \pi/8) | n \in \mathbb{Z}_0\}$

760. $\left\{1; \frac{7}{12}\pi; \pi n - \frac{\pi}{12}; \pi n + \frac{7}{12}\pi \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$

761. សមីការទាំងពីរមិនដូចគ្នាទេ។ សមីការទីមួយមានរឹស $\{\pi n - \pi/4 \,; \pi n + \pi/2 \,| n \in \mathbb{Z}\}$ សមីការទីពីរមានរឹស$\{\pi n - \pi/4 \,| n \in \mathbb{Z}\}$ ។

762. $[\sqrt{5} - 1; 2]$

763.▲ យក $x = 0$ យើងទាញបាន $1 + b^2 = \cos(b^2)$ ។ នាំអោយ $b = 0$ ។ យើងទាញបាន

$$\mathrm{a}(\cos x - 1) = \cos ax - 1 \quad (*)$$

បើ $a = 0$ នោះ (*) ពិតចំពោះគ្រប់ x ។ នោះយើងសិក្សាករណី $a \neq 0$ម្តង។ ដោយ(*) ពិតជានិច្ច នោះ យក $x = 2\pi$ យើងទាញបាន $\cos 2a\pi = 1$ នាំអោយ $2a\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ដូច្នេះ

$$a = k, a \neq 0$$

យក $x = \frac{2\pi}{a}$ ជំនួសចូល(*) យើងទាញបាន

$$a\left(\cos\frac{2\pi}{a} - 1\right) = 0$$

ដោយ $a \neq 0$ នោះ $\cos\frac{2\pi}{a} = 1; \frac{2\pi}{a} = 2m\pi; m \in \mathbb{Z}$ ។ យើងទាញបាន $a = \frac{1}{m}$ ។ ដោយ $a \in \mathbb{Z}$ នោះ $a = \pm 1$ ។

បើ $a = 1; b = 0$ នោះ $\cos x - 1 = \cos x - 1$ ពិតគ្រប់ x ។

បើ $a = -1; b = 0$ នោះ $-\cos x + 1 = \cos x - 1$ មិនពិតគ្រប់ x ។

ដូច្នេះសមីការពិតគ្រប់x បើ $(a = 0; b = 0)$ រឺ $(a = 1; b = 0)$ ។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

764. $\left\{\left(2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3} + \frac{13\pi}{2}; 2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3}\right) | n \in \mathbb{Z}\right\}$

765. $\left\{\left(\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} - \pi n\right) | n \in \mathbb{Z}\right\}$

766. $\left\{\left(2\pi n \pm \arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)} + \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} - 2\pi n \pm \arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)}\right) | n \in \mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a \in \left[-2\cos\frac{\pi}{8}; 2\cos\frac{\pi}{8}\right]$

767. $\left\{\left(\frac{\pi}{5}(n + 4k) \pm \frac{2\pi}{15} + \frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a \,; \frac{\pi}{5}(n - 6k) \pm \frac{\pi}{5} + \frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a\right) | n, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a \in (-\infty; 0]$

768. $\left\{\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6};\pi\left(-n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right);\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{3};\pi\left(-n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6}\right)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$

769. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi(2n-m)+\frac{\pi}{4}\right)|n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

770. $\left\{\begin{matrix}\left(2\pi n+\frac{\pi}{6};2\pi k+\frac{\pi}{3}\right);\left(2\pi n+\frac{7\pi}{6};2\pi k+\frac{4\pi}{3}\right);\left(2\pi n-\frac{\pi}{6};2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right);\\ \left(2\pi n+\frac{5\pi}{6};2\pi k+\frac{5\pi}{3}\right)|n,k\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$

771. $\left\{\left(\pi n-\frac{\pi}{4};\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right)|n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

772. $\left\{\left(2\pi n\pm\frac{3\pi}{4};\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right)|n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

773. $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi k\pm\arccos\left(-\frac{a}{3}\right)\right)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-3;3]$;

$\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi k\right);\left(2\pi n-\frac{\pi}{2};\pi(2k+1)\right)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a=-3$

774. $\left\{\begin{matrix}\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\pi k-\arctan(a+2)\right);\\ \left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\pi k-\arctan a\right)\end{matrix}\middle|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$;

$\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\pi k-\arctan(a+2)\right)\middle|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-3;-1]$;

$\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\pi k-\arctan a\right)\middle|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-1;1)$

775. $\left\{\left(\frac{\pi k}{2}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8};\frac{\pi n}{5}-\frac{1}{5}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\middle|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$

776.▲ តាង $a=\tan x;b=\tan y;c=\tan z$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=m^2 & (1)\\ a^3+b^3+c^3=m^3 & (2)\end{cases}$$

ក) បើ $m=0$ នោះ $a=b=c=0$ យើងទាញបាន $(x;y;z)=(p\pi;h\pi;k\pi)$

១) បើ $m\neq 0$ លើកសមីការទី(២)ជាការេ យើងទាញបាន

$$m^6=(a^3+b^3+c^3)^2$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&m^6=(a^3+b^3+c^3)^2\le(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)\\ &\Longrightarrow\ m^6\le m^2(a^4+b^4+c^4)\\ &\Longrightarrow\ m^4\le a^4+b^4+c^4\qquad(4)\end{aligned}$$

សមីការទី(១) នាំអោយ

$$m^4=(a^2+b^2+c^2)^2=(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

ហើយតាម(៤) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le a^4+b^4+c^4\\ &\Longrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 0\\ &\Longrightarrow\begin{cases}a^2b^2=0\\ b^2c^2=0\\ c^2a^2=0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow(a=m;b=c=0);(a=0;b=m;c=0);(a=b=0;c=m)$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan m + p\pi; y = h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = \arctan m + h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = h\pi; z = \arctan m + k\pi \end{array}\right.$$

ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ m សមីការមានចំលើយ

$$\left[\begin{array}{l} x = \arctan m + p\pi; y = h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = \arctan m + h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = h\pi; z = \arctan m + k\pi \end{array}\right.$$

V. វិសមភាព

777.▲ ដោយ $\pi/6 < \alpha < \pi/3$ នោះ $1/\sin\alpha < 2$ និង $1/\cos\alpha < 2$ ។ ដូច្នេះ

$$0 \leq \frac{\pi \sin x}{4 \sin\alpha} \leq \frac{\pi}{4\sin\alpha} < \frac{\pi}{2}; 0 \leq \frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha} \leq \frac{\pi}{4\cos\alpha} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) \geq 0;\ \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) \geq 0$$

ករណី $x < \alpha$ នោះ $\cos x > \cos\alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) \geq \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) > \tan\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right) = 1$$

ករណី $x = \alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) = \tan\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right) = 2 > 1$$

ករណី $x > \alpha$ នោះ $\sin x > \sin\alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) \geq \tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) > \tan\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right) = 1$$

778.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$4\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C - 4(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) - 3 \leq (1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)(1+\tan^2 C)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 B} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 C} - 1\right) - 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} - 3\right) - 3 \leq \frac{1}{\cos^2 A}\frac{1}{\cos^2 B}\frac{1}{\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2A + \cos 2B) + 4\cos^2 C + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos(A+B)\cos(A-B) + 4\cos^2 C + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C - 4\cos C\cos(A-B) + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos C - \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) \geq 0$$

ពិត។

779.▲ យើងមាន

$$1-\sin\frac{\pi}{14}=\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}+\sin\frac{5\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{14}+\sin\frac{7\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}$$
$$=2\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)\qquad(1)$$
$$\Longrightarrow\quad\frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\qquad(2)$$
$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\qquad(3)$$

តាង $x=\cos\frac{\pi}{7};y=\cos\frac{2\pi}{7},z=\cos\frac{3\pi}{7}$ ។ តាម(២) និង (៣) វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$x+y+z>\sqrt{3(xy+yz+zx)}\qquad(4)$$

ដោយ $x,y,z>0$ នោះ (៤) អាចសរសេរជា

$$(x+y+z)^2>3(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0\qquad(5)$$

ដោយ x,y,z មានតំលៃខុសគ្នា នោះវិសមភាព(៥)ពិត។

780.▲ ដោយ $x_i\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ នោះ

$$\frac{1}{2}\le\sin x_i\le1\quad\Leftrightarrow\quad(\sin x_i-1)\left(\sin x_i-\frac{1}{2}\right)\le0;\quad(i=1;2;\dots 2n)$$
$$\Leftrightarrow\sin^2x_i-\frac{3}{2}\sin x_i+\frac{1}{2}\le0$$
$$\Leftrightarrow\sin x_i+\frac{1}{2\sin x_i}\le\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}\le\frac{3}{2}2n=3n$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}\ge2\sqrt{\frac{1}{2}Y}$$

យើងទាញបាន $Y\le\frac{9}{2}n^2$ ។ យើងមាន $Y=1800;\Longrightarrow n\ge20$ ។សញ្ញាស្មើកើតមានទាល់តែ $\sin x_i=1$ រឺ $\sin x_i=\frac{1}{2}$ និង $\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}$ ។ តាង α ជាចំនួន$\sin x_i=1$ និង β ជាចំនួន $\sin x_i=\frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះ

$$\alpha+\beta=2n;\alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\alpha+\beta \quad \Rightarrow \alpha=\beta=n$$

ដូច្នេះ n តូចបំផុតស្មើ $n=20$ ។

781.▲ យើងមាន

$$\tan\frac{A}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B+C}{4}\right)$$
$$\Rightarrow \tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}$$
$$=1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងទាញបាន

$$\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}$$

$$\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2}$$

ដូច្នេះ

$$1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}+3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2}$$

តាង $t=\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}>0$ ។ ដូច្នេះ

$$1+t^3\geq 3t+3t^2$$
$$\Rightarrow t\leq 2-\sqrt{3}; \text{ រឺ } t\geq 2+\sqrt{3}$$

ដោយ A,B,C ជារង្វាស់មុំក្នុងនៃត្រីកោណ នោះ $0<t<1$ ដូច្នេះ $t\leq 2-\sqrt{3}$ ។ មានន័យថា

$$\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\leq\left(2-\sqrt{3}\right)^3$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $\tan\frac{A}{4}=\tan\frac{B}{4}=\tan\frac{C}{4}=2-\sqrt{3}$ រឺពេល $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ ។ ដូច្នេះតំលៃធំបំផុតគឺ $\max T=\left(2-\sqrt{3}\right)^3$ ។

782.▲ យើងមាន $0<(n+1)x<\pi/2$ ដូច្នេះ $0<nx<\frac{\pi}{2};0<x<\pi/2$ ។ វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$\tan nx\sin x+\cos^{2n}x>1$$

តាង $f(n)=\tan nx\sin x+\cos^{2n}x$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា

$$f(k+1)>f(k),\forall k=0,1,2,\ldots,n-1$$

យើងមាន $\qquad f(k+1)>f(k)$

$$\Leftrightarrow \tan(k+1)x\sin x+\cos^{2(k+1)}x>\tan kx\sin x+\cos^{2k}x$$

$$\Leftrightarrow \cos^{2k} x - \cos^{2k+2} x < \sin x\,(\tan(k+1)x - \tan kx)$$
$$\Leftrightarrow \cos^{2k} x \sin^2 x < \frac{\sin x \sin x}{\cos(k+1)x \cos kx}$$
$$\Leftrightarrow \cos^{2k} x < \frac{1}{\cos(k+1)x \cos kx}$$
$$\Leftrightarrow \cos^{2k} x \cos(k+1)x \cos kx < 1$$

ពិត។ ដូច្នេះ $f(n) > f(n-1) > \cdots > f(0) = 1$ ពិត។

783.▲ បើ A, B, C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណ នោះ

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2};$$
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$27\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right) < 4\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right) < \frac{4}{27}$$

តាង $x = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}; y = \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}; z = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$ ។ ដូច្នេះ $x, y, z > 0; x + y + z = 1$ ហើយវិសមភាពសមមូលនឹង

$$x^2y + y^2z + z^2x < \frac{4}{27} \qquad (1)$$

តាង $P = x^2y + y^2z + z^2x$ ។ សន្មតថា $x \geq y > 0; x \geq z > 0 \implies y^2z \leq xyz; z^2x \leq x^2z$ ។ ដូច្នេះ

$$P = x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2y + xyz + \frac{1}{2}z^2x + \frac{1}{2}x^2z$$
$$= xy(x+z) + \frac{1}{2}xz(x+z)$$
$$= x(x+z)\left(y + \frac{z}{2}\right) = 4.\frac{x}{2}\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(y + \frac{z}{2}\right)$$

ប្រើវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះតួ $\frac{x}{2}, \left(\frac{x+z}{2}\right), \left(y + \frac{z}{2}\right)$ ហើយដោយដឹងថា $\frac{x}{2} \neq \frac{x+z}{2}$ យើងទាញបាន

$$P < 4\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x+z}{2} + y + \frac{1}{2}z}{3}\right)^3 = 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

784.▲ តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនឹងមុំ A, B, C ។ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងមាន

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \sin B = \frac{b}{2R}; \sin C = \frac{c}{2R}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{c^2} = m$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= m(a^2+b^2+2ab\cos C) \\ \Longrightarrow |\cos C| &= \frac{|m-1|}{m}\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq \frac{|m-1|}{m} \\ \Longrightarrow \ \sin^2 C &= 1-\cos^2 C \leq 1-\frac{(m-1)^2}{m^2} = \frac{2m-1}{m^2} \\ \Longrightarrow \sin C &\leq \frac{\sqrt{2m-1}}{m} \end{aligned}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a=b$ រឺ $A=B$។ ដូច្នេះ $\max \sin C = \frac{\sqrt{2m-1}}{m}$ ។

785.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} f(\tan 2x) = \tan^4 x + \cot^4 x &= (\tan^2 x + \cot^2 x)^2 - 2\tan^2 x \cot^2 x \\ &= ((\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x \cot x)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{1}{\sin^2 \cos^2 x} - 2\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{4}{\sin^2 2x} - 4 + 2\right)^2 - 2 \\ &= \left(4\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} + 2\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{4}{\tan^2 2x} + 2\right)^2 - 2 \\ &= \frac{16}{\tan^4 2x} + \frac{16}{\tan^2 2x} + 2 \end{aligned}$$

តាង $t=\tan 2x \ \Longrightarrow \ f(t) = 16/t^4 + 16/t^2 + 2$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} f(\sin x) + f(\cos x) &= 16\left[\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right] + 4 \\ &= 16[4 + 3(\cot^2 x + \tan^2 x) + \cot^4 x + \tan^4 x] + 4 \end{aligned}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\begin{aligned} \cot^2 x + \tan^2 x \geq 2 \\ \cot^4 x + \tan^4 x \geq 2 \end{aligned}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $\tan^2 x = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$f(\sin x) + f(\cos x) \geq 16[4 + 3.2 + 2] + 4 = 196$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ \ (k \in \mathbb{Z})$ ។

786.▲ ជាដំបូងយើងបង្ហាញថាវិសមភាព

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a-t}{b-t} \qquad (1)$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $a,b,t \in \mathbb{R}$ ដែល $a<b; b>t\geq 0$ ។ យើងមាន

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a-t}{b-t} \quad \Leftrightarrow \quad a(b-t) \geq (a-t)b$$
$$\Leftrightarrow \quad ab - at \geq ab - bt$$
$$\Leftrightarrow \quad at \leq bt$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq t(b-a)$$

ពិត។

ក្នុងត្រីកោណABC មួយ បើ $A > B > C$ នោះ $a > b > c$ ដែល a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនឹងមុំ A, B, C ។ យើងមាន $a = 2R\sin A > b = 2R\sin B > c = 2R\sin C$ ដូច្នេះ $\sin A > \sin B > \sin C$ ។

ដែនកំនត់របស់y :

$$\begin{cases} \dfrac{x-\sin A}{x-\sin C} \geq 0 \\ \dfrac{x-\sin B}{x-\sin C} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \sin B \\ x < \sin C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right.$$

ចំពោះ $x \geq \sin A$:

ប្រើវិសមភាព(១)ចំពោះ $t = x - \sin A \geq 0$

$$\frac{x-\sin A}{x-\sin C} \geq \frac{x-\sin A-(x-\sin A)}{x-\sin C-(x-\sin A)} = 0$$
$$\frac{x-\sin B}{x-\sin C} \geq \frac{x-\sin B-(x-\sin A)}{x-\sin C-(x-\sin A)} = \frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}$$
$$\Rightarrow \quad y \geq 0 + \sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $x = \sin A$ ។ ហើយ

$$\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C} \leq 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin A - \sin B \leq 4\sin A - 4\sin C$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 3\sin A + \sin B - 4\sin C$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 3\,(\sin A - \sin B) + (\sin B - \sin C)$$

ពិត។

ចំពោះ $x < \sin C$: យើងមាន

$$y > \sqrt{1} + \sqrt{1} - 1 = 1$$

ដូច្នេះ $\min y = \sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1$ ពេល $x = \sin A$ ។

VI. វិសមីការ

787. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right); n\in\mathbb{Z}$;

788. $[2\pi n-2\pi/3\,;2\pi n+2\pi/3]; n\in\mathbb{Z}$;

789. $(\pi n-\arctan 2\,;\pi n+\pi/3); n\in\mathbb{Z}$;

790. $(\pi n;\pi n+\pi/2]\cup[\pi n+3\pi/4\,;\pi(n+1)); n\in\mathbb{Z}$

791. $(-\pi/4+2\pi n;\pi/6+2\pi n)\cup(5\pi/6+2\pi n;5\pi/4+2\pi n); n\in\mathbb{Z}$

792. $\left(2n-\frac{1}{8};2n+7/8\right); n\in\mathbb{Z}$

793. $\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{5\pi}{24};\frac{\pi(n+1)}{2}+\frac{\pi}{24}\right); n\in\mathbb{Z}$ ● $\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin 4x$

794. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}\cup\left[\pi n-\frac{\pi}{4};\pi n-\pi/6\right]\cup\left[\pi n+\frac{\pi}{6};\pi n+\pi/4\right]; n\in\mathbb{Z}$ ●
$\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 2x\frac{\cos 2x+\cos 4x}{2}=\frac{\cos 2x(2\cos^2 2x+\cos 2x-1)}{2}$

795. $\{\mathbb{R}\}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}\right\}; n\in\mathbb{Z}$

796. $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right); n\in\mathbb{Z}$ ● $\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

797. $\left(\pi n+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3};\pi(n+1)-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right); n\in\mathbb{Z}$ ● $8\sin^6 x-\cos^6 x=(2\sin^2 x-\cos^2 x)(4\sin^4 x+2\sin^2 x\,.\cos^2 x+\cos^4 x)$ បន្ទាប់មកទៀត

$$4\sin^4 x+2\sin^2 x\,.\cos^2 x+\cos^4 x>0,\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

798. $\left(\pi n-\frac{\pi}{4};\pi n-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\pi n+\frac{\pi}{6};\pi n+\frac{\pi}{4}\right); n\in\mathbb{Z}$

799. $\left(2\pi n-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3};2\pi n+\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cup\left(\pi(2n+1);2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right); n\in\mathbb{Z}$ ● តាង $\sin x+\cos x=y$

800. $\left(\arctan(\sqrt{2}-1);\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\pi+\arctan(\sqrt{2}-1)\,;\frac{5\pi}{4}\right)$

801. $\left(\pi n+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2};\pi(n+1)-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right); n\in\mathbb{Z}$

802. $[2\pi n-7\pi/6\,;2\pi n+\pi/6]; n\in\mathbb{Z}$

803. $(\pi/4+\pi n;\pi/2+\pi n); n\in\mathbb{Z}$

804. $[n+1/4\,;n+3/4]; n\in\mathbb{Z}$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

805. ▲ ដោយ $0 \le x \le \pi/4$ នោះ $\cos x \ne 0$ ។ ចែកសមីការទីមួយនឹង $\cos^3 x$ និងតាង $\tan x = t$ យើងទាញបាន

$$(4-6m)t^3 + 3(2m-1)t(t^2+1) + 2(m-2)t^2 - (4m-3)(t^2+1) = 0$$
$$(4-6m)t^3 + (6m-3)t^3 + (6m-3)t + (2m-4)t^2 - (4m-3)t^2 - 4m + 3 = 0$$
$$t^3 - (1+2m)t^2 + 3(2m-1)t - 4m + 3 = 0$$
$$(t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0$$

យើងទាញបាន $t = 1$ ដែលត្រូវនឹង $x = \frac{\pi}{4}$ ជាវឹសមួយនៃប្រព័ន្ធ។ ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានរឹសតែមួយគត់បើលក្ខខណ្ឌមួយក្នុងចំនោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមត្រូវបានបំពេញ

១) សមីការ$t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មាន $\Delta = m^2 - 4m + 3 < 0 \implies 1 < m < 3$

២) សមីការ$t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មានរឹសមួយគត់ស្មើ 1 ។ ដូច្នេះ $1 - 2m + 4m - 3 = 0; m = 1$។ បើ $m = 1$ នោះ $\Delta = 0$ សមីការមានរឹសមួយគត់។

៣) សមីការ$t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មានរឹស $t_1 \le t_2 < 0$ ដូច្នេះ

$$\Delta > 0; t_1 t_2 = 4m - 3 > 0; S = t_1 + t_2 = 2m < 0$$

វិសមីការនេះគ្មានរឹស។

ដូច្នេះដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានរឹសមួយគត់ $1 \le m < 3$ ។

៤. ពហុធា

I. គណនា

806. ▲ លក្ខខណ្ឌដែលអោយសមមូលនឹង

$$P(xy) = P(x).P(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

ក្នុង (1) យើងយក $x = y = 0$ យើងទាញបាន

$$P(0) = P^2(0)$$

ដូច្នេះ $P(0) = 1$ រឺ $P(0) = 0$ ។

១) បើ $P(0) = 1$ នោះ ក្នុង(1) យក $y = 0$ យើងទាញបាន $P(0) = P(x).P(0)$ នោះ

$$P(x) = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

២) បើ $P(0) = 0$ នោះ $P(x) = xQ(x)$ ដែល $Q(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទាបជាង $P(x)$ មួយឯកតា ។ លក្ខខណ្ឌ(1) ទៅជា

$$xyQ(xy) = xyQ(x).Q(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

នោះ $Q(xy) = Q(x).Q(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $Q(x) = 1$ រឺ $Q(x) = x\,Q_1(x)$ ដែល $Q_1(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទាបជាង $Q(x)$ មួយឯកតា។ ដូច្នេះជាសរុបយើងទាញបាន

$$P(x) = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$P(x) = x^n;\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

807. ▲ ដោយដឹងថា $2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2$ នោះលក្ខខណ្ឌដែលអោយសមមូលនឹង

$$P(x + 1) - (x + 1)^2 = P(x) - x^2$$

តាង $Q(x) = P(x) - x^2$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) = Q(x + 1) = \cdots = Q(x + n) = \cdots$ ។ ដូច្នេះ $Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(n) = \cdots$ ។ យើងទាញបាន $Q(x) - Q(0) \equiv 0$ ចំពោះ $x = 0, x = 1, \dots, x = n, \dots$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) - Q(0) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ។ យើងទាញបាន

$$P(x) = x^2 + C$$

ដែល $C = Q(0) = P(0)$ ។ ជំនួសទំនាក់ទំនងដែលបានចូលលក្ខខណ្ឌដើម យើងទាញបាន

$$(x + 1)^2 + C = x^2 + 2x + 1 + C$$

ពិតចំពោះគ្រប់ C ។ ដូច្នេះ

$$P(x) = x^2 + C$$

ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយ។

808. ▲ យើងមាន

$$P((x+1)^2) - (x+1)^2 = P(x^2) - x^2$$

តាង $Q(t) = P(t) - t$ ។ យើងទាញបាន $Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(n^2) = \cdots$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) = Q(0)$ ។ យើងទាញបាន $P(x) = x + C$ ដែល $C = Q(0) = P(0)$ ។ ជំនួសចូលលក្ខខណ្ឌដើម យើងទាញបាន $P(x) = x + C$ ដែលC ជាចំនួនថេរណាមួយ។

809. ▲ ពហុធា $f(x) - 5$ មានរឹសជាចំនួនគត់ a, b, c, d ។ ដូច្នេះ

$$f(x) - 5 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x)$$

ដែល $g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$ និង $b_1, b_2, \dots, b_m$ ជាចំនួនគត់។ សមីការ $f(x) = 8$ សមមូលនឹង

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x) = 3$$

ដូច្នេះបើក្នុងចំនោមចំនួនគត់បួន $x-a, x-b, x-c, x-d$ ស្មើ 1 រឺ -1។ ដូច្នេះត្រូវមានពីរដែលស្មើគ្នា ដែលករណីនេះមិនអាច ព្រោះចំនួនទាំងបួនខុស។

810.▲ តាង $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ ដោយ $a_i \geq 0$ ចំពោះ $i < n$ និង $a_n > 0$ ។ យើងមាន $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ។

តាង $x_{n+1} = x_1$ ។

បើ $n = 1$ យើងទាញបាន $[P(1)]^2 = 1.[P(1)]^2$ ពិត។

បើ $n \geq 2$ យើងមាន

$$P^2(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 X^{2i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j X^{i+j}$$

ចំពោះ $p \in \mathbb{N}^*$ តាង

$$S_p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$S_p \geq \left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p\right]^{\frac{1}{n}} = 1$$

តែថា

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 S_{2i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j S_{i+j} \geq \sum_{i=0}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j = P^2(1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) \geq nP^2(1)$$

ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ។

៥. សមីការអនុគមន៍

I. គណនា

811. ▲ តាមលក្ខខណ្ឌទី១យើងទាញបាន

$$f(f(f(x)+1)) = f(1-x)$$

តាមលក្ខខណ្ឌទី២ យើងទាញបាន

$$f(x)+1 = f(1-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

ជំនួស $t = 1-x$ យើងទាញបាន

$$f(1-t)+1 = f(t)$$

ដូច្នេះ $f(1-x)+1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ជំនួសចូល(1) យើងទាញបានថា គ្មានអនុគមន៍ណាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទេ។

812. ▲ យើងមាន $f(1)+f(2) = 4f(2) \;\Rightarrow f(2) = \frac{f(1)}{3} = \frac{2}{3}$ (1) ។ ចំពោះ $n \geq 3$ យើងមាន

$$\begin{cases} f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n) = n^2 f(n) \\ f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1) \end{cases}$$

យើងទាញបាន $\quad f(n) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1)$

$$\Longrightarrow \qquad f(n) = \frac{n-1}{n+1} f(n-1)$$

ដូច្នេះចំពោះ $n \geq 3$ យើងទាញបាន

$$f(n) = \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2}{(n+1)n\ldots 4} f(2) = \frac{6}{n(n+1)} f(2) = \frac{4}{n(n+1)}$$

813. ▲ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(x)=0$ ជាចំលើយតែមួយគត់។ សន្មតថាចំនោទមានចំលើយ $f(x) \neq 0$ ។ ដូច្នេះមានចំនួន $a \in \mathbb{R}$ ដែល $f(a) = b \neq 0$ ។ យើងយក $y = a$ យើងទាញបាន

$$f(xb) = x^n f(b)$$

តាង $t = xb$ ។ យើងទាញបាន

$$f(t) = \frac{f(b)}{b^n} t^n = Ct^n$$

ដែល C ជាចំនួនថេរ។ ជំនួស $f(x) = Cx^n$ ចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌ យើងទាញបាន $C = 0$ ដូច្នេះ $f(x) = 0$ ។

814. ▲ លក្ខខណ្ឌ $af(x^2 + yz) + bf(y^2 + zx) + cf(z^2 + xy) = 0$ (1) មានលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹង x, y, z ។ ដូច្នេះដោយសារលក្ខណៈនេះ និងដោយសារ a, b, c មិនសូន្យទាំងបីព្រមគ្នា យើងអាចសន្មតថា $a \neq 0$ ។

យក $y = z = 0$ យើងបាន $af(x^2) + (b + c)f(0) = 0 \ \Rightarrow f(x^2) = -\frac{(b+c)f(0)}{a}$ ចំពោះគ្រប់ x ។

យក $x = 0, z = 1$ យើងបាន $af(y) + bf(y^2) + cf(0) = 0$ ។ ដូច្នេះ

$$f(y) = -\frac{bf(y^2) + cf(0)}{a} = -\frac{-\frac{b+c}{a}f(0) + cf(0)}{a} = \frac{b^2 + bc - ac}{a^2}.f(0)$$

ចំពោះគ្រប់ $y \in \mathbb{R}$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $\mathbb{R}$ ។ តាង $f(x) = K$ ។ ជំនួសចូលក្នុង(1) យើងទាញបាន

$$(a + b + c)K = 0$$

បើ $a + b + c \neq 0$ នោះ $K = 0$ ដូច្នេះ $f(x) \equiv 0$ ។

បើ $a + b + c = 0$ នោះ K ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

815. ▲ យក $y = 1$ យើងទាញបាន $f(xf(1)) = x^p$ ។ $f(1)$មិនអាចស្មើសូន្យបានទេ ព្រោះបើស្មើសូន្យ នោះ $f(0) = x^p$ ចំពោះគ្រប់ x មិនអាច។ តាង $c = f(1)$ ដូច្នេះ $f(x) = x^p/c^p$ ។ ដូច្នេះ

$$x^p y^q = f(xf(y)) = \frac{[xf(y)]^p}{c^p} = \frac{x^p y^{p^2}}{c^{p+p^2}}$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $c = 1$ និង $q = p^2$។ បើ $q = p^2$ នោះយើងទាញបាន

$$f(xf(y)) = x^p[f(y)]^p = x^p y^{p^2} = x^p y^q$$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}^+$ ។

816. ▲ ពីលក្ខខណ្ឌទីមួយ ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{Z}$ និង $k \in \mathbb{N}$ យើងមាន

$$\begin{cases} f(m + k.19) \geq f(m) + k.19 \\ f(m - k.19) \leq f(m) - k.19 \end{cases}$$

ពីលក្ខខណ្ឌទីពីរ ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{Z}$ និង $k \in \mathbb{N}$ យើងមាន

$$\begin{cases} f(m + k.99) \leq f(m) + k.99 \\ f(m - k.99) \geq f(m) - k.99 \end{cases}$$

សមីការ $1 = 19x + 99y$ មានរឹស $x = -26 + 99t; y = 5 - 19t, t \in \mathbb{Z}$ ។ ចំពោះ $t = 0; 1$ យើងទាញបាន $(x; y) = \{(-26; 5); (73; -14)\}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{Z}$ យើងមាន

$$f(m+1) = f(m - 19.26 + 99.5) \le f(m + 99.5) - 19.26 \le f(m) + 99.5 - 19.26 = f(m) + 1$$

$$f(m+1) = f(m + 73.19 - 14.99) \ge f(m - 14.99) + 19.73 \ge f(m) - 14.99 + 19.73 = f(m) + 1$$

ដូច្នេះ $f(m+1) = f(m) + 1$ ចំពោះ $m \in \mathbb{Z}$ ។ ដូច្នេះ $f(m+n) = f(m) + n$ ចំពោះគ្រប់ $m, n \in \mathbb{Z}$ ។ យក $m = 0$ យើងទាញបាន $f(n) = f(0) + n$។ តាង $a = f(0)$ ។ ដូច្នេះ $f(n) = a + n$ ។ ជំនួសចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌដើមយើងទាញបាន $f(n) = n + a$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $a \in \mathbb{Z}$ ។

817. ▲ អោយ $x = y = 0$ យើងទាញបាន $f(0) = 0$ ។ អោយ $y = 0$ យើងទាញបាន $xf(x) = f^2(x) \Rightarrow f(x) = 0$ រឺ $f(x) = x$ ។ យើងឃើញថា $f(x) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ រឺ $f(x) = x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលអោយ។ បន្ទាប់មកទៀតយើងបង្ហាញថា បន្សំនៃអនុគមន៍ទាំងពីរមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ មានន័យថា អនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} 0; x \in D_1 \\ x; x \in D_2 \end{cases}$$

ដែល $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទេ។ ឧបមាផ្ទុយពីនេះថា មាន $x_1 \in D_1; x_2 \in D_2$ ដែល $f(x_1) = 0$ និង $f(x_2) = x_2$ ។ ចំពោះ $x_1 \in D_1$ ដែល $x_1 \neq 0$ គេអាចរកបាន មេគុណ a មួយដែល $ax_1 = x_2$ គឺ $a = x_2/x_1$។

ជំនួសy ដោយ x និង x ដោយ y យើងទាញបាន

$$xf(x+y) + yf(y-x) = yf(x+y) + xf(x-y)$$
$$(x-y)f(x+y) = (x-y)f(x-y)$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ

$$f(x+y) = f(x-y)$$

តាង $t = x - y; \Rightarrow x = t + y$ ដូច្នេះ $f(t + 2y) = f(t)$ ចំពោះគ្រប់ $t, y \in \mathbb{R}$ ។ យក $y = bt$ ។ ដូច្នេះ $f\big((1+2b)t\big) = f(t)$ ។ តាង $K = 1 + 2b$ នោះ

$$f(Kt) = f(t)$$

ចំពោះគ្រប់ $K, t \in \mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ ដោយយក $K = a;\ f(ax_1) = f(x_1) \Rightarrow ax_1 = 0$ អាចតែករណី $ax_1 = x_2 = 0$ មួយប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ

$$f(x) = 0 \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R} \text{ រឺ } f(x) = x \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$

818. ▲ អោយ$x = y$ យើងទាញបាន $f(0) = 0$ ។ អោយ $y = 1$ យើងទាញបាន

$$f(x+1)(f(x) - 1) = f(x-1)[f(x) + 1] \qquad (1)$$

អោយ $x=2$ យើងទាញបាន $f(3)(f(2)-1)=f(2)+1$ ។ ដោយ $f(2)\neq 1$ នោះ
$$f(3)=\frac{f(2)+1}{f(2)-1}=1+\frac{2}{f(2)-1}$$
ដោយ $f(2), f(3)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(2)-1$ ត្រូវតែជាតួចែកនៃ 2 ។ ដូច្នេះ

$f(2)-1=2$ នោះ $f(2)=3; f(3)=2$

$f(2)-1=1$ នោះ $f(2)=2; f(3)=3$

$f(2)-1=-1$ នោះ $f(2)=0; f(3)=-1$

$f(2)-1=-2$ នោះ $f(2)=-1; f(3)=0$

1) ករណី $f(2)=3; f(3)=2$

ក្នុង(១) ជំនួស $x=3$ យើងទាញបាន $f(4)=9$ ។ ជំនួស $x=4$ យើងទាញបាន $f(5)=\frac{5}{2}$ មិនយក។

2) ករណី $f(2)=2; f(3)=3$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន
$$f(n)=n, \quad \forall n\in \mathbb{Z}$$
3) ករណី $f(2)=0; f(3)=-1$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន
$$f(n)=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=4k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})\\ -1, & n=4k-1\end{cases}$$
4) ករណី $f(2)=-1; f(3)=0$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន
$$f(n)=\begin{cases}0, & n=3k\\ 1, & n=3k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})\\ -1, & n=3k-1\end{cases}$$
819. ▲ យើងមាន $f(1)=1; f(2)=2$ ។ សន្មតថា $f(k)=k$ ចំពោះ $k=1,2,\dots,n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(n+1)=n+1$ ។

បើ $n+1=2j$ នោះ $1\le j<n$ ហើយ
$$f(n+1)=f(2j)=f(2)f(j)=2j=n+1$$
បើ $n+1=2j+1$ នោះ $1\le j<n$ ហើយ
$$2j=f(2j)<f(2j+1)<f(2j+2)=f(2)f(j+1)=2j+2$$
ដូច្នេះ $2j<f(2j+1)<2j+2$ ។ ដោយ $f(2j+1)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(2j+1)=2j+1=n+1$ ។

820. ▲ យក $x=y$ យើងទាញបាន $0<2f^2(x^2)\le 2f(x)f(x^3)$ ដូច្នេះ $f(x)$ និង $f(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

យក $x=0$ យើងទាញបាន

$$0 < 2f^2(0) \leq f(0)f(y^3) + f(0)f(y)$$
$$f(0)[2f(0) - f(y) - f(y^3)] \leq 0$$

យើងទាញបាន

១) បើ $f(0) < 0$ នោះ $0 > 2f(0) \geq f(y) + f(y^3)$ ហើយដោយ $f(y)$ និង $f(y^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះ $f(y) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $y \in \mathbb{R}$ ។ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែល $f(1999) > 0$ ។

២) បើ $f(0) > 0$ នោះ $0 < 2f(0) \leq f(y) + f(y^3); \forall\, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(y) > 0\,; \forall y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(2000) > 0$ ។

៣) បើ $f(0) = 0$ នោះ តាង $f(x) = x^n g(x)$ ដែល $g(0) \neq 0$ ។ ដោយ $f(x)$ និង $f(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះ $x^n g(x)$ និង $(x^n)^3 g(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។ ដោយ x^n និង $(x^n)^3$ មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះ $g(x)$ និង $g(x^3)$ ក៏ត្រូវតែមានសញ្ញាដូចគ្នាដែរ។ យើងមាន

$$0 < 2x^{4n} g^2(x^2) \leq 2x^n g(x) x^{3n} g(x^3) = 2x^{4n} g(x) g(x^3); \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះ អាច $g(x) > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ រឺ $g(x) < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$។ តែដោយ $f(1999) > 0$ នោះ $g(x) > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ $f(2000) = 2000^n g(2000) > 0$ ។

ឯកសារដើម

សៀវភៅនេះដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅខាងក្រោមនេះ

1. Pierre Bornsztein, *Inégalité*, 2001

2. Hojoo Lee, *Topic in Inequalities-Theorems and Techniques*

3. A.I Prilepko, *Problem Book in High-School Mathematics*, MIR Moscow, 1985*

4. D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Publications, INC. New York, 1993.

5. Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, *The IMO Compendium*, Springer, 2006

6. GS. PHAN ĐỨC CHÍNH, *101 Bài Toán Chọn lọc*, Nhà Xuất Bản Trẻ,1996

7. *Tuyển Tập Đề thi olympic 30-4,Môn Toán*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 1999.

* លំហាត់គ្រឹះស្ទើរតែទាំងអស់ត្រូវបានដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅមួយក្បាលនេះ។

កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា,

កម្រិតវិទ្យាល័យ,

ភាគ ២- ពីជគណិត វិភាគ

ដោយ លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

សៀវភៅកំណែលំហាត់ផ្នែកពីជគណិត ដែលរួមមានសមភាព សមីការ វិសមភាព វិសមីការ នៃអនុគមន៍ធម្មតា អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និង អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ សៀវភៅនេះប្រជុំដោយលំហាត់ងាយ និងពិបាកចំនួនប្រហែលជា៨០០លំហាត់ ដកស្រង់ចេញពីការប្រឡងសិស្សពូកែនៅប្រទេសនានាជុំវិញពិភពលោក។ បើអ្នកចង់ក្លាយជាសិស្សពូកែម្នាក់ សៀវភៅមួយក្បាលនេះប្រហែលជាសៀវភៅដែលអ្នកចង់បាន៕