លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

កំរងលំហាត់គណិតវិទ្យា

កំរិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ១- នព្វន្ត

ផ្សាយលើកទី២

សីហា ២០០៩

ភាគ១ - ធព្វន្ត

ផ្សាយលើកទី១ : គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច -ធព្វន្ត ២០០៨

ភាគ២ - ពីជគណិត វិភាគ

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

ទំនាក់ទំនង

- វិបសាយ http://svichet.wordpress.com/
- អ៊ីមែល lsvichet@yahoo.com

សំគាល់

$x \in [a; b]$ មានន័យថា $a \leq x \leq b$

$x \in (a; b)$ មានន័យថា $a < x < b$

$x \in [a; b)$ មានន័យថា $a \leq x < b$

$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$\mathbb{N}$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $1; 2; 3; \ldots$

$\mathbb{Z}$ សំណុំចំនួនគត់ $\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots$

$\mathbb{Z}_0$ សំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $0; 1; 2; 3; \ldots$

មាតិកា

ផ្នែកទី១ ទ្រឹស្តីបទ

ផ្នែកទី២ លំហាត់

ផ្នែកទី៣ ចំលើយ

និយមន័យ.ទ្រឹស្តីបទ

1. និយមន័យ

ចំនួនគត់ធម្មជាតិ ជាបណ្តាចំនួន $\{1; 2; 3; \dots.\}$ ។

ចំនួនគត់ : $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\{1; 2; 3; \dots\}$

ចំនួនគត់អវិជ្ជមាន $\{\dots; -3; -2; -1\}$

ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$

ចំនួនអសនិទាន ជាចំនួនដែលមិនអាចសរសេរជារាង a/b បាន ដែល $a; b$ ជាចំនួនគត់។

ចំនួនគត់គូ រឺចំនួនគូ ជាចំនួនដែលមានរាង $2p$ ដែល p ជាចំនួនគត់។ ឧទាហរណ៍ $2; 4; 6; 8; ..$ ជាចំនួនគូ។

ចំនួនគត់សេស រឺចំនួនសេស ជាចំនួនដែលមានរាង $2p + 1$ ដែល p ជាចំនួនគត់។ ឧទាហរណ៍ $1; 3; 5; \dots$ ។

■ឧទាហរណ៍: បើ x, y ជា២ចំនួនគត់ ដែល $x+y$ គូ នោះ x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា។

ចំលើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា បើ x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា នោះ $x+y$ សេស។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា។ យើងសន្មតថា x គូ ហើយ y សេស។ ដូច្នេះមានចំនួនគត់ k និង m ដែល $x = 2k$ និង $y = 2m+1$ ។ ដូច្នេះ $x + y = 2k + 2m + 1 = 2(k+m)+1$ ជាចំនួនសេស។

■ឧទាហរណ៍: ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ចំលើយ

យើងសន្មតថា សំនើខាងលើមិនពិត។ មានន័យថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ a,b ដែល $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$។ ក្នុងចំនួនគត់ដែលអាចមានទាំងនោះ សន្មតថា a,b តូចជាងគេ។

$\sqrt{2}=\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a=b\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad a^2=2b^2$

$\Rightarrow \quad a$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $a=2m$ ដែល $m<a$ ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ។

$\Rightarrow \quad 2m^2=b^2$

$\Rightarrow \quad b$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $b=2n$ ដែល $n<b$ ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ។

ដូច្នេះ $\sqrt{2}=\frac{a}{b}=\frac{2m}{2n}=\frac{m}{n}$ ដែល $m<a$ និង $n<b$ មានន័យថា (a,b) មិនមែនជាគូតំលៃតូចបំផុតទេ $\Rightarrow$ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ មានន័យថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

■ឧទាហរណ៍: ចូរបង្ហាញថា $(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}$ **ជាចំនួនគត់គូ ហើយថា** $(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}=b\sqrt{2}$ **ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន** b **និង ចំពោះចំនួនគត់** $n\geq 1$**។**

ចំលើយ

ករណី $n=1$ $\quad (1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=6$ គត់គូ ពិត

$(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2=4\sqrt{2}$ ពិត

សន្មតថាពិត រហូតដល់ $n-1, n>1$ ដូច្នេះ

$$(1+\sqrt{2})^{2n-2}+(1-\sqrt{2})^{2n-2}=2N$$

$$(1+\sqrt{2})^{2n-2}-(1-\sqrt{2})^{2n-2}=a\sqrt{2}$$

ដែល N និង a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

យើងមាន

$$(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}$$
$$=(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^{2n-2}+(1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^{2n-2}$$

$$= (3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2n-2} + (3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2n-2}$$

$$= 12N + 2\sqrt{2}a\sqrt{2}$$

$$= 12N + 4a \quad \text{ជាចំនួនគត់គូ។}$$

ហើយដូចគ្នា

$$(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} = (3a+4N)\sqrt{2}$$

ដូច្នេះសំនើខាងលើ ពិត ចំពោះ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន b និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$។

2. គោលការណ៍ទ្រុងព្រាប

រូប–ទ្រុងព្រាប

"បើមានព្រាបចំនួន $n+1$ ហើយ ទ្រុងមានរន្ធចំនួន n នោះវាត្រូវតែមានព្រាបយ៉ាងតិច២ ដែលស្ថិតនៅក្នុងរន្ធតែមួយ។ "

គោលការណ៍នេះ មើលទៅហាក់ដូចជា ងាយណាស់ នរណាក៏ដឹងដែរ តែវាមានសារៈសំខាន់ខ្លាំងណាស់។ ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនឹងបង្ហាញពីប្រយោជន៍ របស់វា។

■ឧទាហរណ៍: តាង A ជាសំនុំនៃចំនួនគត់២០ ជ្រើសរើសចេញពី ស្វ៊ីតពីជគណិត $1,4,\ldots 100$។ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមានចំនួនគត់២ផ្សេងគ្នាដែលមានផលបូកស្មើ១០៤។

ចំលើយ

យើងចែក ធាតុទាំង៣៤ របស់ស្វ៊ីតនេះ ទៅជា ១៩ក្រុម $\{1\}$, $\{52\}$, $\{4,100\}$, $\{7,97\}$, $\{10,94\}$,…, $\{49,55\}$ ។ ដោយយើងត្រូវជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ចំនួន២០ ចេញពី សំនុំចំនួន១៩ខាងលើ នោះតាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប វាត្រូវតែមានចំនួនគត់២ ដែលស្ថិតនៅក្នុងចំនោមគូណាមួយនៃបណ្តាសំនុំ ខាងលើ ដែលមានផលបូក១០៤។

3. និយមន័យ–ភាពចែកដាច់

បើ $a \neq 0, b$ ជាចំនួនគត់ យើងនិយាយថា a ចែកដាច់ b បើសិនជា មានចំនួនគត់ c មួយ ដែល $ac = b$ ។ យើងសរសេរថា $a \mid b$ ។

4. ទ្រឹស្តីបទ

១– បើ a,b,c,m,n ជាចំនួនគត់ដែល $c \mid a,\ c \mid b$ នោះ $c \mid (am+nb)$

២– បើ x,y,z ជាចំនួនគត់ដែល $x \mid y,\ y \mid z$ នោះ $x \mid z$ ។

៣– បើ $a \mid b$ និង $b \neq 0$ នោះ $1 \leq |a| \leq |b|$

5. ទ្រឹស្តីបទ–វិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

បើ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ គេមានចំនួនគត់ q,r មួយគត់ ដែល

$a = bq + r, 0 \leq r < b$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដំបូងយើងបង្ហាញថា មាន q,r ។ សំនើពិត ដោយយើងយក

$$q = \left[\frac{a}{b}\right] \qquad \text{និង } r = a - bq$$

តែយើងត្រូវបង្ហាញថា $0 \leq r < b$ ។ យើងដឹងថា $q \leq \frac{a}{b} < q+1$

នាំអោយ យើងទាញបាន $0 \leq r < b$ ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងបង្ហាញថា គេមាន q,r តែមួយគត់។ យើងឧបមាថា គេអាចរកឃើញ q,r,q',r' ដែល

$$a = bq + r = bq' + r'$$

$b(q-q')=r'-r$

ដូច្នេះ b ចែក $r'-r$ ដាច់ តែ $|b|>|r'-r|$ ដូច្នេះ មានតែ $r'-r=0$ នាំអោយ $r'=r$ រួចហើយ $q'=q$ ។

គួរកត់សំគាល់ថា ចំពោះចំនួនគត់ $n>0$ មួយ តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ គេអាចចែកសំនុំចំនួនគត់ទៅតាមសំនល់របស់វិធីចែកនឹង n ។ ឧទាហរណ៍ គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ស្ថិតនៅក្នុងចំនោម $3k, 3k-1, \ 3k-2$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត សំនុំ $3k+2, k\in\mathbb{Z}$ ដូចគ្នា នឹង សំនុំ $3k-1, k\in\mathbb{Z}$ ដែរ។

6. និយមន័យ–ចំនួនបឋម

ចំនួនបឋម p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ធំជាង ១ ដែលតួចែករបស់វាមានតែលេខ ១ និង p ។ បើចំនួនគត់ $n>1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម យើងហៅវាថា **ចំនួនពហុគុណ** ។ យើងអាចសរសេរ n ជា $n=ab,$ ដែល $1<a\le b<n, a,b\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍

ចំនួនបឋម: ២ ៣ ៥ ៧ ១១ ១៣ ១៧ ១៩

ចំនួនពហុគុណ ៤ ៦ ៨ ៩ ១០ ១២

១ មិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជា ចំនួនពហុគុណដែរ។

យើងឃើញថា 2 ជាចំនួនបឋមគូតែមួយគត់ ហើយ 2 និង 3 ជាចំនួនគត់តរៀងគ្នា តែមួយគត់ ដែលបឋមទាំង២។

7. និយមន័យ– ភាពសមមូល

សរសេរថា $\quad a\equiv b \pmod n$ អានថា a សមមូល b តាម(modulo) n ។

មានន័យថា n ចែកដាច់ $(a-b)$ រឺ $a = nq + b$ ដែល q ជាចំនួនគត់។

រឺមានន័យម្យ៉ាងទៀតថា a និង b មានសំនល់ដូចគ្នា ពេលចែកជាមួយ n ។

ឧទាហរណ៍ $15=7\times 2+1 \qquad \Rightarrow 15\equiv 1 \pmod 7$ ។

8. ទ្រឹស្តីបទ

តាង $a,b,c,d,m\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}^*$ ដែល $a\equiv b \pmod m$ និង $c\equiv d \pmod m$ ។ នោះ

១– $\qquad a+c\equiv b+d \pmod m$

២– $a-c \equiv b-d \pmod m$

៣– $ac \equiv bd \pmod m$

៤– $a^k \equiv b^k \pmod m$

៥– បើ f ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ នោះ $f(a) \equiv f(b) \pmod m$

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $a \equiv b \pmod m$ និង $c \equiv d \pmod m$ នោះ គេអាចរកបាន $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល

$a = b + k_1 m$ និង $c = d + k_2 m$ ។

ដូច្នេះ

$$a \pm c = b \pm d + (k_1 + k_2)m$$

$$ac = bd + m(k_1 d + k_2 b)$$

ដូច្នេះយើងទាញបានលក្ខណៈលេខ១១ ដល់លេខ១៣។ ចំពោះ លក្ខណៈលេខ១៤ យើងស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើ លក្ខណៈលេខ១៣។

លក្ខណៈលេខ១៥ យើងស្រាយបញ្ជាក់ ដោយប្រើ លក្ខណៈលេខ១៤។

■ឧទាហរណ៍: ចូរគណនា តំលៃសមមូលរបស់ចំនួនការេ តាម១៣ ។

ចំលើយ

សំនួរគឺចង់បាន $r^2 \equiv ? \pmod{13}$ ។

យើងមាន $r^2 \equiv (13-r)^2 \pmod{13}$ ។

$0^2 \equiv 0 \pmod{13}$

$1^2 \equiv 1 \pmod{13}$

$2^2 \equiv 4 \pmod{13}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{13}$

$4^2 \equiv 3 \pmod{13}$

$5^2 \equiv 12 \pmod{13}$

$6^2 \equiv 10 \pmod{13}$

$7^2 \equiv (13-7)^2 = 6^2 \equiv 10 \pmod{13}$

$8^2 \equiv (13-8)^2 = 5^2 \equiv 12 \pmod{13}$

....

ដូច្នេះ ចំនួនការេ សមមូលនឹង $0,1,4,9,3,12,10 \pmod{13}$

9. ទ្រឹស្តីបទ–ភាពចែកដាច់នឹង៩

ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយចែកដាច់នឹង៩ បើសិនជា ផលបូក នៃលេខគ្រប់ខ្ទង់ទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា ចែកដាច់នឹង ៩។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0$

ដោយ $10 \equiv 1 \pmod 9$ នោះ យើងមាន $10^j \equiv 1 \pmod 9$

ដូច្នេះ $n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0$

$\equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_0 \pmod 9$

10. និយមន័យ–តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត

បើ $a,b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំង២ព្រមគ្នា នោះ ចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលចែក a,b ដាច់ទាំង២ ហៅថា **តួចែករួមធំបំផុតរបស់** a និង b ។

គេតាងដោយ (a,b) រឺដោយ $PGCD(a,b)$ ។ ដូច្នេះ បើ $d \mid a$ និង $d \mid b$ នោះ $d \mid (a,b)$ ។

ឧទាហរណ៍–$(68,-6) = 2$, $(1998,1999) = 1$ ។

បើ $(a,b) = 1$ នោះគេនិយាយថា a និង b បឋមនឹងគ្នា។ ដូច្នេះ បើ a និង b បឋមនឹងគ្នា នោះ ចំនួន២នេះមិនអាចមានកត្តារួមធំជាង ១ទេ។

បើ $a,b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំង២ព្រមគ្នា នោះ ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែលជាពហុគុណនៃ a ផងនិង b ផង ហៅថា **ពហុគុណរួមតូចបំផុត** នៃ a និង b ។

គេតាងដោយ $[a,b]$ រឺ $PPCM(a,b)$ ។

ឧទាហរណ៍ $[100,90]=\left[2^2 3^0 5^2, 2^1 3^2 5^1\right]=2^2.3^2.5^2=900$ ។

យើងឃើញថា បើ $a|c$ និង $b|c$ នោះ $[a,b]|c$ ។

11. ទ្រឹស្តីបទបាឆេ–បឺស៊ូត

(Bachet-Bezout)

តួចែករួមធំបំផុតរបស់គ្រប់ចំនួនគត់២ តាងដោយ a,b អាចសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a និង b មានន័យថា មាន២ចំនួនគត់ x,y ដែល $(a,b)=ax+by$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $A=\{ax+by \mid ax+by>0, x,y\in\mathbb{Z}\}$ ។ យើងដឹងថា មានមួយក្នុងចំនោម $\pm a,\pm b$ ជាធាតុរបស់ A ដោយ a,b មិនអាចសូន្យទាំង២។ A មានធាតុតូចបំផុត តាងដោយ d ។ ដូច្នេះ គេមាន x_0,y_0 ដែល $d=ax_0+by_0$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $d=(a,b)$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា $d|a, d|b$ និងថា បើ $t|a$ និង $t|b$ នោះ $t|d$ ។

ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា $d|a$ ។ តាមប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ យើងអាចរកបានចំនួនគត់ q,r ដែល $0\le r<d$ ហើយដែល $a=dq+r$ ។ នោះ

$$r=a-dq=a(1-qx_0)-by_0$$

បើ $r>0$ នោះ $r\in A$ មានតំលៃតូចជាងធាតុតូចជាងគេរបស់ A ដែលតាងដោយ d ដូច្នេះវាផ្ទុយពីការសន្មត។ ដូច្នេះ $r=0$ ។ ដូច្នេះ $dq=a$ មានន័យថា $d|a$ ។ ដូចគ្នា យើងអាចបង្ហាញថា $d|b$ ។

សន្មតថា $t|a, t|b$ ។ នោះ $a=tm, b=tn$ ចំពោះចំនួនគត់ m,n ។ ដូច្នេះ $d=ax_0+by_0=t(mx_0+ny_0)$ មានន័យថា $t|d$ ។ ដូច្នេះ ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

សំគាល់

បន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a,b ចែកដាច់នឹង (a,b) ។

12. កូរ៉ូលែរអឺគ្លីដ

បើ a ចែកដាច់ bc និង បើ $(a,b)=1$ នោះ a ចែកដាច់ c ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $(a,b)=1$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទបាឆេ–ប៊ីស៊ូត គេមានចំនួនគត់ x,y ដែល $ax+by=1$។ ដោយ $a|bc$ នោះ គេមានចំនួនគត់s មួយ ដែល $as=bc$។ នោះ $c=c.1=cax+cby=cax+asy$។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $a|c$។

13. ទ្រឹស្តីបទ

បើ $(a,b)=d$ **នោះ** $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទបាឆេ–ប៊ីស៊ូត គេមានចំនួនគត់ x,y ដែល $ax+by=d$។ ដូច្នេះ $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=1$។ a/d និង b/d ជាចំនួនគត់។ យើងមានបន្សំលីនេអ៊ែរនៃa/d និងb/d ដូច្នេះ $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)$ចែកដាច់បន្សំលីនេអ៊ែរនេះ មានន័យថា ចែក១ដាច់។ យើងទាញបាន $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$។

14. ទ្រឹស្តីបទ

បើ c **ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ** $(ca,cb)=c(a,b)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $d_1=(ca,cb)$ និង$d_2=(a,b)$។ យើងបង្ហាញថា $d_1|cd_2$ និង $cd_2|d_1$។ ដោយ $d_2|a$ និង $d_2|b$ នោះ $cd_2|ca, cd_2|cb$។ ដូច្នេះ cd_2 ជាតួចែករួមរបស់ca និងcb ហើយដូច្នេះ $d_1|cd_2$។ តាមទ្រឹស្តីបទបាឆេ–ប៊ីស៊ូត គេអាចរកបានចំនួនគត់x,y ដែល $d_1=acx+bcy=c(ax+by)$។ តែ $ax+by$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a,b ហើយដូច្នេះ វាចែកដាច់នឹងd_2។ គេមានចំនួនគត់ s ដែល $sd_2=ax+by$។ ដូច្នេះ $d_1=csd_2$ មានន័យថា $cd_2|d_1$។

ចំនាំះ

ដូចគ្នា យើងទាញបាន $(ca,cb)=|c|(a,b)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនសូន្យ c។

15. ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះចំនួនគត់មិនសូន្យ a,b,c **គេមាន** $(a,bc)=(a,(a,b)c)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $(a,(a,b)c)$ ចែកដាច់ $(a,b)c$ នោះ វាចែកដាច់ bc ។ ដូច្នេះ $(a,(a,b)c)$ ចែកដាច់ a និង bc ហើយដូច្នេះ $(a,(a,b)c)|(a,bc)$ ។ម្យ៉ាងវិញទៀត (a,bc) ចែកដាច់ a និង bc នោះ វាចែកដាច់ ac និង bc ។ ដូច្នេះ (a,bc) ចែកដាច់ $(ac,bc)=c(a,b)$ ។ ជាសន្និដ្ឋាន (a,bc) ចែកដាច់ a និង $c(a,b)$ ហើយដូច្នេះ វាចែកដាច់ $(a,(a,b)c)$ ។ ដូច្នេះ ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

16. ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះចំនួនគត់មិនសូន្យ a,b,c **គេមាន** $(a^2,b^2)=(a,b)^2$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

សន្មតថា $(m,n)=1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 15 យើងទាញបាន

$$(m^2,n^2)=(m^2,(m^2,n)n)=(m^2,(n,(m,n)m)n)$$

ដោយ $(m,n)=1$ នោះ កន្សោមខាងលើ ស្មើនឹង (m^2,n) ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 15 ដដែល យើងទាញបាន

$$(m^2,n)=(n,(m,n)m)=1$$

ដូច្នេះ $(m,n)=1$ នាំអោយ $(m^2,n^2)=1$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ 13

$$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=1$$

ដូច្នេះ

$$\left(\frac{a^2}{(a,b)^2},\frac{b^2}{(a,b)^2}\right)=1$$

តាមទ្រឹស្តីបទ 14– ដោយគុណកន្សោមខាងលើនឹង $(a,b)^2$ យើងទាញបាន

$$(a^2,b^2)=(a,b)^2$$

17. ទ្រឹស្តីបទ

បើ $n>1$ នោះ n ចែកដាច់យ៉ាងហោចណាស់ នឹងចំនួនបឋមមួយ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $n>1$ នោះវាមានយ៉ាងហោចណាស់តួចែកមួយ>1។ ដូច្នេះ វាមានតួចែកមួយដែលតូចជាងគេ ហើយធំជាង១ តាងដោយq។ យើងថា q ជាចំនួនបឋម។ បើ q មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះ យើងអាចសរសេរq ជា $q=ab,\ 1<a\le b<q$។ តែបើដូច្នេះ a ជាតួចែករបស់n ដែលធំជាង១ និងតូចជាងq ដែលផ្ទុយនឹងសម្មតិកម្ម ដែលថាq តូចជាងគេ។

18. ទ្រឹស្តីបទអឺគ្លីដ

សំនុំចំនួនបឋម ជាសំនុំអនន្ត។

សំរាយបញ្ជាក់

សន្មតថា សំនុំចំនួនបឋមជាសំនុំកំនត់ កំនត់ដោយ $p_1,\ldots,p_k$។ ដូច្នេះ យើងមិនអាចរកបានចំនួនគត់ណាមួយ ដែលចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋមទាំងនេះទេ។ ពិនិត្យ $n=p_1p_2\ldots p_k+1$ បើ $p_i\,(1\le i\le k)$ ចែកដាច់n នោះ p_i ត្រូវតែចែក១ដាច់ មិនពិត។ ដូច្នេះ សំនុំចំនួនបឋម ជាសំនុំអនន្ត។

19. បទគន្លឹះ

ផលគុណនៃ២ចំនួនដែលមានរាង $4k+1$ ក៏ជាចំនួនដែលមានរាង $4k+1$ ដែរ។

សំរាយបញ្ជាក់

ពិនិត្យ $(4a+1)(4b+1)=4(4ab+a+b)+1$

20. ទ្រឹស្តីបទ

មានចំនួនបឋមដែលមានរាង $4n+3$ ច្រើនរាប់មិនអស់។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិធីផ្ទុយ ដោយសន្មតថាចំនួនបឋមមានរាង $4n+3$ មានចំនួនកំនត់ តាងដោយ $p_1,\ldots,p_k$។ យើងពិនិត្យចំនួន $N=4p_1p_2\ldots p_k+3$។

តាង q ជាតួចែកបឋមមួយរបស់ N ។ យើងពិនិត្យគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ q ដូច្នេះq អាចមានរាង

$$4a, 4a+1, 4a+2, 4a+3$$ ។

$-q$ មិនអាចមានរាង $4a, 4a+2$ ទេ។

$-q = 4a+3$: មិនអាច ព្រោះបើដូច្នេះ នោះ q នឹងទៅជាចំនួនបឋមមួយដែលមានរាង$4n+3$ ហើយនឹងស្មើនឹងចំនួនមួយក្នុងចំនោម $p_i\,(1 \le i \le k)$ (ព្រោះសំនុំចំនួនបឋមមានរាង$4n+3$ មានចំនួនកំនត់)។ បើដូច្នេះ q មិនអាចជាតួចែករបស់ N បានទេ។

–ដូច្នេះមានតែ $q = 4a+1$ ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ N សុទ្ធតែមានរាង$4a+1$ ។ ដូច្នេះN ស្មើនឹងផលគុណនៃបណ្ដាលេខដែលមានរាង$4a+1$, ដូច្នេះ ពេលចែកវានឹង 4 គេបានសំនល់ស្មើ1 ។ តែមិនអាចព្រោះ $N = 4p_1p_2...p_k + 3$ ចែកនឹង៤ មានសំនល់ ស្មើ៣។ដូច្នេះ ចំនួនបឋមដែលមានរាង $4n+3$ មានចំនួនច្រើនមិនកំនត់។

21. ទ្រឹស្តីបទ

បើចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ វាមានកត្តាបឋម p មួយ ដែល $p \le \sqrt{n}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

សន្មតថា $n = ab, 1 < a \le b < n$ ។ បើ a និងb សុទ្ធតែ $> \sqrt{n}$ ទាំង២ នោះ $n = ab > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$ មិនពិត។ ដូច្នេះ n ត្រូវមានកត្តាមួយ$\neq 1$ និង $\le \sqrt{n}$ ។ ដូច្នេះវាត្រូវមានកត្តាបឋមមួយ ដែល $\le \sqrt{n}$ ។

22. ទ្រឹស្តីបទ

បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $\binom{p}{k}$ ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ $0 < k < p$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងមាន $$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)....(p-k+1)}{k!}$$

ដូច្នេះ $$k!\binom{p}{k} = p(p-1)....(p-k+1)$$

ដូច្នេះ នាំអោយ $p \mid k!\binom{p}{k}$ ។ ដោយ $k<p$, នោះ p ចែកមិនដាច់ $k!$ ។ តាមក្លូរ៉ូលែរអឺគ្លីដ នោះ មានតែ $p \mid \binom{p}{k}$ ។

23. ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ សុទ្ធតែអាចបំបែកជាផលគុណនៃបណ្តាចំនួនបឋម។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងពិនិត្យចំនួនគត់ 1332 ។ យើងអាចបំបែកវាជា $1332 = 2.2.3.3.37$ ។ ដោយ $2,3,37$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះយើងមិនអាចបំបែកវាបន្ថែមទៀតទេ។ ក្រោយមកទៀតយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់សុទ្ធតែអាចបំបែកជាផលគុណដូចខាងលើបានទាំងអស់។

យើងពិនិត្យចំនួនគត់ n មួយ។

ក–ករណី n ជាចំនួនបឋម

ខ–ករណី n មិនមែនជាចំនួនបឋម ដូច្នេះយ៉ាងហោចណាស់ មានតួចែកបឋម p_1 មួយដែល

$$n = p_1 q_1 \qquad \text{ដែល} \qquad 1 < q_1 < n$$

យើងមាន២ករណីទៀត

១–ករណី q_1 ជាចំនួនបឋម នោះ $n = p_1 q_1$ ជាផលគុណនៃចំនួនបឋម២។

២–ករណី q_1 មិនមែនជាចំនួនបឋម។ q_1 មានតួចែកបឋម p_2 មួយយ៉ាងតិចដែល $q_1 = p_2 q_2$ និង

$n = p_1 p_2 q_2$ ដែល $1 < q_2 < q_1 < n$ ។

គេធ្វើវិចារដដែលនេះឡើងវិញ ជាបន្តបន្ទាប់ទៅទៀត។ គេបានផលចែកបន្តបន្ទាប់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$1 < \ldots < q_2 < q_1 < n \qquad ។$$

ដូច្នេះ ដោយចំនួនផលចែកមានកំនត់ នោះ មាន k ដែល q_k ជាចំនួនបឋម ហើយស្មើ p_k ។ ដូច្នេះ n អាចសរសេរជា

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k \qquad \text{ដែល } p_1, \ldots, p_k \text{ ជាចំនួនបឋមខុសៗគ្នាឬស្មើគ្នាក៏បាន។}$$

យើងអាចតំរៀបកត្តាបឋមទាំងនោះជារាង

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},\ \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \ldots\ldots, \alpha_k > 0,$$

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_k$$

ដែល p_j ជាបណ្ដាចំនួនបឋមខុសៗគ្នា។ យើងហៅការបំបែកជាផលគុណកត្ដាបឋមនៃ n ខាងលើថា កត្ដាផលគុណរាងកាណូនិចនៃ n ។ ឧទាហរណ៍ $2^3 3^2 5^2 7^3$ ជា កត្ដាផលគុណរាងកាណូនិចនៃ 617400 ។

24. ទ្រឹស្ដីបទគ្រឹះនៃនព្វន្ដ

គ្រប់ចំនួនគត់ >1 អាចបំបែកជាផលគុណកត្ដាបឋមបានតែមួយបែបគត់ បើមិនគិតពីលំដាប់លំដោយនៃកត្ដាទាំងនោះទេ។ រឺនិយាយម៉្យាងទៀតថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ គេមានចំនួនបឋម ដែលខុសគ្នា២ៗ $p_1,\ldots,p_k$ តែមួយបែបគត់ និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ តែមួយបែបគត់ ដែល

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថាវាអាចបំបែកបាន២យ៉ាង

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k \quad \text{និង} \quad n = p'_1 p'_2 \ldots p'_h$$

ដែល $p_1,\ldots,p_k$ និង $p'_1,\ldots,p'_h$ ជាចំនួនបឋមខុសគ្នារឺស្មើគ្នា។

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k = p'_1 p'_2 \ldots p'_h$$

$$p_1 \mid n \Rightarrow \qquad p_1 \mid p'_1 p'_2 \ldots p'_h$$

ដោយ p_1 ជាចំនួនបឋម នោះ p_1 ត្រូវស្មើនឹងចំនួនណាមួយក្នុងចំណោម $p'_1, p'_2, \ldots, p'_h$ ។ ឧបមាថា $p_1 = p'_1$ ។ យើងធ្វើវិចារដដែលនេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួន $p_i \left(1 \leq i \leq k\right)$ យើងទាញបាន

$$\left\{p_1, p_2, \ldots, p_k\right\} \subset \left\{p'_1, p'_2, \ldots, p'_k\right\}$$

ដូចគ្នា $\left\{p_1, p_2, \ldots, p_k\right\} \supset \left\{p'_1, p'_2, \ldots, p'_k\right\}$

នាំអោយ

$$\left\{p_1, p_2, \ldots, p_k\right\} = \left\{p'_1, p'_2, \ldots, p'_k\right\}$$

ដូច្នេះ n អាចដាក់ជាផលគុណកត្ដាបឋមបានតែម៉្យាងគត់។

ទ្រឹស្តីបទខាងលើ នាំអោយយើងទាញបានទំនាក់ទំនងសំរាប់គណនា $PGCD$ និង $PPCM$ នៃចំនួនគត់២បើសិនជាយើងស្គាល់ផលគុណកត្តាបឋមរបស់វា។ តាង

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

ដែលក្នុងនោះ បណ្តា p_i ខុសគ្នា២ៗ តែបណ្តា α_i និង β_i អាចស្មើ០។ យើងមាន

$$PGCD(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}.$$

$$PPCM(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

គួរកត់សំគាល់ថា ចំពោះចំនួនពិត α និង β យើងមាន

$$\min(\alpha,\beta) + \max(\alpha,\beta) = \alpha + \beta.$$

នាំអោយយើងទាញបាន

$$PGCD(a,b).PPCM(a,b) = ab$$

25. ប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

តាង a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បន្ទាប់ធ្វើប្រមាណវិធីចែកបន្តបន្ទាប់គ្នា យើងទាញបានស៊េរីនៃវិសមភាពដូចតទៅៈ

$$a = bq_1 + r_2; \quad 0 < r_2 < b$$

$$b = r_2 q_2 + r_3; \quad 0 < r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3 q_3 + r_4; \quad 0 < r_4 < r_3$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n; \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n$$

ស៊េរីនៃសំណល់នឹងទៅដល់ r_{n+1} ដែលនឹងស្មើ០។ ដោយ $b, r_2, r_3, \dots$ ជាស្វ៊ីតចុះនៃបណ្តាចំនួនគត់ ដូច្នេះ ស្វ៊ីតនេះ មិនអាចចំនួនតួវិជ្ជមានលើសពី b ទេ។

ប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ តាមពិតទៅគឺជា $(a,b) = (b,r_2) = (r_2,r_3) = \dots = (r_{n-1},r_n) = r_n$ ។

26. ទ្រឹស្តីបទ

បើ a,b,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ

$$(a,b)=(a+nb,b)$$

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $d=(a,b)$ និង $c=(a+nb,b)$ ។ ដោយ $d\mid a$ និង $d\mid b$ នោះ $d\mid(a+nb)$ ។ ដូច្នេះ d ជាតួចែករួមរបស់ b និង $a+nb$ ។មានន័យថា $d\mid c$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត $c\mid(a+nb)$ នោះ $c\mid(a+nb-nb)=a$ ។ ដូច្នេះ c ជាតួចែករួមនៃ a និង b មានន័យថា $c\mid d$ ។

ដូច្នេះ $d\mid c$ និង $c\mid d$ នាំអោយ $c=d$ ។

■ឧទាហរណ៏: ចូរគណនា $(3456,246)$

ចំលើយ

$(3456,246)=(13.246+158,246)=(158,246)$

$(158,246)=(158,158+88)=(88,158)$

$(88,158)=(70,88)=(18,70)=(16,18)=(2,16)=2$

ដូច្នេះ $(3456,246)=2$

27. ទ្រឹស្តីបទ

បើ r_n ជាសំនល់ចុងក្រោយ មុនសូន្យ នៅក្នុងប្រមាណវិធីចែកអឺគ្លីដ នោះ

$$r_n=(a,b)$$

សំរាយបញ្ជាក់

$r_2=a-bq_1$

$r_3=b-r_2q_2$

$r_4=r_2-r_3q_3$

$r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_{n-1}$

$r_{n+1}=0=r_{n-1}-r_nq_n$

តាង $r=(a,b)$ ។ សមីការទីមួយ នាំអោយ $r\mid r_2$ ។ ទី២នាំអោយ $r\mid r_3$ ។ បន្តបន្ទាប់មកទៀត $r\mid r_n$ ។

តែដោយចេញពីសមីការចុងក្រោយវិញ ហើយបកទៅលើ យើងឃើញថា $r_n\mid r_{n-1}, r_n\mid r_{n-2},\dots,r_n\mid b, r_n\mid a,$

ដូច្នេះ r_n ជាតួចែករួមរបស់ a និង b ដូច្នេះ $r_n\mid(a,b)$ រឺក៏ $r_n\mid r$ ។ មានន័យថា $r_n=r$ ។

■ឧទាហរណ៍: គណនា $(23,29)$

ចំលើយ

យើងមាន

$$29=1.23+6$$

$$23=3.6+5$$

$$6=1.5+1$$

$$5=5.1+0$$

សំនល់មុនសូន្យគឺ ១ ដូច្នេះ $(23,29)=1$។

28. ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា a,b,c ជាចំនួនគត់ដែល $(a,b)|c$។ បើគេស្គាល់គូចំលើយ (x_0,y_0) នៃសមីការ ដ្យូផង់ $ax+by=c$ នោះចំលើយផ្សេងទៀតនៃសមីការនេះ នឹងមានរាង

$$x=x_0+t\frac{b}{d}, y=y_0-t\frac{a}{d}$$

ដែល $d=(a,b)$ និង $t\in\mathbb{Z}$។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងថា បើ (x_0,y_0) ជាចំលើយរបស់សមីការ $ax+by=c$ នោះ $x=x_0+t\frac{b}{d}, y=y_0-t\frac{a}{d}$ ក៏ជាចំលើយដែរ។ តែយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំលើយទាំងអស់ នឹងមានរាងបែបនេះទាំងអស់។

សន្មតថា (x',y') ផ្ទៀងផ្ទាត់ $ax'+by'=c$ ។ ដូចគ្នាដែរ $ax_0+by_0=c$ ។ ដូច្នេះយើងមាន

$$a(x'-x_0)=b(y_0-y')$$

ចែកអង្គទាំង២នឹង $d=(a,b)$

$$\frac{a}{d}(x'-x_0)=\frac{b}{d}(y_0-y')$$

ដោយ $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ នោះ $\frac{a}{d}|(y_0-y')$ ដោយយោលតាមក្សរ៉ូលែរអឺគ្លីដ។ ដូច្នេះគេមានចំនួនគត់ t ដែល

$t\frac{a}{d}=y_0-y'$ នាំអោយ $y=y_0-t\frac{a}{d}$ ។ ចេញពីនេះ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{d}(x'-x_0)=\frac{b}{d}t\frac{a}{d}$$

មានន័យថា $x'=x_0+t\frac{b}{d}$ ។

29. និយមន័យ–សមីការសមមូលលីនេអ៊ែរ

សមីការសមមូលអញ្ញាត x មួយកំនត់ដោយ $ax\equiv b \bmod n$ ។ កន្សោម $ax\equiv b \bmod n$ មានន័យថា មាន $t\in\mathbb{Z}$ ដែល $ax=b+nt$ ។ ដូច្នេះ សមីការសមមូលអញ្ញាត x ដែល $ax\equiv b \bmod n$ មានចំលើយ លុះត្រាតែសមីការដ្យូផង់ $ax+ny=b$ មានចំលើយ និងច្រាសមកវិញ។ ដូច្នេះ យើងឃើញថា សមីការសមមូល

$$ax\equiv b \bmod n$$

មានចំលើយតែក្នុងករណី $(a,n)|b$ មួយប៉ុណ្ណោះ។

30. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយចំនួនគត់ a,b,n ។ បើសមីការសមមូល $ax\equiv b(\bmod n)$ មានចំលើយមួយ នោះ វាមានចំលើយមិនសមមូលគ្នា តាម n ចំនួន (a,n) ។

សំរាយបញ្ជាក់

ពីទ្រឹស្តីបទ28 យើងទាញបាន សមីការដ្យូផង់លីនេអ៊ែរ $ax+ny=b$ មានចំលើយមានរាង

$$x=x_0+n\frac{t}{d}, y=y_0-a\frac{t}{d}, d=(a,n), t\in\mathbb{Z}$$

យើងអោយ t មានតំលៃ $t=0,1,\dots,(d-1)$ យើងទាញបាន ចំលើយមិនសមមូលគ្នាតាម n ចំនួន d ព្រោះតំលៃដាច់ខាតនៃផលសងរវាងចំលើយទាំងនោះ២ៗមានតំលៃតូចជាង n ។ បើ $x=x_0+n\frac{t'}{d}$ ជាចំលើយមួយផ្សេងទៀត នោះយើងសរសេរ t' ជា $t'=qd+r, 0\le r<d$ ។ នោះ

$$\begin{aligned} x &= x_0+n\frac{qd+r}{d} \\ &= x_0+nq+n\frac{r}{d} \\ &\equiv x_0+n\frac{r}{d} \qquad (\bmod n) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ គ្រប់ចំលើយទាំងអស់របស់សមីការសមមូល $ax \equiv b\left(\bmod n\right)$ សមមូលតាមn ទៅនឹងតំលៃមួយនិងតែមួយគត់ក្នុងតំលៃចំនួនd ផ្សេងៗគ្នានៃ $x_0 + n\frac{t}{d}, 0 \le t \le d-1$។ ដូច្នេះ បើសមីការមានចំលើយមួយ នោះ មានចំលើយមិនសមមូលគ្នាតាមn ចំនួនd ។

■ឧទាហរណ៍: **ចូរគណនាចំលើយ របស់សមីការសមមូល** $5x \equiv 3\left(\bmod 7\right)$

ចំលើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ30 សមីការនេះមានចំលើយតែមួយគត់តាម 7 ព្រោះ$\left(5,7\right)=1$។

ជាដំបូងយើងដោះស្រាយសមីការ $5x+7y=1$។

$$7 = 5.1 + 2$$

$$5 = 2.2 + 1$$

$$2 = 2.1$$

ដូច្នេះ

$$1 = 5 - 2.2$$

$$2 = 7 - 5.1$$

នាំអោយ

$$1 = 5 - 2.2 = 5 - 2\left(7-5.1\right) = 5.3 - 7.2$$

ដូច្នេះ $3 = 5\left(9\right) - 7\left(6\right)$ នាំអោយ $5.9 \equiv 3\left(\bmod 7\right)$ ។ដូចគ្នាដែរ $5.2 \equiv 3\left(\bmod 7\right)$ ។ ដូច្នេះ $x \equiv 2\left(\bmod 7\right)$ ។

■ឧទាហរណ៍: **ដោះស្រាយសមីការសមមូល** $3x \equiv 6\left(\bmod 12\right)$

ចំលើយ

ដោយ $\left(3,12\right)=3$ ហើយ $3|6$ នោះ សមីការសមមូលខាងលើ មានចំលើយ៣ដែលមិនសមមូលគ្នាតាម១២។ យើងពិនិត្យឃើញថា$x=2$ ជាចំលើយមួយ។ តាមទ្រឹស្តីបទ30 គ្រប់ចំលើយទាំងអស់មានរាង $x = 2 + 12\frac{t}{3} = 2 + 4t, t \in \mathbb{Z}$ ។ ដោយអោយ$t = 0,1,2$ នោះចំលើយមិនសមមូលគ្នាទាំង៣របស់សមីការសមមូលតាម១២គឺ $x = 2,6,10$ ។

31. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយចំនួនគត់ x,y និង ចំនួនគត់មិនសូន្យ a,n។ នោះ

$$ax\equiv ay \pmod n$$

លុះត្រាតែ $x\equiv y\left(\bmod \dfrac{n}{(a,n)}\right)$ **និងច្រាសមកវិញ។**

សំរាយបញ្ជាក់

បើ $ax\equiv ay \pmod n$ នោះ $a(x-y)=sn$ ចំពោះចំនួនគត់ s ណាមួយ។ ដូច្នេះ

$$(x-y)\frac{a}{(a,n)}=s\frac{n}{(a,n)}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ13 យើងទាញបាន $\left(\dfrac{a}{(a,n)},\dfrac{n}{(a,n)}\right)=1$ ។ តាម ទ្រឹស្តីបទ12 យើងទាញបាន

$$\frac{n}{(a,n)}\mid(x-y)$$

ដូច្នេះ

$$x\equiv y\left(\bmod \frac{n}{(a,n)}\right)$$

ច្រាសមកវិញ បើ $x\equiv y\left(\bmod \dfrac{n}{(a,n)}\right)$ នោះ

$$ax\equiv ay\left(\bmod \frac{an}{(a,n)}\right)$$

ដោយគុណអង្គទាំង២នឹងa ។ ដោយ (a,n) ចែកដាច់a នោះសមីការសមមូលខាងលើនាំអោយយើងទាញបាន ថា $ax-ay=tn$ ចំពោះចំនួនគត់ t ណាមួយ។

32. កូរ៉ូលែរ

បើ $ax\equiv ay \pmod n$ និង $(a,n)=1$ នោះ $x\equiv y \pmod n$

33. ទ្រឹស្តីបទប្រូបិន

គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b ។ បើ $(a,b)=1$ នោះ ចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $ar+bs=m$ បាន ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន r,s ស្មើនឹង $(a-1)(b-1)/2$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងសន្មតហៅថា n ជាចំនួនអាចបំបែកបាន តាម a,b បើសិនជាចំពោះចំនួនគត់ a,b ដែលអោយ នោះ គេមានចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន r,s ដែល $ar+bs=n$ ។

យើងពិនិត្យតារាងដែលចំនួនធាតុមិនកំនត់ខាងក្រោម

0	1	2	....	k	....	$a-1$
a	$a+1$	$a+2$	....	$a+k$	....	$2a-1$
$2a$	$2a+1$	$2a+2$	....	$2a+k$	....	$3a-1$
....	....	....	....	....	.....	....

ជួរឈរនិមួយៗនៃតារាងនេះ ជាស្ទីតនព្វន្ត ដែលមានផលសងរួមស្មើ a ។ ចំនួននៅពីក្រោម n ក្នុងតារាងនេះ គឺ $n+ka$ ដែល k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ យើងដឹងថាបើ n អាចបំបែកបាន នោះ $n+ka$ ក៏អាចបំបែកបានដែរ ដូច្នេះនាំអោយយើងទាញបានថា បើចំនួនគត់ n មួយអាចបំបែកបាន នោះគ្រប់ចំនួនគត់ដែលនៅពីក្រោមវាសុទ្ធតែអាចបំបែកបានទាំងអស់។ គ្រប់ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ b សុទ្ធតែអាចបំបែកបានទាំងអស់។ យើងនិយាយថា គ្មានចំនួនពហុគុណនៃ b ២ខុសគ្នាតាងដោយ vb និង wb ដែល $0\le v,w\le a-1$ អាចស្ថិតនៅក្នុងជួរឈរតែមួយនៃតារាងខាងលើបានទេ។ បើមិនអញ្ចឹងទេ នោះ យើងនឹងមាន $vb\equiv wb(\bmod a)$ ។នាំអោយ $b(v-w)\equiv 0(\bmod a)$ ។ ដោយ $(a,b)=1$ និងដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ២១៧ យើងទាញបាន $v-w\equiv 0(\bmod a)$ ។ ដោយ $0\le v,w\le a-1$ នោះយើងទាញបាន $v=w$ ។

ឥលូវយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ក្នុងតារាង ដែលនៅពីលើចំនួនមួយដែលជាពហុគុណនៃ b តាងដោយ $vb,\ 0\le v\le a-1$ សុទ្ធតែជាចំនួនមិនអាចបំបែកបាន។ ចំពោះចំនួនដែលនៅពី vb មានរាង $vb-ka$ ចំពោះចំនួនគត់ k មួយ។ បើ $vb-ka$ អាចបំបែកបានចំពោះ a,b នោះ $ax+by=vb-ka$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x,y ណាមួយ។ $\Rightarrow$ $by\le ax+by=vb-ka<vb$ ។ ដូច្នេះ $0\le y<v<a$ ។ $\Rightarrow$ $y\not\equiv v(\bmod b)$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ២ចំនួនស្ថិតនៅលើជួរឈរតែមួយ សមមូលគ្នាតាម a ។ $\Rightarrow$

$vb \equiv bv - ka \equiv ax + by \pmod{a} \Rightarrow bv \equiv by \pmod{a}$ ។ តាមក្បួនលៃ ៣២០ យើងទាញបាន $v \equiv y \pmod{a}$ ។ តែយ៉ាងនេះ វាផ្ទុយនឹងការពិតដែល $0 \le y < v < a$ ។

ដូច្នេះ ចំនួននៃចំនួនមិនអាចបំបែកបានតាម a,b ស្មើនឹងចំនួននៃចំនួនដែលនៅពីលើចំនួនដែលមានរាង $vb, 0 \le v \le a-1$ ។ នៅលើជួរឈរទី j គេមានចំនួន $(vb-i)/a$ ពីលើ vb ។ ដូច្នេះចំនួននៃចំនួនដែលមិនអាចបំបែកបានតាម a,b ស្មើនឹង

$$\sum_{v=0}^{a-1}\sum_{j=0}^{a-1}\frac{vb-j}{a}=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

ចំនួនគត់ដែលមិនអាចបំបែកបានធំបំផុតស្ថិតនៅចំពីលើ $(a-1)b$ ដូច្នេះ ចំនួនគត់ដែលមិនអាចបំបែកបានធំបំផុត មានតំលៃស្មើនឹង $(a-1)b-a$ ។

34. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយ a,b ជាចំនួនគត់ បឋមរវាងគ្នា។ សមីការ

$$ax + by = n$$

គ្មានចំលើយជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x,y ចំពោះ $n = ab - a - b$ ។ បើ $n > ab - a - b$ នោះ សមីការនេះ មានចំលើយជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនា x ដែល $x \equiv 3 \pmod{5}$ និង $x \equiv 7 \pmod{11}$

ចំលើយ

ដោយ $x = 3 + 5a$ ដូច្នេះ $11x = 33 + 55a$ ។ ដោយ $x = 7 + 11b$ ដូច្នេះ $5x = 35 + 55b$ ។ ដូច្នេះ $x = 11x - 10x = 33 - 70 + 55a - 110b$ មានន័យថា $x \equiv -37 \equiv 18 \pmod{55}$ ។ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានថា $x = 18 + 55t, t \in \mathbb{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការសមមូលដែលអោយ។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនាចំនួនគត់ n មួយ ដែល ពេលចែកនឹង 4 សល់សំនល់ ២, ពេលចែកនឹង៥ សល់សំនល់១ ហើយ ពេលចែកនឹង៧ សល់សំនល់១។

ចំលើយ

យើងចង់បាន n ដែល

$n \equiv 2(\bmod 4)$

$n \equiv 1(\bmod 5)$

$n \equiv 1(\bmod 7)$

$\Rightarrow$

$35n \equiv 70(\bmod 140)$

$28n \equiv 28(\bmod 140)$

$20n \equiv 20(\bmod 140)$

យើងមាន

$n = 21n - 20n = 3(35n - 28n) - 20n$

ដូច្នេះ $n \equiv 3(70 - 28) - 20 \equiv 106(\bmod 140)$

$\Rightarrow$ $n \equiv 106(\bmod 140)$

35. ទ្រឹស្តីបទចិន

គេអោយ $m_1, m_2, ..., m_k$ ជាចំនួនវិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នាពីរៗ ហើយនិមួយៗធំជាង១។ តាង $a_1, a_2, ..., a_k$ ជាចំនួនគត់ណាមួយ។ នោះប្រព័ន្ធសមីការសមមូល

$x \equiv a_1 (\bmod m_1)$

$x \equiv a_2 (\bmod m_2)$

$\vdots$

$x \equiv a_k (\bmod m_k)$

មានចំលើយ ហើយតែមួយគត់តាម $m_1 m_2 ... m_k$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $P_j = m_1 m_2 ... m_k / m_j, 1 \le j \le k$ ។ តាង Q_j ដែល $P_j Q_j \equiv 1(\bmod m_j)$ ។ យើងដឹងថា មានQ_j ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ ព្រោះគ្រប់ m_i បឋមរវាងគ្នា២ៗ។ យើងបង្កើតចំនួន

$x = a_1 P_1 Q_1 + a_2 P_2 Q_2 + ... + a_k P_k Q_k$

យើងឃើញថាចំនួនខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ។

ដើម្បីបង្ហាញថា ចំលើយមានតែមួយ យើងសន្មតថា មាន y ផ្សេងទៀត ដែល $y \equiv a_j (\bmod m_j)$ ចំពោះគ្រប់ $j \in \{1, 2, .., k\}$ ។ ដូច្នេះ $y - x \equiv 0(\bmod m_j)$ ចំពោះគ្រប់ j ។ យើងទាញបានថា m_j និមួយៗចែកដាច់

$(y-x)$ ។ ដោយ m_j បឋមរវាងគ្នា២ៗ នោះ យើងទាញបាន $m_1m_2...m_k \mid (y-x)$ ។រឺនិយាយម្យ៉ាងទៀត $y \equiv x(\bmod m_1m_2...m_k)$ ។

■ឧទាហរណ៍ : តើគេអាចរកបាន១លានចំនួនគត់តរៀងគ្នាដែលចំនួនទាំងអស់នោះ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹងចំនួនការេ រឺទេ?។

ចំលើយ

តាង $p_1, p_2, ..., p_{1,000,000}$ ជា១លានចំនួនគត់បឋមគ្នា២ៗផ្សេងគ្នា។ តាមទ្រឹស្តីបទចិន ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានចំលើយ

$$x \equiv -1\left(\bmod p_1^2\right)$$
$$x \equiv -2\left(\bmod p_2^2\right)$$
$$\vdots$$
$$x \equiv -1,000,000\left(\bmod p_{1,000,000}^2\right)$$

បណ្តាចំនួន $x+1, x+2, ..., (x+1000000)$ ជា១លានចំនួនគត់តរៀងគ្នា ដែលនិមួយៗចែកដាច់នឹងការេនៃចំនួនបឋម។

36. ផ្នែកគត់ និង ផ្នែកទសភាគ

ផ្នែកគត់នៃ x តាងដោយ $[x]$ ។

ឧទាហរណ៍ $[3.78]=3$ ។ យើងមាន $x-1<[x]\le x$ រឺក៏ $[x]\le x<[x]+1$ ។

គេប្រើសញ្ញាសំគាល់ $\{x\}=x-[x]$ តាងអោយផ្នែកទសភាគ។

ដូច្នេះ $x=[x]+\{x\}, 0\le\{x\}<1$

37. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ។ នោះ

១) $[\alpha+a]=[\alpha]+a$

២) $\left[\frac{\alpha}{n}\right]=\left[\frac{[\alpha]}{n}\right]$

៣) $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$

សំរាយបញ្ជាក់

១) តាង $m=[\alpha+a]$ ។ ដូច្នេះ $m\le\alpha+a<m+1$ ។ $\Rightarrow$ $m-a\le\alpha<m-a+1$ មានន័យថា $m-a=[\alpha]$ ។

២) $\frac{\alpha}{n}=\left[\frac{\alpha}{n}\right]+\theta, 0\le\theta<1$ $\Rightarrow$ $\alpha=n\left[\frac{\alpha}{n}\right]+n\theta$

ដោយ $n\left[\frac{\alpha}{n}\right]$ ជាចំនួនគត់ នោះតាម(១) យើងទាញបាន

$$[\alpha]=\left[n\left[\frac{\alpha}{n}\right]+n\theta\right]=n\left[\frac{\alpha}{n}\right]+[n\theta]$$

$\Rightarrow$ $\frac{[\alpha]}{n}=\left[\frac{\alpha}{n}\right]+\frac{[n\theta]}{n}$

ដោយ $0\le[n\theta]\le n\theta<n$ ដូច្នេះ $0\le\frac{[n\theta]}{n}<1$ ។

$\Rightarrow$ $\left[\frac{\alpha}{n}\right]=\left[\frac{[\alpha]}{n}\right]$

៣) តាមវិសមភាព $\alpha-1<[\alpha]\le\alpha, \beta-1<[\beta]\le\beta$ យើងទាញបាន

$$\alpha+\beta-2<[\alpha]+[\beta]\le\alpha+\beta$$

ដោយ $[\alpha]+[\beta]$ ជាចំនួនគត់តូចជាងរឺស្មើ $\alpha+\beta$ នោះវាត្រូវតែតូចជាងរឺស្មើផ្នែកគត់របស់ $\alpha+\beta$ ។ មានន័យថា $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]$

$$\alpha+\beta-2<[\alpha]+[\beta]$$

$\Rightarrow$ $\alpha+\beta<[\alpha]+[\beta]+2$

$\Rightarrow$ $[\alpha+\beta]<[\alpha]+[\beta]+2$

$\Rightarrow$ $[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x, y\in\mathbb{R}$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$[x]+[x+y]+[y]\le[2x]+[2y]$$

ចំលើយ

យើងមាន $x=[x]+\{x\}$ និង $y=[y]+\{y\}$ ។ ដូច្នេះ

$$[2x]+[2y]=2[x]+[2\{x\}]+2[y]+[2\{y\}]$$

និង $\quad [x+y]=[x]+[y]+\left[\{x\}+\{y\}\right]$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]\geq\left[\{x\}+\{y\}\right]$$

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $\{x\}\geq\{y\}$ ។ យើងដឹងថា $\{x\}$ ជាចំនួនមិនតូចជាងសូន្យ។ យើងមាន

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]\geq\left[2\{x\}\right]\geq\left[\{x\}+\{y\}\right] \quad \text{ពិត។}$$

38. ទ្រឹស្តីបទ

បើ a,b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា ចូរបង្ហាញថា

$$\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{2b}{a}\right]+\ldots\left[\frac{(a-1)b}{a}\right]=\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{2a}{b}\right]+\ldots.+\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]$$
$$=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ពិនិត្យចតុកោណកែងមួយ ដែលមានកំពូលត្រង់ $(0,0),(0,b),(a,0),(a,b)$ ។ ចតុកោណកែងនេះ មាន $(a-1)(b-1)$ ចំនុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់។ ចតុកោណកែងនេះចែកជា២ចំនែកស្មើគ្នាដោយបន្ទាត់ $y=\dfrac{xb}{a}$ ។ យើងនិយាយថា គ្មានចំនុចណាមួយ ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នេះ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ទេ លើកលែងតែចំនុចចុងទាំង២។ បើសិនជាមានចំនុចមានកូអរដោនេគត់ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នេះ ត្រង់ (m,n) ដែល $0<m<a,0<n<b$ នោះ $\dfrac{n}{m}=\dfrac{b}{a}$ ។ នោះ មានន័យថា $\dfrac{b}{a}$ អាចបង្រួមទៅជា $\dfrac{n}{m}$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែល a,b បឋមរវាងគ្នា ។

ចំនុច $L_k=\left(k,\dfrac{kb}{a}\right),1\leq k\leq a-1$ ជាបណ្តាចំនុចដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នេះ។ $\left[\dfrac{kb}{a}\right]$ ស្មើនឹងចំនួនចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ឈរ ចេញពី $(k,0)$ ទៅ $\left(k,\dfrac{kb}{a}\right)$។ដូច្នេះ $\sum\limits_{k=1}^{a-1}\left[\dfrac{kb}{a}\right]$ ជាចំនួនចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលស្ថិតនៅក្នុងពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងក្រោមរបស់ចតុកោណកែង។ ដូចគ្នាដែរ $\sum\limits_{k=1}^{a-1}\left[\dfrac{ka}{b}\right]$ ជាចំនួនចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលស្ថិតនៅក្នុងពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងលើរបស់ចតុកោណកែង។ ដោយជាសរុបមាន $(a-1)(b-1)$ ចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ហើយចែកស្មើគ្នាផ្នែកខាងលើនិងខាងក្រោមចតុកោណកែង។ ដូច្នេះសំនើខាងលើពិត។

39. ទ្រឹស្តីបទឌីប៉ូលីញ៉ាក់

(De Polignac)

តាង p ជាចំនួនបឋម។ ចំនួនគត់ធំបំផុត k ដែល p^k ចែកដាច់ $n!$ កំនត់ដោយ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

សំរាយបញ្ជាក់

ក្នុងចំនោមចំនួនគត់ពី១ដល់ n, ចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង p, មានចំនួន $\left[\frac{n}{p}\right]$, ចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង p^2, មានចំនួន $\left[\frac{n}{p^2}\right]$,.....។ ដូច្នេះ $n!$ ចែកដាច់នឹង p ស្វ័យគុណ$\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...\right)$។ ឧទាហរណ៍៖

$10!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$ ។

ពី១ដល់១០ ចំនួនចែកដាច់នឹង៣មានចំនួន៣គឺ ៣,៦,៩។ ចំនួនចែកដាច់នឹង$3^2=9$ មានចំនួន១គឺ៩។ ដូច្នេះ $10!$ ចែកដាច់នឹង $3^{3+1}=3^4$ ។

■ឧទាហរណ៍ : តើមានលេខសូន្យចំនួនប៉ុន្មាននៃខាងចុង $300!$

ចំលើយ

លេខសូន្យខាងចុង$300!$ ស្មើនឹង ចំនួនដែលជាស្វ័យគុណនៃ១០ ធំបំផុតដែលចែកដាច់$300!$ មានន័យថា 10^k ធំបំផុតដែលចែកដាច់$300!$។ យើងមិនអាចយករូបមន្ត ឌីប៉ូលីញ៉ាក់ មកប្រើដោយផ្ទាល់បានទេ ព្រោះ១០មិនមែនជាចំនួនបឋម។ តែ $10=5.2$ ។ ដូច្នេះ k ធំបំផុត ដែល 10^k ចែកដាច់$300!$ ស្មើនឹង តំលៃតូចជាងគេនៃk ក្នុងចំនោម (k ធំបំផុត ដែល 2^k ចែកដាច់$300!$)និង(k ធំបំផុត ដែល 5^k ចែកដាច់$300!$)។ តាមរូបមន្ត ឌីប៉ូលីញ៉ាក់

k ធំបំផុត ដែល 2^k ចែកដាច់$300!$ ស្មើនឹង $k_2=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{300}{2^k}\right]$

k ធំបំផុត ដែល 2^k ចែកដាច់$300!$ ស្មើនឹង $k_5=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{300}{5^k}\right]<k_2$

$$k_5=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{300}{5^k}\right]=\left[\frac{300}{5}\right]+\left[\frac{300}{5^2}\right]+\left[\frac{300}{5^3}\right]+\left[\frac{300}{5^4}\right]+...$$

$$=60+12+4+0 \qquad =74$$

ដូច្នេះ $300!$ មានលេខសូន្យនៅខាងចុងចំនួន៧៤ខ្ទង់។

40. ទ្រឹស្តីបទវីលសុន

ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p គេមាន $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងដឹងថា បើ s បឋមនឹង p នោះគេមានx ដែល $s.x\equiv 1(\bmod p)$។ ព្រោះបើ (s,p) នោះតាមទ្រឹស្តីបទ **ចាដេ-បេស៊ូ** គេមានចំនួនគត់ x,y ដែល $sx+py=1$។ ដូច្នេះ $s.x\equiv 1(\bmod n)$ ។ តាង $x\equiv s'(\bmod p)$ ។ ដូច្នេះ $s'<p$ ។ ដោយ $s.x\equiv 1(\bmod p)$ និង $x\equiv s'(\bmod p)$ នោះ $ss'\equiv 1(\bmod p)$ ។ មានន័យថា ចំពោះ s មួយដែលបឋមនឹង p គេមាន $s'<p$ មួយដែល $ss'\equiv 1(\bmod p)$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ s_1,s_2 គេមាន s_1',s_2' ដែល $s_1s_1'\equiv 1(\bmod p)$ និង $s_2s_2'\equiv 1(\bmod p)$ ។ បើ $s_1'=s_2'=s$ នោះ $s_2(s_1s)\equiv s_2(\bmod p)\Rightarrow\ s_1\equiv s_2(\bmod p)$ ។ ដោយ $s_1,s_2<p$ នោះ $s_1=s_2$ ។ ដូច្នេះចំពោះ s_1,s_2 ផ្សេងគ្នា នោះយើងមាន s_1',s_2' ផ្សេងគ្នាដែរ។

បើ $p=2$ រឺ $p=3$ នោះទ្រឹស្តីខាងលើពិត។

សន្មតថា $p>3$ ។ ពិនិត្យ $a,$ ដែល $2\le a\le p-2$ ។ ចំពោះa និមួយៗខាងដើមនេះ យើងកំនត់$a'\le p-1$ មួយទៀតដែល $aa'\equiv 1(\bmod p)$ ។ចំពោះ a ផ្សេងគ្នាយើងមាន a' ផ្សេងគ្នាដែរ។ បើ $a=a'$ នោះ $a^2\equiv 1(\bmod p)\ \Rightarrow\ p\,|\left(a^2-1\right)=(a-1)(a+1)$ ។ ដោយ p ជាចំនួនបឋមនោះ $a\equiv 1(\bmod p)$ រឺមិនអញ្ចឹងទេ $a\equiv -1(\bmod p)$ ។ $\Rightarrow a-1=p$ រឺ $a+1=p$ ។ តែមិនអាចទាំង២ព្រោះ $a-1\le p-3<p$ និង $a+1\le p-1<p$ ។ ដូច្នេះ $a\ne a'$ ។ ដូច្នេះ ពេលគុណគ្រប់ a ទាំងអស់ដែល $2\le a\le p-2$ បញ្ចូលគ្នា យើងផ្គូផ្គងដែល $aa'\equiv 1(\bmod p)$ ។ ដូច្នេះផលគុណសរុបគឺស្មើ១។ យើងសរសេរជា

$$2.3....(p-2)\equiv 1(\bmod p)$$

$$\Rightarrow\quad (p-1)!\equiv 1.\left(\prod_{2\le a\le p-2} j\right).(p-1)\equiv 1.1.(p-1)\equiv -1(\bmod p)$$

■ឧទាហរណ៍ : បើ p ជាចំនួនបឋម ដែល $p\equiv 1(\bmod 4)$ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!\equiv -1(\bmod p)$$

ចំលើយ

នៅក្នុងកត្តាផលគុណរបស់$(p-1)!$ យើងផ្គូប j ជាមួយនឹង$(p-j)$ ដែល $1\le j\le (p-1)/2$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា $j(p-j)\equiv -j^2 \pmod p$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**វីលសុន** យើងទាញបាន

$$-1\equiv (p-1)!\equiv \prod_{1\le j\le (p-1)/2} -j^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

ដោយ $(-1)^{(p-1)/2}=1$ យើងទាញបានសំនើពិត។

41. ទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា

(Fermat's Little Theorem)

គ្រប់ចំនួនបឋម p និងគ្រប់ចំនួនគត់ a គេមាន

$$a^p \equiv a \pmod p$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំនើនតាម a ។ ពេល $a=1$ យើងទាញបានថា សំនើពិត។ សន្មតថា p ចែកដាច់ a^p-a ។ យើងមាន

$$(a+1)^p-a=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k-a=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a^k+a^p-a$$

ចំពោះ $1\le k\le p-1$ យើងមាន

$$k\binom{p}{k}=k\frac{p!}{k!(p-k)!}=p\frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-1-(k-1))!}=p\binom{p-1}{k-1}$$

មានន័យថា $p\,|\,k\binom{p}{k}$ តែដោយ $(p,k)=1$ ដូច្នេះ $p\,|\binom{p}{k}$។ ចំពោះ $k=0$ ក៏យើងមាន $p\,|\binom{p}{k}$ ដែរ។

ដូច្នេះ

$$(a+1)^p-a=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a^k+a^p-a\equiv a^p-1\equiv 0 \pmod p$$

ដូច្នេះ $(a+1)^p-a$ ចែកដាច់នឹង p ។ ដូច្នេះសំនើពិត។

តាមរយៈទ្រឹស្តីបទនេះយើងទាញបានថា $a\left(a^{p-1}-1\right)\equiv 0 \pmod p$។ ដូច្នេះ បើ p ចែក a មិនដាច់ទេ នោះមានន័យថា p ចែក $a^{p-1}-1$ ដាច់។ ដូច្នេះ $a^{p-1}\equiv 1 \bmod p$ ។

42. វិបាក

តាង p ជាចំនួនបឋម និង សន្មតថា p ចែក a មិនដាច់។ នោះ $a^{p-1}\equiv 1(\mod p)$ ។

■ឧទាហរណ៍ : តាង $a_1=4, a_n=4^{a_{n-1}}, n>1$។ ចូរគណនាសំនល់នៃ a_{100} ចែកនឹង៧។

ចំលើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែរម៉ា** យើងមាន $4^6\equiv 1(\mod 7)$ ។ យើងមាន $4^n\equiv 4(\mod 6)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មានន័យថា $4^n=4+6t$ ចំពោះចំនួនគត់ t ណាមួយ។ ដូច្នេះ

$$a_{100}=4^{a_{99}}=4^{4+6t}=4^4.\left(4^6\right)^t\equiv 4(\mod 7)$$

a_{100} ចែកនឹង៧ សល់ ៤។

43. និយមន័យ

$d(n)$ ជាចំនួនតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n

$\sigma(n)$ ជាផលបូកនៃបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n

$\sigma_s(n)$ ជាផលបូកស្វ័យគុណ s នៃបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n

$P(n)$ ជាផលគុណបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n ។

$\phi(n)$ ជាចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលធំមិនលើសពី n និងបឋមនឹង n ។

គេហៅ $\phi(n)$ ថាជាអនុគមន៍អឺលែរ។

$\omega(n)$ ជាចំនួនតួចែកបឋមខុសៗគ្នារបស់ n ។

$\Omega(n)$ ជាចំនួនតួចែកបឋមរបស់ n រាប់មិនបាច់គិតថាខុសគ្នាឬអត់ទេ(ស្មើនឹងផលបូកនៃស្វ័យគុណរបស់កត្តាបឋមរបស់ n ឧទាហរណ៍ $20=2^2.5$ យើងមាន ២ចំនួន២ដង ៥ចំនួន១ដង ដូច្នេះ $\Omega(20)=2+1=3$)។

អនុគមន៍ខាងលើអាចតាងជាសញ្ញាដោយ

$$d(n)=\sum_{d|n}1;\ \sigma(n)=\sum_{d|n}d;\ \omega(n)=\sum_{p|n}1;\ \Omega(n)=\sum_{p^\alpha\|n}\alpha$$

$$\phi(n)=\sum_{\substack{1\le k\le n\\(k,n)=1}}1$$

(សញ្ញា|| នៅក្នុង $p^{\alpha} \| n$ មានន័យថា $p^{\alpha} | n$ តែ $p^{\alpha+1} \nmid n$)

ឧទាហរណ៍ ១,២,៤,៥,១០,២០ជាតួចែករបស់២០។ យើងមាន $d(20)=6; \sigma(20)=42;$ $\omega(20)=2; \Omega(20)=3$ ។ ដោយ $1,3,7,9,11,13,17,19$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំមិនលើសពី២០ និងបឋមនឹង២០ នោះ $\phi(20)=8$ ។

44. ទ្រឹស្តីបទ

បើផលគុណកត្តាបឋមរបស់ n មានរាង $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ នោះ យើងមាន

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$$

$$\sigma_s(n)=\frac{p_1^{s(\alpha_1+1)}-1}{p_1^s-1}.\frac{p_2^{s(\alpha_2+1)}-1}{p_2^s-1}...\frac{p_k^{s(\alpha_k+1)}-1}{p_k^s-1}$$

$$P(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ករណី P ដែលពិបាកជាងគេ ករណីផ្សេងទៀត អាចស្រាយបញ្ជាក់តាមរបៀបដូចគ្នា។ តួចែកវិជ្ជមានមួយរបស់ n មានរាង $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$ ដែល $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ ។ ផលគុណរបស់បណ្តាតួចែកទាំងអស់របស់ n មានរាង $p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}...p_k^{\gamma_k}$ ។

ដូច្នេះយើងនឹងគណនាបណ្តាស្វ័យគុណ γ_i ។ យើងយកចំនួនគត់មួយ $v \in \{0,1,...,\alpha_1\}$ ។ តួចែករបស់ n ដែល $\beta_1=v$ មានទាំងអស់ចំនួន $(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$ ។ ពេលយើងគុណតួចែកទាំងអស់នេះ បញ្ចូលគ្នា យើងបាន

$$\gamma_1=(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)\sum_{v=0}^{\alpha_1}v$$

$$=\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1+1)...(\alpha_k+1)$$

$$=\alpha_1.\frac{d(n)}{2}$$

យើងទាញបានរូបមន្តដូចគ្នាចំពោះ γ_i ។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា $d(n)\le 2\sqrt{n}$ ។

ចំលើយ

គ្រប់តួចែកវិជ្ជមាន a និមួយៗនៃ n អាចផ្គូផ្គងជាមួយ តួចែករបស់ n មួយទៀតគឺ $\frac{n}{a}$ ។ ដោយ $n=a.\frac{n}{a}$ នោះ ត្រូវតែមានតួចែកមួយក្នុងចំនោមនេះដែល $\le\sqrt{n}$ ។

តាង $d_1<d_2<....<d_k$ ជាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n ដែលធំមិនលើសពី $\sqrt{n}$ ។ តួចែករបស់ n ផ្សេងទៀតគឺ

$$\frac{n}{d_1},\frac{n}{d_2},...,\frac{n}{d_k}$$

ដោយ $k\le\sqrt{n}$ ដូច្នេះ $d(n)\le 2k\le 2\sqrt{n}$ ។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $d(n)=6$ ។

ចំលើយ

$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)=6 \;=2.3$ រឺ 6.1 នោះ n ត្រូវតែមានកត្តាបឋមខុសគ្នាតែ២ប៉ុណ្ណោះ គឺ p និង q ។ដូច្នេះ $n=p^{\alpha}q^{\beta}$ និង $1+\alpha=2;1+\beta=3$ រឺក៏ $1+\alpha=6;1+\beta=1$ ។ ដូច្នេះ n ត្រូវតែមានរាង $n=pq^2$ រឺក៏ $n=p^5$ ដែល p,q ជាចំនួនបឋមខុសគ្នា។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{k=1}^{n}d(k)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n}{j}\right]$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n}d(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j|k}1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j|k}1=\sum_{j\le n}\sum_{\substack{j\le k\le n\\(k\equiv 0\bmod j)}}1=\sum_{j\le n}\left[\frac{n}{j}\right]$$

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ x និង y ដែល $x-y\ge n$ និង $\sigma\left(x^2\right)=\sigma\left(y^2\right)$ ។

ចំលើយ

តាង $s\ge n,(s,10)=1$ ។ យើងយក $x=5s;y=4s$ ។ នោះ $\sigma\left(x^2\right)=\sigma\left(y^2\right)=31\sigma\left(s^2\right)$ ។

45. ទ្រឹស្តីបទអឺលែរ

បើ $(a,n)=1$ នោះ $a^{\phi(n)}\equiv 1(\bmod n)$។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងមាន $n>1$។ តាង $1=a_1<a_2<,...,<a_{\phi(n)}=n-1<n$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង n ហើយបឋមនឹង n ដែល $n>1$។ គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលបឋមនឹង n ពេលចែកនឹង n សល់សំនល់ជា a_i មួយក្នុងចំនោម $a_i, 1\le i\le\phi(n)$។

ដោយ $(a,n)=1$ នោះ $aa_1, aa_2,...,aa_{\phi(n)}$ ក៏បឋមនឹង n ដែរ។ ដូច្នេះ បណ្តា aa_i ទាំងនេះសមមូលនឹង a_j មួយ ដែល $1\le j\le\phi(n)$ តាម n។ បណ្តា aa_i ខុសៗគ្នាសមមូលនឹង a_j ខុសគ្នាដែរ តាម n។ ព្រោះបើមាន $aa_i\equiv a_k(\bmod n)$ និង $aa_j\equiv a_k(\bmod n)$ នោះ $a_j(aa_i)\equiv a_ja_k(\bmod n)\Rightarrow$ $a_i(aa_j)\equiv a_ja_k(\bmod n)\Rightarrow a_ia_k\equiv a_ja_k(\bmod n)\Rightarrow a_i\equiv a_j(\bmod n)$។

ដូច្នេះ

$$aa_1.aa_2....aa_{\phi(n)}\equiv a_1a_2....a_{\phi(n)}(\bmod n)$$

$$\Rightarrow\quad a^{\phi(n)}a_1.a_2....a_{\phi(n)}\equiv a_1a_2....a_{\phi(n)}(\bmod n)$$

$$\Rightarrow\quad \left(a^{\phi(n)}-1\right)a_1.a_2....a_{\phi(n)}\equiv 0(\bmod n)$$

ដោយ $\left(a_1a_2...a_{\phi(n)},n\right)=1$ នោះ $\left(a^{\phi(n)}-1\right)\equiv 0(\bmod n)$។

46. ទ្រឹស្តីបទ

តាង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $a^k\equiv 1(\bmod m)$។ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែល $a^x\equiv 1(\bmod m)$ បានទាល់តែ x ជាពហុគុណនៃ k និងច្រាសមកវិញ។

សំរាយបញ្ជាក់

បើ x ជាពហុគុណនៃ k នោះ $x=kl$។ ដោយ $a^k\equiv 1(\bmod m)$ នោះ $\left(a^k\right)^l\equiv 1(\bmod m)$។

ច្រាសមកវិញ សន្មតថា $a^x\equiv 1(\bmod m)$។ យក $x=kl+p, 0\le p<k$។ ដូច្នេះ $p=x-kl$។ យើងមាន

$$a^p=a^{x-kl}=a^xa^{-kl}\equiv 1.1^{-l}=1(\bmod m)$$

បើ $p>0$ នោះ មាន $p<k$ ដែល $a^p\equiv 1(\bmod m)$ ។ ដូច្នេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា k តូចជាងគេ។ ដូច្នេះ $p=0$ ។ ដូច្នេះ $x=kl$ ។ ដូច្នេះ x ជាពហុគុណនៃ k ។

47. ទ្រឹស្តីបទ

តាង a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរដែលបឋមគ្នា នោះ $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយដែល $n=ab,(a,b)=1$ ។ យើងតំរៀបចំនួនគត់ចំនួនab ដែលមាន $1,2,...,ab$ ដូចខាងក្រោម

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & ... & k & ... & a\\
a+1 & a+2 & a+3 & ... & a+k & ... & 2a\\
2a+1 & 2a+2 & 2a+3 & ... & 2a+k & ... & 3a\\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\
(b-1)a+1 & (b-1)a+2 & (b-1)a+3 & ... & (b-1)a+k & ... & ba
\end{array}$$

ចំនួនគត់r មួយ បឋមនឹងn បើ វាបឋមនឹងa និងនឹងb និងច្រាសមកវិញ។ ជាដំបូងយើងនឹងកំនត់ចំនួននៃចំនួនគត់ក្នុងតារាងខាងលើ ដែលបឋមនឹងa និងបន្ទាប់មកគណនាអោយឃើញថា តើមានចំនួនប៉ុន្មានក្នុងចំណោមនោះដែលបឋមនឹងb ។

មានចំនួនគត់ចំនួន$\phi(a)$ នៅក្នុងបន្ទាត់ដេកទី១ដែលបឋមនឹងa ។ ឥលូវយើងមើលបន្ទាត់ឈរទីk ដែល $1\le k\le a$ ។ ចំនួនគត់និមួយៗស្ថិតនៅក្នុងជួរឈរមួយនេះ មានរាង $ma+k,0\le m\le b-1$។ ដោយ $k\equiv ma+k(\bmod a)$ នោះ k មានកត្តារួមមួយជាមួយa លុះត្រាតែ $ma+k$ ក៏មាន កត្តារួមមួយជាមួយa ដែរ និងច្រាសមកវិញ។ បន្ទាត់ឈរនិមួយៗមានចំនួនគត់ចំនួន $\phi(a)$ ដែលបឋមនឹង a ។ បន្ទាប់មកយើងកំនត់ថាតើមានចំនួនគត់ចំនួនប៉ុន្មានក្នុងចំណោមនេះ ដែលបឋមនឹងb ។

យើងនិយាយថា មិនអាចមានចំនួនគត់២ក្នុងចំនោម $k,a+k,...,(b-1)a+k$ នៅលើបន្ទាត់ឈរទីk សមមូលគ្នាតាម b ទេ។ បើមិនអញ្ចឹងទេ បើសិនជា $ia+k\equiv ja+k(\bmod b)$ នោះ $a(i-j)\equiv 0(\bmod b)$ ។ ដោយ $(a,b)=1$ នោះ $i-j\equiv 0(\bmod b)$ ។ ដោយ $i,j\in[0,b-1]$ នាំអោយ $|i-j|<b$ ។ នាំអោយ $i=j$ ។ មានន័យថា បណ្តាb ចំនួនគត់ នៅក្នុងចំនោមចំនួនទាំង$\phi(a)$ តាមបន្ទាត់ឈរ សមមូលទៅនឹង$0,1,...,b-1$ ។ តែមានតែ$\phi(b)$ ក្នុងចំនោមនេះប៉ុណ្ណោះដែលបឋមនឹងb ។ មានន័យថា មានចំនួនគត់តែ$\phi(a)\phi(b)$ ប៉ុណ្ណោះ នៅក្នុងតារាងនេះ ដែលបឋមនឹងab ។

សំគាល់

–បើ p ជាចំនួនបឋម និង m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះចំនួនគត់

$$p, 2p, 3p, \ldots, p^{m-1}p$$

ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតែមួយបែបគត់ដែល $\le p^m$ និងមានកត្តារួមជាមួយ p^m ។ដូច្នេះ

$\phi\left(p^m\right) = p^m - p^{m-1}$ ។

–បើ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ ជាផលគុណកត្តាបឋមរបស់ n នោះ

$$\phi(n) = \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}\right) \ldots \left(p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}\right)$$

48. ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងពិនិត្យសំនុំនៃចំនួនសនិទាន

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

យើងដឹងថា សំនុំនេះមានធាតុទាំងអស់ចំនួន n ។ ក្រោយសំរួលប្រភាគនេះហើយ យើងនឹងទទួលបានសំនុំថ្មី ដែលភាគបែងនិងភាគយក បឋមនឹងគ្នា។ បណ្តាភាគបែងក្នុងសំនុំថ្មីសុទ្ធតែជាតួចែករបស់ n ។ តាង d ជាភាគបែងមួយ។ នោះ ក្នុងសំនុំថ្មី មានធាតុចំនួន $\phi(d)$ ដែលមាន d ជាភាគបែង។ ដូច្នេះមានទាំងអស់ ចំនួន ចំនួន $\sum_{d|n} \phi(d)$ នៅក្នុងសំនុំថ្មី។ ដោយសំនុំទាំងពីរមានចំនួនតួស្មើគ្នា នោះ យើងទាញបានសំនើដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

■ឧទាហរណ៍ : តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

(១) គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង n ហើយបឋមនឹង n ។

(២) គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង $2n$ ហើយបឋមនឹង n ។

ចំលើយ

តាង $S_1 = \sum_{\substack{d<n \\ (d,n)=1}} d$ និង $S_2 = \sum_{\substack{d<2n \\ (d,n)=1}} d$

តាង $d_1 < d_2 < .... < d_{\phi(n)}$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង n ហើយបឋមនឹង n ។ យើងមាន $(d,n)=1$ លុះត្រាតែ $(n-d,n)=1$ ។ យើងមាន $d_{\phi(n)}$ ធំជាងគេ ហើយបឋមនឹង n ដូច្នេះ $n-d_{\phi(n)}$ បឋមនឹង n ដែរ តែតូចជាងគេ ដូច្នេះ ត្រូវតែ ជា d_1 ។ យើងទាញបាន

$$d_1 + d_{\phi(n)} = n,\ d_2 + d_{\phi(n)-1} = n, \dots,\ d_{\phi(n)} + d_1 = n,$$

ដូច្នេះ $S_1 = \dfrac{n\phi(n)}{2}$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងមាន

$$\sum_{\substack{n<d<2n \\ (d,n)=1}} d = \sum_{\substack{d<n \\ (d,n)=1}} (n+d) = n\phi(n) + \sum_{\substack{d<n \\ (d,n)=1}} d$$

$$= n\phi(n) + \frac{n\phi(n)}{2} = \frac{3n\phi(n)}{2}$$

ដូច្នេះ $S_2 = \dfrac{n\phi(n)}{2} + \dfrac{3n\phi(n)}{2} = 2n\phi(n)$ ។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរអោយឧទាហរណ៍ចំនួនគត់ n ដែល $10 | \phi(n)$ ។

ចំលើយ

យក $n = 11^k, k = 1, 2, \dots$ នោះ $\phi(11^k) = 11^k - 11^{k-1} = 10.11^{k-1}$

■ឧទាហរណ៍ : បើ $p-1$ និង $p+1$ ជាចំនួនបឋម និង $p > 4$ ចូរបង្ហាញថា $3\phi(p) \le p$ ។

ចំលើយ

សង្កេតឃើញថា បើ $p > 4$ នោះ p ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ៦ (បើ p មិនមែនជាពហុគុណនៃ៦ទេ នោះ $p-1$ និង $p+1$ មិនអាចជាចំនួនបឋមទេ)។ ដូច្នេះ

$$p = 2^a 3^b m, a, b \ge 1, (m,6) = 1$$

$$\phi(p) = \phi(2^a 3^b m) = \phi(2^a)\phi(3^b)\phi(m) = (2^a - 2^{a-1})(3^b - 3^{b-1})\phi(m)$$

$$= 2^a\left(\frac{1}{2}\right)3^b\left(\frac{2}{3}\right)\phi(m) = \frac{1}{3}2^a 3^b \phi(m) \le \frac{1}{3}2^a 3^b m = \frac{p}{3}$$

49. ទ្រឹស្តីបទឡឺសង់

តាង p ជាចំនួនបឋម និងតាង

$$n = a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k$$

ជាពន្លាតរបស់ n ក្នុងគោល p ។ ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល p^m ចែកដាច់ $n!$ កំនត់ដោយ

$$m = \frac{n - (a_0 + a_1 + \dots + a_k)}{p-1}$$

សំរាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទ**ឌឺប៉ូលីញ៉ាក់**

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

យើងមាន

$$\left[\frac{n}{p} \right] = a_0 p^{k-1} + a_1 p^{k-2} + \dots + a_{k-2} p + a_{k-1};$$

$$\left[\frac{n}{p^2} \right] = a_0 p^{k-2} + a_1 p^{k-3} + \dots + a_{k-2};$$

……

$$\left[\frac{n}{p^k} \right] = a_0$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right] = a_0 \left(1 + p + p^2 + \dots + p^{k-1}\right) +$$

$$a_1 \left(1 + p + p^2 + \dots + p^{k-2}\right) + \dots + a_{k-1}(1+p) + a_k$$

$$= a_0 \frac{p^k - 1}{p-1} + a_1 \frac{p^{k-1} - 1}{p-1} + \dots + a_{k-1} \frac{p^2 - 1}{p-1} + a_k \frac{p-1}{p-1}$$

$$= \frac{a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k - (a_0 + a_1 + \dots + a_k)}{p-1}$$

$$= \frac{n - (a_0 + a_1 + \dots + a_k)}{p-1}$$

50. ទ្រឹស្តីបទខាំម័រ

តាង p ជាចំនួនបឋម។ ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល p^m ចែកដាច់មេគុណាទ្វេធា $\binom{a+b}{a}$ ស្មើនឹងផលបូកចំនួនត្រាទុកក្នុងប្រមាណវិធីបូករបស់ a និង b សរសេរក្នុងគោល p ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $a = a_0 + a_1 p + ... + a_k p^k$, $b = b_0 + b_1 p + ... + b_k p^k$, ដែល $0 \le a_j, b_j \le p-1$ និង $a_k + b_k > 0$ ។

តាង $S_a = \sum_{j=0}^{k} a_j$; $S_b = \sum_{j=0}^{k} b_j$ ។ កំនត់យក c_j ដែល $0 \le c_j \le p-1$ និង $\varepsilon_j = 0$ រឺ 1 កំនត់ដោយ

$$a_0 + b_0 = \varepsilon_0 p + c_0$$

$$\varepsilon_0 + a_1 + b_1 = \varepsilon_1 p + c_1$$

$$\varepsilon_1 + a_2 + b_2 = \varepsilon_2 p + c_2$$

.....

$$\varepsilon_{k-1} + a_k + b_k = \varepsilon_k p + c_k \qquad (*)$$

ផលបូកនៃចំនួនត្រាទុកកំនត់ដោយ $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k$ ។

គុណសមភាពទាំងអស់នេះបន្តបន្ទាប់គ្នានឹង$1, p, p^2, ...$ រួចបូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$a + b + \varepsilon_0 p + \varepsilon_1 p^2 + ... + \varepsilon_{k-1} p^k =$$
$$\varepsilon_0 p + \varepsilon_1 p^2 + ... + \varepsilon_{k-1} p^k + \varepsilon_k p^{k+1} + c_0 + c_1 p + ... + c_k p^k$$

យើងទាញបាន $a + b = c_0 + c_1 p + ... + c_k p^k + \varepsilon_k p^{k+1}$ ។ ដូច្នេះ $S_{a+b} = \varepsilon_k + \sum_{j=0}^{k} c_j$;

ដោយបូកសមភាព(*)បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$S_a + S_b + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_{k-1}) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k) p +$$
$$(c_0 + c_1 + ... + c_k)$$
$$= (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k) p + S_{a+b} - \varepsilon_k$$

តាមទ្រឹស្តីបទ**ឡឺសង់**

$$(p-1)m = (a+b) - S_{a+b} - (a - S_a) - (b - S_b)$$
$$= (p-1)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k)$$

ដូច្នេះ $m = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k$ ។

51. ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង

$$n = a_0 10^k + a_1 10^{k-1} + \ldots + a_{k-1} 10 + a_k$$

ដែល $1 \le a_0 \le 9, 0 \le a_j \le 9, j \ge 1$។

ឧទាហរណ៍ $65789 = 6.10^4 + 5.10^3 + 7.10^2 + 8.10 + 9$

ឡូស៊ីក

1. តាង s ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់អង្កត់$[s,2s]$ មានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ជានិច្ច។
2. តាង M ជាសំណុំមិនទទេ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល " បើ x ជាធាតុរបស់ M នោះ $4x$ និង $[\sqrt{x}]$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ "។ ចូរបង្ហាញថា M ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ ក្នុងនេះ $[a]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ a។
3. ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំនោមបណ្តា៧ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលធំមិនលើសពី ១២៦ គេអាចរកបាន២ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនេះ កំនត់ដោយ a និង b ដែល $b<a\le 2b$។
4. គេអោយសំនុំមួយមាន១០ចំនួនគត់ធម្មជាតិ ស្ថិតនៅចន្លោះចាប់ពី ១ដល់ ៩៩ ដោយគិតទាំង១ និង៩៩ ចូលផង។ ចូរបង្ហាញថា មាន២សំនុំរងមិនទទេ ខុសៗគ្នា នៃសំនុំនេះ ដែលមានផលបូកធាតុរបស់វា ស្មើគ្នា។
5. គេជ្រើសរើស៥៥ចំនួនគត់ចេញពី$\{1,2,...,100\}$។ ចូរបង្ហាញថា ទោះគេជ្រើសរើសវាយ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គេគង់បានពីរចំនួន ដែលមានផលសងស្មើ ១០ ដែរ។
6. (អាមេរិច ១៩៩៤)
   គេបិទស្លាក លេខ ថាសចំនួនមួយ ដោយលេខ១, ថាសចំនួន២ ដោយលេខ២, ថាសចំនួន៣ ដោយលេខ៣,..., ថាសចំនួន៥០ ដោយលេខ៥០។ គេដាក់ថាសដែលបិទស្លាកទាំង $1+2+3+...+50=1275$ នេះ ទៅក្នុងប្រអប់មួយ។ គេទាញថាសម្តងមួយ ចេញពីប្រអប់នេះ ដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ចូលវិញ។ តើថាសតិចបំផុតចំនួនប៉ុន្មាន ដែលត្រូវទាញចេញ ដើម្បីអោយធានាថា មានយ៉ាងតិចថាសចំនួន១០ មានស្លាកដូចគ្នា?។
7. (អន្តរជាតិ ១៩៦៤)
   មនុស្ស១៧នាក់ ទាក់ទងគ្នាតាមសំបុត្រ ដោយមនុស្សម្នាក់ៗ សរសេរទៅកាន់មនុស្ស១៦នាក់ទៀតដែលនៅសល់។ពួកគេ ទាក់ទងគ្នា លើប្រធានបទចំនួន៣ប៉ុណ្ណោះ។ រាល់បណ្តា មនុស្សពីរនាក់ សរសេរទៅគ្នាទៅវិញទៅមក លើប្រធានបទតែមួយ ប៉ុណ្ណោះ។ ចូរបង្ហាញថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

8. សុខ និង សៅលេងល្បែងដូចតទៅ។ ពួកវាចាប់ផ្ដើមដោយជ្រើសរើសចំនួនគត់មួយ $n > 0$។ បន្ទាប់មកទៀត សុខជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ m មួយជាសំងាត់ ដែល $0 < m < n$។ សៅជាអ្នកទាយលេខសំងាត់នេះ។ ដើម្បីអោយសៅអាចទាយបាន សៅអាចសួរលេខ k ណាមួយទៅសុខ ហើយសុខឆ្លើយថា $m + k$ ជាចំនួនបឋមរឺអត់។ ចូរបង្ហាញថា សៅអាចកំនត់លេខសំងាត់របស់សុខបានដោយសួរយ៉ាងច្រើន $n - 1$ សំនួរ។

9. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ឆ្នាំទាំងអស់ មានថ្ងៃសុក្រទី១៣ យ៉ាងហោចណាស់ម្ដង។

10. គេជ្រើសរើសយក៥១ចំនួនគត់ចេញពី 1,2,...,100។ ចូរបង្ហាញថា បើទោះជាគេជ្រើសរើសយ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គេគង់ទទួលបាន២ចំនួនដែលបឋមរវាងគ្នា ដែរ។

11. (**អាមេរិច** AHSME 1999)

ទូដាក់ឥវ៉ាន់នៅផ្សារមួយត្រូវបានគេបិទស្លាកលេខចាប់ពីលេខ១ទៅ។ តួលេខប្លាស្ទិចដែលប្រើសំរាប់ធ្វើជាស្លាកលេខបិទលើទូទាំងនោះ មានតំលៃ២សេនក្នុងមួយលេខ។ ដូច្នេះដើម្បីបិទលេខ៩ គេត្រូវចំនាយអស់ ២សេន ហើយដើម្បីបិទលេខ១០ គេត្រូវចំនាយអស់៤សេន។ បើសិនជាគេត្រូវចំនាយអស់ 137,94$ ដើម្បីបិទស្លាកលេខ តើមានទូទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន?។

12. (**អាមេរិច** AMC12 2001)

តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានចំនួនប៉ុន្មានដែលមិនលើសពី2001 ហើយជាពហុគុណនៃ3 រឺ4 តែមិនមែនពហុគុណនៃ5 ។

13. (**អាមេរិច** AHSME 1983)

តាង

$$x = 0{,}123456789101112\ldots998\,999$$

ដែលលេខក្នុងខ្ទង់និមួយៗបានមកពីចុះលេខគត់ពី1 ដល់999 តាមលំដាប់។ ចូរកំនត់ខ្ទង់ទី1983 ក្រោយក្បៀស។

14. ក្មេងប្រុស២៥នាក់និងក្មេងស្រី២៥នាក់អង្គុយជុំវិញតុមូលមួយ។ ចូរបង្ហាញថា ទោះជាអង្គុយបែបណា ក៏គង់មានក្មេងម្នាក់ដែលអ្នកនៅសង្ខាងវាជាក្មេងស្រីទាំងពីរនាក់ដែរ។

15. (**អាមេរិច** AMC12 2001)

ពីងពាងមានស្រោមជើងមួយនិងស្បែកជើងមួយសំរាប់ជើងនិមួយៗ នៃជើងទាំងប្រាំបីរបស់វា។ តើពីងពាងអាចពាក់ស្រោមជើងនិងស្បែកជើងទាល់តែគ្រប់ជើង តាមលំដាប់លំដោយបាន

ប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា បើដឹងថា រាល់ជើងនិមួយៗរបស់វា វាត្រូវពាក់ស្រោមជើងមុនស្បែកជើង ?

16. (**អាមេរិច** AHSME 1986)

ថតតុស្ថិតក្នុងបន្ទប់ងងិតមួយមានស្រោមជើងក្រហម១០០គូ ស្រោមជើងបៃតង៨០គូ ស្រោមជើងខៀវ៦០គូ និងស្រោមជើងខ្មៅ៤០គូ។ យុវជនម្នាក់យកស្រោមជើងមួយម្តងចេញពីថតតុនេះ តែវាមិនអាចស្គាល់ពណ៌របស់ស្រោមជើងទាំងនោះបានទេ។ តើយុវជននោះត្រូវយកស្រោមជើងចេញយ៉ាងតិចចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីអោយវាទទួលបានស្រោមជើងយ៉ាងហោចណាស់១០គូ? ដោយដឹងថា ស្រោមជើងមួយគូ ជាស្រោមជើងពីរដែលមានពណ៌ដូចគ្នា។ ស្រោមជើងមួយមិនអាចអោយរាប់នៅក្នុងគូស្រោមជើងលើសពីមួយបានទេ។)

17. (**អាមេរិច** ១៩៩១)

គេអោយចំនួនសនិទានមួយ គេសរសេរវាជាទំរង់បង្រួមរួច បន្ទាប់មកគេគណនាផលគុណនៃភាគយកនឹងភាគបែង។ តើមានចំនួនសនិទានចំនួនប៉ុន្មានដែលស្ថិតនៅចន្លោះ0និង១ ដែលមានផលគុណស្មើ20! ។

18. (**អាមេរិច** ១៩៩៨)

ចូរកំនត់ចំនួនចតុធាតុតាមលំដាប់ $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ដែល

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$$

19. (**អាមេរិច** AIME 1992)

តើមានគូនៃចំនួនគត់ *បន្តបន្ទាប់គ្នា* ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលស្ថិតនៅក្នុងសំនុំ

$$\{1000; 1001; 1002; \dots; 2000\}$$

ហើយដែលមិនត្រូវការត្រាទុក ពេលធ្វើប្រមាណវិធីបូកនៃចំនួនគត់ទាំងពីរ?

20. (**អាមេរិច** AHSME 1994)

កៅអីប្រាំបួនក្នុងជួរមួយ សំរាប់ទុកអោយសិស្ស៦នាក់ និងសាស្ត្រាចារ្យអាល់ផា បែតា និងកាមាអង្គុយ។ សាស្ត្រាចារ្យទាំងបីមកដល់មុនសិស្សទាំង៦នាក់ ហើយសំរេចចិត្តជ្រើសរើសកៅអីយ៉ាងណាអោយសាស្ត្រាចារ្យម្នាក់ៗស្ថិតនៅចន្លោះសិស្ស២នាក់។ តើសាស្ត្រាចារ្យអាល់ផា បែតា និងកាមា អាចជ្រើសរើសកៅអីខ្លួនបានប៉ុន្មានរបៀប?

21. ចូរបង្ហាញថាក្នុងចំនោមចំនួនគត់វិជ្ជមាន១៦ផ្សេងគ្នា មានតំលៃមិនលើសពី១០០ មានចំនួនគត់៤ផ្សេងគ្នា a, b, c, d ដែល $a + b = c + d$ ។

22. (អាមេរិច ១៩៨៩)

កុមារម្នាក់មានអិដ្ឋមួយសំនុំមាន៩៦ដុំផ្សេងៗគ្នា។ ដុំនិមួយៗអាចធ្វើពីប្លាស្ទិចរឺឈើ អាចមានទំហំតូច មធ្យមរឺធំ អាចមានពណ៌ខៀវ បៃតង ក្រហម រឺលឿង និងអាចមានជ្រុងជារង្វង់ ឆកោណ ការេ រឺត្រីកោណ។

តើមានដុំអិដ្ឋប៉ុន្មានដុំ ដែលមានលក្ខណៈខុសពីអិដ្ឋប្លាស្ទិច ទំហំមធ្យមពណ៌ក្រហមរាងរង្វង់ ត្រង់ពីរចំនុចគត់? (អិដ្ឋឈើទំហំមធ្យមពណ៌ក្រហមរាងការេ ជាឧទាហរណ៍មួយ)។

23. (អាមេរិច ១៩៩៨)

គេហៅលេខទូរសព្ទ៧ខ្ទង់ $\overline{d_1d_2d_3}-\overline{d_4d_5d_6d_7}$ ថាជាលេខពិសេស បើលំដាប់លំដោយ $\overline{d_1d_2d_3}$ ដូចគ្នានឹង $\overline{d_4d_5d_6}$ រឺ $\overline{d_5d_6d_7}$ (ដូចទាំងពីរក៏បាន)។

ឧទាហរណ៍ 023.0237; 032.7032 សុទ្ធតែជាលេខពិសេស។ សន្មតថា d_i និមួយៗអាចមានតំលៃជាលេខ $0; 1; 2; \dots; 9$។ ចូរកំនត់ចំនួនលេខពិសេសទាំងអស់ដែលអាចមាន។

24. (អាមេរិច ១៩៩៦)

ក្រលាពីរនៃក្រលាទាំង$7\times 7=49$ របស់ក្តារអុកមួយ ត្រូវបានគេលាបពណ៌លឿង ហើយក្រលានៅសល់ត្រូវលាបពណ៌បៃតង។ ក្តារអុកពណ៌ពីរ ដែលលាបពណ៌តាមរបៀបនេះ សមមូលគ្នាបើក្តារពណ៌មួយអាចទទួលបានដោយបង្វិលក្តារពណ៌មួយទៀតក្នុងប្លង់ក្តារអុក។ តើមានក្តារអុកពណ៌មិនសមមូលគ្នាចំនួនប៉ុន្មានដែលអាច?។

25. តើគេមានវិធីរៀបលេខ $21; 31; 41; 51; 61; 71$ និង 81 ចំនួនប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីអោយផលបូកលេខ៤នៅជាប់គ្នាចែកដាច់នឹង៣?។

26. (អាមេរិច ១៩៩៣)

តាង S ជាសំនុំមួយមានធាតុ៦។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នាក្នុងការជ្រើសរើសសំនុំរងពីរនៃ S ដែលមិនចាំបាច់ខុសគ្នាក៏បាន ហើយដែលប្រជុំនៃសំនុំរងទាំងពីរជា S ? លំដាប់នៃការជ្រើសរើសមិនសំខាន់ទេ ឧទាហរណ៍ គូសំនុំរង $\{a; c\}; \{b; c; d; e; f\}$ ដូចគ្នានឹងការជ្រើសរើសគូ $\{b; c; d; e; f\}; \{a; c\}$ ដែរ។

27. (ឥណ្ឌា ១៩៩៨)

គេអោយ M ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ តាង

$$S=\left\{n\in\mathbb{N}, M^2\le n<(M+1)^2\right\}$$

ចូរបង្ហាញថា ផលគុណ ab ដែល a និង b ជាធាតុរបស់ S មានតំលៃខុសគ្នាពីរៗ។

28. ល្បែងបើកបៀក្នុងកុំព្យូទ័រមួយគេលេងតែម្នាក់ឯង ដូចតទៅ។ ក្រោយលេងជាប់មួយលើក ទៅតាមលទ្ធផលដែលទទួលបាន អ្នកលេងទទួលបាន a រឺ b ពិន្ទុ $(a,b\in\mathbb{N},a>b)$ ហើយពិន្ទុរបស់គាត់កើនឡើងដោយបូកបន្ថែមនឹងពិន្ទុលើកមុន។ គេដឹងថា មានពិន្ទុចំនួន៣៥ប្រភេទដែលគេមិនអាចទទួលបាន ហើយក្នុងចំណោមនោះ មានមួយស្មើ៥៨។ ចូរគណនា a និង b។

29. (**អាមេរិច ១៩៩៤**)

គេមានអិដ្ឋចំនួន៩៤ដុំ។ មួយដុំៗមានរង្វាស់ $4\times10\times19$ គេយកមកតំរៀបពីលើគ្នាជាបង្គោលមួយមានកំពស់៩៤ដុំអិដ្ឋ។ អិដ្ឋនិមួយៗអាចតំរៀបដោយយកជ្រុង៤ រឺ១០ រឺ១៩ ស្របនឹងកំពស់របស់បង្គោល ។ តើមានកំពស់ បង្គោល សរុបប៉ុន្មានប្រភេទដែលគេអាចធ្វើបានដោយប្រើអិដ្ឋទាំង៩៤ដុំនេះ?។

30. (**អន្តរជាតិ ១៩៧០**)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលធ្វើអោយសំនុំ

$$\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$$

អាចជាបំបែកជា២សំនុំរង ដែលផលគុណនៃបណ្តាចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងសំនុំមួយ ស្មើនឹង ផលគុណនៃបណ្តាចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងសំនុំមួយទៀត។

ប្រព័ន្ធរបាប់.ចំនួនគត់.ភាពចែកដាច់

ប្រព័ន្ធរបាប់

31. (អន្តរជាតិ១៩៧៥)

ពេលគេសរសេរ 4444^{4444} នៅក្នុងប្រព័ន្ធគោល១០, គេទទួលបានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់វា ស្មើ A។ តាង B ផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់ A។ ចូរគណនា ផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់ B។ (A, B សរសេរនៅក្នុងប្រព័ន្ធគោល១០)។

32. ចូរគណនា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេរបស់ 3^{1000}។

33. ចូរគណនា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេរបស់ $7^{7^{1000}}$។

34. ចំនួនគត់មួយថយចុះជាគត់ដង ពេលគេលុបតួលេខខាងចុងគេចោល។ ចូរគណនាចំនួនបែបនេះ។

35. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលផ្ដើមដោយលេខ៦និង ថយចុះ២៥ដង បើសិនជាលេខ៦នេះត្រូវបានលុបចោល។

36. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ផលគុណនៃតួលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់វា (នៅក្នុងគោលដប់) ស្មើនឹង $x^2 - 10x - 22$។

37. (អាមេរិច ១៩៩២)

តាង S ជាសំនុំនៃគ្រប់ចំនួនសនិទាន r, ដែល $0 < r < 1$ ហើយដែលមានតួលេខជាខួបរាង

$$0.abcabcabcabc.... = 0.\overline{abc}$$

ដែលតួលេខ a, b, c មិនចាំខុសគ្នាក៏បាន។ បើប្រភាគនិមួយៗដែលជាធាតុរបស់ S សំរួលរួចហើយ តើមានភាគយកខុសៗចំនួនប៉ុន្មាន?។

38. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន មានពហុគុណរបស់វាមួយ ដែល លេខរបស់វាក្នុងគោល១០ មានគ្រប់តួលេខពី0ដល់៩។

39. លេខ

12345678910111213141516171819202122...

ទទួលបានដោយរៀបចំនួនគត់តរៀងគ្នាបន្តបន្ទាប់គ្នា។ យើងតាង $f(n)=m$ ជាអនុគមន៍ដែល ខ្ទង់ទី10^n របស់លេខនេះ ស្ថិតនៅចំចំនុចដែលគេបន្ថែមលេខមាន m ខ្ទង់ ។ ឧទាហរណ៍ $f(2)=2$ ព្រោះ ខ្ទង់ទី$100=10^2$ ស្ថិតនៅចំលេខ៥៥ ដែលមាន២ខ្ទង់។ ចូរគណនាដោយស្រាយបញ្ជាក់ $f(1987)$។

40. ចូរសរសេរ ៥២១៣ នៅក្នុងគោល ៧។

41. ចូរសរសេរចំនួនទសភាគ $13/16$ នៅក្នុងគោល៦។

42. (**អាមេរិច ១៩៩៤**)

គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តាង $p(n)$ ជាផលគុណនៃតួលេខខុសពីសូន្យរបស់ n។ (បើ n មានតែមួយខ្ទង់ នោះ $p(n)$ ស្មើលេខមួយនោះ)។

តាង

$$S=p(1)+p(2)+\ldots+p(999)$$

ចូរកំនត់កត្តាបឋមធំបំផុតរបស់ S។

43. (**អន្តរជាតិ ១៩៧៨**)

m,n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $1\le m<n$។ នៅក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល១០ លេខ៣ខ្ទង់ចុងគេរបស់ 1978^m ដូចរៀងគ្នា នឹង លេខ៣ខ្ទង់ចុងគេរបស់ 1978^n ដែរ។ ចូរគណនា m,n ពេល $m+n$ មានតំលៃតូចបំផុត។

44. ចូរបង្ហាញថា លេខ១ពាន់ខ្ទង់ដំបូងក្រោយក្បៀស របស់ $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1980}$ សុទ្ធតែជាលេខ៩ទាំងអស់។

ចំនួនគត់

45. ចូរបង្ហាញថា $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

46. តាង $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ ដែល n_i ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots.n_k!}$$

ជាចំនួនគត់។

47. ចូរបង្ហាញថា ផលបូក $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ។

48. (**អាមេរិច ១៩៩៣**)

តើមាន n ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលពហុកោណនិយ័តមួយ មាន n ជ្រុង មានមុំក្នុងជាចំនួនគត់គិតជាដឺក្រេ?។

ភាពចែកដាច់

49. ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $3n+7$ ចែកដាច់ $5n+13$។

50. តាង A ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង A' ជាចំនួនមួយដែលសរសេរដោយប្រើតួលេខនិងចំនួនខ្ទង់ដូច A តែតាមលំដាប់លំដោយមួយផ្សេងទៀត។ ចូរបង្ហាញថា បើ $A+A'=10^{10}$ នោះ A ចែកដាច់នឹង១០។

51. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន n យើងមាន n^2-1 ចែកដាច់ $2^{n!}-1$ ។

52. (**អន្តរជាតិ ១៩៨៤**)

ចូររកអោយបាននូវគូចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំង២ខាងក្រោម

(i) $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង៧

(ii) $(a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ចំលើយទទួលបាន។

53. តាង p ជាចំនួនបឋម។ ចូរបង្ហាញថា p ចែកដាច់ ab^p-ba^p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a និង b ។

54. គេអោយចំនួនបឋម $p\geq 7$។ ចូរបង្ហាញថា $11...1$ ដែលមាន លេខ១ ចំនួន $p-1$ ដង ជាចំនួនចែកដាច់នឹង p។

55. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $m,n\in\mathbb{Z}$ គេមាន $mn\left(m^{60}-n^{60}\right)$ ចែកដាច់នឹង 56786730 ជានិច្ច។

56. គេអោយចំនួនបឋមសេស p។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល p ចែកដាច់ $n2^n+1$។

57. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ $n>1$ ដែល n ចែកដាច់ 2^n-1 ទេ។

58. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $1+\left[\sqrt{2n}\right]$ ចែកដាច់ $2n$។

59. តើ ៧ ចែកដាច់ $\binom{1000}{500}$ រឺទេ?។

60. ចូរបង្ហាញថា $n=24$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលចែកដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនគត់ a ដែល $1\le a\le\sqrt{n}$។

61. ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មានលក្ខណៈ
"ចំពោះ $0<l<m<n$ គេមាន $S=l+(l+1)+...+m$ ចែកមិនដាច់នឹង n
ចំពោះគ្រប់ l,m,n។"
ចូរបង្ហាញថា លក្ខណៈនេះ អាចកើតមានតែក្នុងករណី n ជាស្វ័យគុណនៃ២មួយប៉ុណ្ណោះ។

62. (**អាមេរិច ១៩៩២**)
បណ្តាលេខមាន២ខ្ទង់ ចាប់ពី ១៩ ទៅ៩២ ត្រូវបានគេយកទៅសរសេរបន្តបន្ទាប់គ្នា ដើម្បីបង្កើតបានជាចំនួនគត់

$$192021222324...89909192$$

តើ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ៣ ធំបំផុតស្មើប៉ុន្មាន ដែលចែកដាច់ចំនួននេះ?។

63. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ n វិជ្ជមាន ដែល 2^n ចែកដាច់ 3^n-1។

64. បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ p ចែកដាច់ 2^p-2។

65. ចូរបង្ហាញថា n^2+23 ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់។

66. ចូរបង្ហាញថា បើ $p>3$ ជាចំនួនបឋម នោះ 24 ចែកដាច់ $\left(p^2-1\right)$ ។

67. ចូរបង្ហាញថា ពីក្នុងចំនោម៣ចំនួនគត់ណាមួយ គេអាចជ្រើសរើសយក២ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ a^3b-ab^3 ចែកដាច់នឹង១០។

68. ចូរបង្ហាញថា បើ 3 ចែកដាច់ $\left(a^2+b^2\right)$ នោះ 3 ចែកដាច់ a និង 3 ចែកដាច់ b។

69. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$, n^2 ចែកដាច់ $(n+1)^n-1$ ។

70. ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនសេសបឋម ហើយបើ $\frac{a}{b}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-1}$ នោះ p ចែក a ដាច់។

71. (**ហុងគ្រី ១៨៩៩**)

ចូរបង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

72. ចូរបង្ហាញថា បើ n សេស នោះ

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + ... - xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$$

ដូច្នេះ បើ n សេស នោះ $x+y$ ចែកដាច់ $x^n + y^n$។

73. ចូរបង្ហាញថា 1001 ចែកដាច់ $1^{1993} + 2^{1993} + 3^{1993} + ... + 1000^{1993}$

74. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយ គេមាន ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x មួយទៀត ដែលតួនិមួយៗរបស់ស្វ៊ីត $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, ...$ ចែកដាច់នឹង n។

75. (**រុស្ស៊ី ១៩៩៨**)
ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ពហុគុណ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល n ចែកដាច់ $3^{n-1} - 2^{n-1}$។

76. (**អន្តរជាតិ ១៩៩២**)
ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ a, b, c ដែល $1 < a < b < c$ ហើយ ដែល $(a-1)(b-1)(c-1)$ ចែកដាច់ $abc - 1$។

77. ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n+1$ ចែកដាច់ $n^2 + 1$

78. បើ 7 ចែកដាច់ $3x+2$ ចូរបង្ហាញថា 7 ចែកដាច់ $15x^2 - 11x - 14$

79. ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $5^{n-1} + 3^{n-1}$ ចែកដាច់ $5^n + 3^n$។

80. ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ n ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា ចែកដាច់នឹង $n!$។

81. ចូរបង្ហាញថា 6 ចែកដាច់ $n^3 - n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n។

82. ចូរបង្ហាញថា $2x+3$ ជាពហុគុណនៃ១១ លុះត្រាតែ $5x+2$ ជាពហុគុណនៃ១១ដែរ និងច្រាសមកវិញ។

83. តាង $p > 3$ ជាចំនួនបឋម។ ចូរបង្ហាញថា $p^2 - 1$ ជាពហុគុណនៃ១២។

84. ចូរកំនត់បណ្តាចំនួនគត់ a, b និង c ធំជាង១ ដែល a ចែកដាច់ $bc-1$, b ចែកដាច់ $ca-1$ និង c ចែកដាច់ $ab-1$។

85. បើ a ជាចំនួនគត់ នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 និងច្រាសមកវិញ។

86. ចូរបង្ហាញថា $3^{3n+3}-26n-27$ ជាពហុគុណ នៃ 169 ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

87. ចូរបង្ហាញថា បើ k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស នោះ 2^{n+2} ចែកដាច់ $k^{2^n}-1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

88. (**ចាល់កាជ័ ១៩៩៦**)

គេអោយចំនួនបឋម $p>5$ ។ គេកំនត់

$$S=\left\{p-n^2, n\in N, n^2<p\right\}$$

ចូរបង្ហាញថា មាន a និង b ជាធាតុរបស់ S ដែល $1<a<b$ ហើយ a ចែកដាច់ b ។

89. (**អន្តរជាតិ ១៩៩៤**)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត (m,n) ដែល $\frac{n^3+1}{mn-1}$ ជាចំនួនគត់។

90. គេជ្រើសរើសយក៥១ចំនួនគត់ពីក្នុងចំនោម $1,2,\ldots,100$ ។

ចូរបង្ហាញថា ទោះគេចាប់យ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គង់តែមានមួយចែកដាច់មួយទៀតដែរ។

សំនល់. ភាពសមមូល

91. តាង p ជាចំនួនបឋមមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

១) $\binom{p-1}{n}\equiv(-1)^n\pmod p, 1\le n\le p-1$

២) $\binom{p+1}{n}\equiv 0\pmod p, 2\le n\le p-1$

92. តាង p ជាចំនួនបឋម ដែល $p>5$ ។ ចូរបង្ហាញថា $p^8\equiv 1\pmod{240}$ ។

93. (**អាមេរិច ១៩៩៤**)

តាង r ជាសំនល់នៃវិធីចែក $1059; 1417$ និង 2312 នឹង $d>1$ ។ គណនា $d-r$ ។

ចំនួនការេ

94. (**អន្តរជាតិ ១៩៨៨**)

បើ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាចំនួនគត់

នោះ $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាការេនៃចំនួនគត់មួយ។

95. ចូរបង្ហាញថា ការេនៃចំនួនគត់ មានរាង $4k$ រឺក៏ $4k+1$។

96. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់នៅក្នុងស្វ៊ីត $11,111,1111,\ldots$ ជាការេនៃចំនួនគត់មួយទេ។

97. គេអោយ $a<b\le c<d$ ជាចំនួនគត់ ដែល $ad=bc$ និង $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$។

ចូរបង្ហាញថា a ជាចំនួនការេ។

98. ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ៣ចំនួនគត់តរៀងគ្នា មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ (មានន័យថា ជាចំនួនការេ រឺចំនួនគូប។ល។)

99. ចូរបង្ហាញថា គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយគត់ ដែល $2^8+2^{11}+2^n$ ជាចំនួនការេ។

100. ចូរកំនត់ចំនួនមិនការេទី n។ឧទាហរណ៏ ២ ជាចំនួនមិនការេទី១, ៣ជាចំនួនមិនការេទី២,៥ជាចំនួនមិនការេទី៣។ល។

101. តាង $f(n)=n+\left[\sqrt{n}\right]$។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m, ស្វ៊ីត

$$m, f(m), f\left(f(m)\right), f\left(f\left(f(m)\right)\right),\ldots$$

មានចំនួនគត់ការេយ៉ាងហោចណាស់មួយ។

102. ចូរបង្ហាញថា 4.41 ជាការេនៃចំនួនសនិទាន នៅក្នុងគ្រប់ប្រព័ន្ធរាប់ទាំងអស់។

103. ក) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ២ចំនួនគត់តគ្នាមិនអាចជាចំនួនគត់ការេទេ។

ខ) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ៣ចំនួនគត់តគ្នាមិនអាចជាចំនួនគត់ការេទេ។

គ) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ៤ចំនួនគត់តគ្នាមិនអាចជាចំនួនគត់ការេទេ។

104. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ x ដែល x^2-x+2 ជាចំនួនការេ។

105. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ x ដែល $1+x+x^2+x^3+x^4$ ជាចំនួនការេ។

106. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ a,b ដែល $a^4+(a+b)^4+b^4$ ជាចំនួនការេ។

107. ចូរបង្ហាញថា នៅក្នុងគ្រប់សំនុំទាំងអស់ដែលមានធាតុជា៣៣ចំនួនគត់ខុសៗគ្នា ដែលចំនួនគត់និមួយៗមានកត្តាបឋមក្នុងចំនោម $\{5;7;11;13;23\}$ គេមានធាតុ២ដែលផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ។

108. (អន្តរជាតិ ១៩៨៤)

គេអោយសំនុំ M មាន១៩៨៥ធាតុជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា។គ្មានធាតុណាមួយមានកត្តាបឋមធំជាង២៦ទេ។ ចូរបង្ហាញថា M មានសំនុំរងមួយ ដែលមាន៤ធាតុខុសៗគ្នា ដែលផលគុណជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤។

ចំនួនដែលមានរាងណាមួយ

109. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 6$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជាផលបូកនៃ២ចំនួនគត់ធំជាង ១ និង បឋមរវាងគ្នា។

110. (អាមេរិច ២០០១)

តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលជាពហុគុណនៃ 1001 ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលអាចសរសេរជារាង $10^j - 10^i$ បាន ដែល i និង j ជាចំនួនគត់ ហើយ $0 \le i < j \le 99$?។

111. (អាមេរិច ១៩៨៦)

ស្វ៊ីតកើន

$$1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$$

មានគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល ជាស្វ័យគុណនៃ៣ រឺជាផលបូកនៃស្វ័យគុណនៃ៣ផ្សេងគ្នា។ ចូរគណនា តួទី១០០នៃស្វ៊ីតនេះ។

112. (អាមេរិច ១៩៧៨)

ចំនួនគត់ n គេហៅវាថាជាលេខពិសេស បើគេអាចសរសេរជា $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ បាន ដោយ $a_1, \dots, a_k$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន(មិនចាំបាច់ខុសគ្នាក៏បាន) ដែល

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$$

ដោយដឹងថា ចំនួនគត់ចាប់ពី 33 ដល់ 73 សុទ្ធតែជាលេខពិសេសទាំងអស់ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ ដែល ≥ 33 សុទ្ធតែជា លេខពិសេស។

113. (អន្តរជាតិ ១៩៨៣)

គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b និង c បឋមនឹងគ្នា២។ ចូរបង្ហាញថា $2abc-ab-bc-ca$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $xbc+yca+zab$ បាន ដែលក្នុងនោះ x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានរឺសូន្យ ។

114. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន អាចសរសេរជារាង $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ បានទាំងអស់ ចំពោះចំនួនគត់ a,b,c,d វិជ្ជមាន។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត. តួចែករួមធំបំផុត

ចំនួនបឋម

115. (ចំនួនមែរសែន)
ចូរបង្ហាញថា បើ 2^n-1 ជាចំនួនបឋម នោះ n ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ។

116. ចូរបង្ហាញថា មានគូ(m,n)ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល m និង n មានកត្តាបឋមរួម ហើយ $(m-1)$ និង $(n-1)$ មានកត្តាបឋមរួមគ្នាដែរ។

117. គណនារកគ្រប់ចំនួនបឋមដែលមានរាង n^3-1 ចំពោះចំនួនគត់ $n>1$។

118. ចូរបង្ហាញថា n^4+4 ជាចំនួនបឋម តែក្នុងករណី $n=1$ ប៉ុណ្ណោះ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$។

119. គណនារកគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 1$ ដែល n^4+4^n ជាចំនួនបឋម។

120. គេដឹងថា 1002004008016032 មានកត្តាបឋម $p>250000$។ ចូរគណនា កត្តាបឋមនេះ។

121. ចូរគណនាចំនួននៃចំនួនបឋមដែល ≤ 100។

122. (រូម៉ានី ២០០៣)
គេអោយចំនួនបឋម $n_1<n_2<...<n_{31}$។ ចូរបង្ហាញថា បើ 30 ចែកដាច់ $n_1^4+n_2^4+...+n_{31}^4$ នោះក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនោះគេអាចរកបានចំនួនបឋមពាតរៀងគ្នា។

ចំនួនពហុគុណ

123. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k គេអាចរកបានចំនួនគត់ n មួយ ដែលបណ្ដាចំនួន $n+1,...,n+k$ សុទ្ធតែជាចំនួនពហុគុណ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត តួចែករួមធំបំផុត

124. គាង $(a,b)=1$។ ចូរបង្ហាញថា $\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)=1$ រឺ $=3$។

125. គាង $a,a\neq 1,m,n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា
$\left(a^m-1,a^n-1\right)=a^{(m,n)}-1$

126. (អាមេរិច ១៩៨៤)

បណ្ដាចំនួននៅក្នុងស្វ៊ីត

$101, 104, 109, 116, \ldots.$

មានរាង $a_n = 100 + n^2, n = 1, 2, \ldots$ ចំពោះ n និមួយៗ តាង $d_n = (a_n, a_{n+1})$។

ចូរគណនា $\max_{n \geq 1} d_n$។

127. ចូរបង្ហាញថា បើ m និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ m ជាចំនួនសេស នោះ

$$\left(2^m - 1, 2^n + 1\right) = 1$$

128. ចូរបង្ហាញថា មានស្វ៊ីតនព្វន្តវែងមួយ ដែលតួរបស់វានិមួយៗបឋមរវាងគ្នា២ៗ។

129. តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន ≤ 1260 ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលបឋមនឹង១២៦០?។

130. តាង a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា ab និង $a + b$ ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ។

131. គេកំនត់ ចំនួនហ្វែម៉ាទី n ដោយរូបមន្ត $F_n = 2^{2^n} + 1$។

ចូរបង្ហាញថា ចំនួន F_n ទាំងអស់បឋមនឹងគ្នា ពីរៗ។

132. (អន្តរជាតិ ២០០៥)

គេអោយស្វ៊ីត $a_1, a_2, \ldots$ កំនត់ដោយ

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលបឋមនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីត។

133. ចូរគណនាចំនួនតំរៀបនៃគូ (a, b) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ដែល $PPCM$ នៃ a និង b ស្មើនឹង $2^3 5^7 11^{13}$។

134. (កូរ៉េ ១៩៩៨)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន l, m, n បឋមនឹងគ្នា២ៗ ដែល

$$(l + m + n)\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

ជាចំនួនគត់។

135. គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n > 3$។ ចូរបង្ហាញថា បណ្ដាផលគុណ $x_1 x_2 \ldots x_k \ (k \geq 1)$ ដែលកត្តា x_i របស់វា ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq n$$

មានពហុគុណរួមតូចបំផុតតូចជាង $n!$។

136. (អន្តរជាតិ ១៩៨៩)

ចូរបង្ហាញថា ប្រភាគ $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគមិនអាចសំរួលបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

137. (អាមេរិច ១៩៧២)

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$$

138. ចូរគណនាចំនួននៃចតុធាតុ (a,b,c,d) ដែល

$3^r7^s=[a,b,c]=[b,c,d]=[c,d,a]=[d,a,b]$

បំបែកជាកត្តាបឋម

139. ចូរគណនាផលគុណនៃបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានខុសគ្នា របស់ $n=420^4$។

140. ចូរគណនាផលបូកនៃតួចែកវិជ្ជមានគូរបស់ 10000។

141. (អាមេរិច ១៩៨៨)

ចូរគណនាប្រូបាបីលីតេ ក្នុងការជ្រើសរើសដោយចៃដន្យនូវតួចែកវិជ្ជមានរបស់ 10^{99} បានជាចំនួនពហុគុណនៃ10^{88}។

142. យើងហៅថាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយជាចំនួនឥតខ្ចោះ បើវាស្មើនឹងផលបូកតួចែកវិជ្ជមានរបស់វាក្រៅពីខ្លួនវា។ ឧទាហរណ៍ ៦ជាចំនួនឥតខ្ចោះ ព្រោះ $6=\sum_{d|6,d\neq 6} d=1+2+3$។

ចូរបង្ហាញថា ចំនួនគូមួយ ឥតខ្ចោះ លុះត្រាតែ វាមានរាង $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ ដែល p និង 2^p-1 ជាចំនួនបឋម និងច្រាសមកវិញ។

ផ្នែកគត់

143. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $n \geq 0$ គេមាន $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$

144. គណនាផ្នែកគត់របស់

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

145. ចូរបង្ហាញថា តួរបស់ស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ $\left\lfloor(1+\sqrt{2})^n\right\rfloor$ ដែល$n = 0; 1; 2; ...$ ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ជាចំនួនគូនិងសេសឆ្លាស់គ្នា។

146. (អាមេរិច ១៩៨៧)

ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ធំបំផុត ដើម្បីអោយ គេមានចំនួនគត់ k មួយគត់ដែល

$$\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$$

147. (អាមេរិច ១៩៩៧)

សន្មតថា a ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $\left\{a^{-1}\right\}=\left\{a^2\right\}$ និង $2<a^2<3$ ។ ចូរគណនា $a^{12}-144a^{-1}$។

148. (អាមេរិច ២០០៣)

គណនាចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $\frac{1}{n}$ នៅជិត$\left\{\sqrt{123456789}\right\}$ បំផុត។

149. គណនាពហុធាមិនសូន្យ $P(x,y)$ មួយ ដែល $P([2t],[3t])=0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត t។

150. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

$[x]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x។ ចូរគណនា

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+...+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+...$$

151. (សមភាពហ៊ែរមីត)

ចូរបង្ហាញថា បើ x ជាចំនួនពិត និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

152. (អាមេរិច ១៩៨៨)

តើក្នុងចំនោម១000ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង មានប៉ុន្មានដែលអាចសរសេរជារាង ខាងក្រោមបាន?

$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$

153. (អាមេរិច ១៩៩១)

សន្មតថា r ជាចំនួនពិត ដែល

$$\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\left[r+\frac{21}{100}\right]+\ldots\left[r+\frac{91}{100}\right]=546$$

ចូរគណនា $[100r]$។

154. ចូរកំនត់ចំនួនតួដែលមានតំលៃខុសគ្នាក្នុងស្វីតខាងក្រោម

$$\left[\frac{1^2}{2005}\right],\left[\frac{2^2}{2005}\right],\ldots,\left[\frac{2005^2}{2005}\right]$$

155. តាង $0<a_1<a_2<\ldots<a_n\le 2n$ ជាចំនួនគត់ដែល ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃរាល់បណ្តា a_i,២ៗមាន តំលៃធំជាង $2n$។ ចូរបង្ហាញថា $a_1>\left[\frac{2n}{3}\right]$។

សមីការឌីយ៉ូផង់ទីន

156. ដោះស្រាយសមីការ

$$2^n + 1 = x^2$$

157. ដោះស្រាយសមីការ

$$x^2 = 2 + 6y^2 + y^4$$

158. ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែល

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

159. (ហុងគ្រី ១៩៩៧)

ចូរកំនត់ចំលើយជាចំនួនគត់នៃសមីការ

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+7)^3 = y^3$$

160. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ x, y ដែល

$$x^2 = y^5 - 4$$

161. ក) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n = a^2$។

ខ) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n = a^2 - 1$។

គ) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n = a^2 - 2$។

162. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ x, y, z ដែល

$$x^3 + 9y^3 = 3z^3$$

163. ចូរបង្ហាញថា គេមានត្រីធាតុសនិទានមិនគត់វិជ្ជមាន (x, y, z) ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$$

ដែល $\{t\} = t - [t]$ តាងអោយ ផ្នែកទសភាគនៃ t។

164. (ហុងគ្រី ១៩៩៨)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែល $z \geq 2$ និង

$$(x+1)^2 + \ldots + (x+99)^2 = y^z$$

165. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y ដែល $x^y = y^x$។

166. (លីថួនី ១៩៩៤)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ m, n, k ដែល $k \geq 2$ និង

$$1+2!+3!+\ldots+n!=m^k$$

167. (អ៊ីតាលី ១៩៩៤)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ x, y ដែល

$$y^2=x^3+16$$

168. តាង x, y, z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $2x^x+y^y=3z^z$។ ចូរបង្ហាញថា $x=y=z$។

169. (អៀរឡង់ ១៩៩៥)

ចំពោះតំលៃណាខ្លះនៃ a ដែលសមីការ

$$x^2+axy+y^2=1$$

មានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុង $\mathbb{Z}$?។

170. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x, y, z ដែល

$$x^2+y^2=7z^2$$

171. ក) ចូរកំនត់ពាចំនួនគត់ធម្មជាតិ a, b, c (មិនបាច់ខុសគ្នាក៏បាន) ដែល

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ខ) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីអោយគេអាចរកបាន n ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $x_1, \ldots, x_n$ (មិនបាច់ខុសគ្នាក៏បាន) ដែល

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}$$

172. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានរឺសូន្យ a, b, c, d ដែល

$$a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2=0$$

173. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ t តូចបំផុត ដែល គេមានចំនួនគត់ $x_1, \ldots, x_t$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x_1^3+\ldots+x_t^3=2002^{2002}$$

174. (តៃវ៉ាន់ ១៩៩៨)

តើសមីការខាងក្រោម

$$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=xyzuv-65$$

ដែល x, y, z, u, v ជាចំនួនគត់ធំជាង ១៩៩៨ មានរឺសរឺទេ?។

175. (ឥណ្ឌា ១៩៩៨)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, n ដែល

$$(x, n+1)=1 \text{ និង } x^n+1=y^{n+1}$$

176. (អន្តរជាតិ ១៩៩៧)

ចូរកំនត់គ្រប់គូ (a,b) នៃចំនួនគត់ $a \ge 1, b \ge 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$a^{b^2} = b^a$$

177. យើងពិនិត្យសមីការ

$$\left(a^a\right)^n = b^b \qquad (*)$$

ក) ចំពោះចំនួនគត់ណាខ្លះនៃ n ដែលសមីការ $(*)$ មានចំលើយគត់មួយដែល $a,b>1$។

ខ) ដោះស្រាយសមីការ $(*)$ ចំពោះ $n=5$។

178. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y ដែល

$$x + y^2 + z^3 = xyz$$

ដែល $z = PGCD(x,y)$។

179. ក) ចូរកំនត់ត្រីកោណកែង ដែលមានជ្រុងជាចំនួនគត់ដែល មានក្រលាផ្ទៃជាការេនៃចំនួនគត់។

ខ) ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y,z ដែល $x^4 - y^4 = z^2$។

180. ទ្រឹស្តីបទ-ត្រីធាតុពីតាករ

តាង x,y,z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលមានតួចែករួមស្មើ១ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ដូច្នេះ x រឺក៏មិនអញ្ចឹងទេ y ជាចំនួនគូ។ ក្នុងករណីដែល x ជាចំនួនគូ នោះគេមានចំនួនគត់ m និង n ដែលបឋមនឹងគ្នា ហើយមានភាពគូសេសផ្ទុយគ្នា ដែល

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2 \text{។}$$

181. ចូរបង្ហាញថា គ្មានត្រីធាតុនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $x^4 + y^4 = z^4$ ទេ។

182. គណនារឺសសនិទាន x,y ដែល

$$x^2 + y^2 = 1$$

183. ចូរកំនត់ចំនួនសនិទាន x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2 + 3y^2 = 1$$

184. តាង $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃ x។ តើសមីការ

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

មានរឺសរឺទេ?។

185. (អន្តរជាតិ សតលីស ២០០៣)

ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចបំផុត ដើម្បីអោយមាន ចំនួនគត់ $x_1, x_2, \dots, x_k$ ដែល

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 = 2002^{2002}$$

186. ដោះស្រាយសមីការ

$$\left[x^2 - x - 2\right] = [x],\ x \in \mathbb{R}$$

187. ដោះស្រាយសមីការ

$$4x^2 - 40[x] + 51 = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

188. (**អូស្ត្រាលី ១៩៩៩**)

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$x + [y] + \{z\} = 200$$

$$\{x\} + y + [z] = 190.1$$

$$[x] + \{y\} + z = 178.8$$

189. ចូរគណនាចំនួនគត់ x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$23x + 29y = 1$$

190. គណនាចំលើយសមីការដ្យូផង់ខាងក្រោម

$$23x + 29y = 7$$

191. តើមានចំនួនគត់ x, y ដែល $3456x + 246y = 73$ រឺទេ?។

192. ចូររកចំលើយជាចំនួនគត់ នៃសមីការ

$$3456x + 246y = 234$$

193. ចូរបង្ហាញថា $m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$ មិនអាចស្មើ៣៣ទេ។

194. តាង $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le n$ ដែល $k > \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ ជាចំនួនគត់។

ចូរបង្ហាញថា $a_1 + a_j = a_r$ មានចំលើយ។

195. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ដែល $x^2 - 5y^2 = 2$

196. តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y ដែល $x^3 = 2^y + 15$ រឺទេ?

197. (**អាមេរិច ១៩៧៩**)

ចូរកំនត់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $(n_1, n_2, \ldots, n_{14})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម

$$n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_{14}^4 = 1599$$

198. (**អន្តរជាតិ ១៩៨៤**)

តាង a, b, c និង d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ដែល $a < b < c < d$, $ad = bc$ និង $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ ដែល k, m ជាចំនួនគត់ពីរ។ ចូរបង្ហាញថា $a = 1$។

199. (អៀរឡង់ ១៩៩៦)
តាង p ជាចំនួនបឋមមួយ និង a,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា បើ $2^p+3^p=a^n$ នោះ $n=1$។

200. (អន្តរជាតិ ១៩៨១)
គណនាតំលៃធំបំផុតរបស់ m^2+n^2 ដែលក្នុងនេះ m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $m,n\in\{1,2,3,...,1981\}$ និង $\left(n^2-mn-m^2\right)^2=1$

201. ចូរកំនត់តំលៃវិជ្ជមានតូចបំផុត នៃ 12^m-5^n ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n។

202. ចូរបង្ហាញថា សមីការ $x^2-y^2=1$ គ្មានរឺសជាចំនួនគត់វិជ្ជមានទេ។

203. សន្មតថា a,b,c ជាចំនួនគត់ ដែល $a^6+2b^6=4c^6$។ ចូរបង្ហាញថា $a=b=c=0$។

204. គណនាចំនួនគត់ (a,b,c) ដែល $a^3+2b^3=4c^3$។

205. ចូរបង្ហាញថា សមភាព $x^2+y^2+z^2=2xyz$ អាចពិតចំពោះបណ្តាចំនួន (x,y,z) តែករណីដែល $x=y=z=0$ ប៉ុណ្ណោះ។

206. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនបឋម p,q និង ចំនួនគត់ $r,s\geq 2$ ដែល

$$\left|p^r-q^s\right|=1$$

207. តាង (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃ ចំនួនគត់ពីរ។ យើងសន្មតថា ស្វ៊ីត (a_n+b_n) និង (a_nb_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនថេរ c មួយដែលចំពោះគ្រប់ n យើងមាន $a_n=c$ រឺ $b_n=c$ ។

208. តាង

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$$

ជាពហុធាមួយដែលមានដឺក្រេ n ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់។
បើ $a_0,a_n,f(1)$ សុទ្ធតែជាចំនួនសេស ចូរបង្ហាញថា $f(x)=0$ គ្មានរឺសជាចំនួនសនិទានទេ។

209. ចូរបង្ហាញថា បើពហុធា

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង មានតំលៃស្មើ៧ ត្រង់៤ចំនួនគត់ផ្សេងគ្នានៃ x នោះ គ្មានតំលៃ x ណាដែលពហុធានេះ មានតំលៃស្មើ ១៤ទេ។

ឡូស៊ីក

1.▲បើ s ជាស្វ័យគុណគោល២ នោះសំណើពិត ដោយមិនចាំបាច់ស្រាយបញ្ជាក់។ បើ s មិនមែនជាស្វ័យគុណគោល២ នោះវាត្រូវនៅចន្លោះ ស្វ័យគុណគោល២ ពីរតរៀងគ្នា មានន័យថា $2^r < s < 2^{r+1}$ ។ នាំអោយ $2^{r+1} < 2s$ នាំអោយ $s < 2^{r+1} < 2s$ មានន័យថាមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ នៅចន្លោះ $[s,2s]$ (ស្មើនឹង 2^{r+1})។

2. ▲យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំណើន។

ដោយសារ M ជាសំណុំមិនទទេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះM មានធាតុដែលតូចបំផុត តាងដោយ a ។ តាមសម្មតិកម្ម $[\sqrt{a}]$ ជាធាតុរបស់ M តែ $[\sqrt{a}] \leq \sqrt{a} \leq a$ តែ a ជាធាតុតូចជាងគេ ដូច្នេះ ទាល់តែ $a = 1$ ។ មានន័យថា 1 ជាធាតុមួយរបស់ M ។

ដោយ 1 ជាធាតុមួយរបស់ M នោះ 4 ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ ហើយដូចគ្នាដែរ $4.4 = 4^2$ ។ល។ ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមានរាង $4^n = 2^{2n}, n = 1,2,...$ ជាធាតុរបស់ M ។ បន្ទាប់មកទៀត $\left[\sqrt{2^{2n}}\right] = 2^n$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ មានន័យថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ ដែលជាស្វ័យគុណគោល២ ជាធាតុរបស់ M ។

ឥលូវយើងសន្មតថា មាន$n \in N$ មួយដែលមិនមែនជាធាតុរបស់M ។ ដូច្នេះn មិនមែនជាស្វ័យគុណគោល២ទេ។ ដោយ $n \notin M$ នោះ គ្មាន ចំនួនគត់ណាមួយ នៅចន្លោះ $A_1 = \left[n^2,(n+1)^2\right)$ ដែលជាធាតុរបស់ M ទេ ព្រោះ គ្រប់ $y \in A_1$ គេមាន $[\sqrt{y}] = n$ ដែល $n \notin M$ ដូច្នេះ $[\sqrt{y}] \notin M$ ដូច្នេះ $y \notin M$ (ព្រោះ បើ $y \notin M$ នោះ $[\sqrt{y}]$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ) ។ ដូចគ្នាដែរ គ្មាន ចំនួនគត់ណាមួយ $z \in A_2$ ដែល $A_2 = \left[n^4,(n+1)^4\right)$ ជាធាតុរបស់ M ទេ ព្រោះ បើមិនអញ្ចឹងទេ នាំអោយ មានធាតុមួយជារបស់ A_1 ដែលជាធាតុរបស់ M ដែរ តែផ្ទុយពីការសន្មត។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន គ្មានធាតុណាមួយ ដែលស្ថិតនៅចន្លោះ $A_r = \left[n^{2^r},(n+1)^{2^r}\right)$ ជាធាតុរបស់ M ទេ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា ចន្លោះនេះ ធំណាស់ ដែលអាចមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជាធាតុរបស់ M ដែលនាំអោយ វាផ្ទុយនឹងការឧបមាដែលថា គ្មានធាតុរបស់ A_r ដែលជាធាតុរបស់ M ។

អនុគមន៍ $f(x)=\log_2 x$ ជាអនុគមន៍កើន ចំពោះ $x\in R_+$ ។ ដូច្នេះ $\log_2(n+1)-\log_2 n>0$ ។ ដោយអនុគមន៍ $f(x)=2^{-x}$ ជាអនុគមន៍ចុះ លើ R នោះ គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមានធំគ្រប់គ្រាន់ k ណាមួយ ដែល

$$2^{-k}<\log_2(n+1)-\log_2 n$$

$$\Rightarrow\quad (n+1)^{2^k}>2n^{2^k}$$

$\Rightarrow$ចន្លោះ $\left[n^{2^k},2n^{2^k}\right]$ ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $\left[n^{2^k},(n+1)^{2^k}\right)$ ។ តែគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន s ចន្លោះ $[s,2s]$ សុទ្ធតែមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជានិច្ច។ ដូច្នេះ យើងទាញបានភាពផ្ទុយនឹងការឧបមាដែលយើងចង់បាន៕

3. ▲ចែក $\{1,2,...,126\}$ ជា៦សំនុំ

$$\{1,2\},\ \{3,4,5,6\},\ \{7,...,14\},\ \{15,...,30\},\ \{31,...,62\}\ \text{និង}\ \{63,...,126\}$$ ។

តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មាន២ក្នុងចំនោម ៧ចំនួនគត់នោះ ស្ថិតនៅក្នុងសំនុំតែមួយក្នុងចំនោមសំនុំទាំង៦ ខាងលើ ហើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $b<a\le 2b$ ។

4. ▲គេអាចបង្កើតបានពី សំនុំមួយដែលមាន១០ធាតុ នូវ សំនុំរងមិនទទេ ខុសៗគ្នាចំនួន

$$\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+...+\binom{10}{10}=(1+1)^{10}-1=2^{10}-1=1023$$

(តាម $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}C_n^k x^k$)

ចំពោះសំនុំរងនិមួយៗ យើងគណនាផលបូករបស់វា។ ផលបូកធំបំផុត គឺ $90+91+...+99=945<1023$ ។ មានន័យថា ត្រូវតែមានសំនុំរងពីរ ដែលមានផលបូកដូចគ្នា។

5. ▲យើងសង្កេតឃើញថា បើយើងជ្រើសរើស $n+1$ ចំនួនគត់ ចេញពី $2n$ ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា នោះគេត្រូវតែទទួលបានចំនួនពីរ ដែលមានផលសង ស្មើ n ។ ព្រោះ យើងអាចចាប់ផ្គូ $2n$ ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា

$$\{a+1,a+2,a+3,...,a+2n\}$$

ទៅជា n សំនុំ

$$\{a+1,a+n+1\},\{a+2,a+n+2\}\ ,...\ \{a+n,a+2n\}$$

ដូច្នេះ បើយើងត្រូវជ្រើសរើស យក $n+1$ ចំនួនគត់ ចេញ ពី n សំនុំ នោះ វាត្រូវមានចំនួនគត់ពីរ ដែលស្ថិតនៅក្នុងសំនុំតែមួយ ហើយមានផលសងស្មើ n ។

ឥលូវ យើងបង្កើត៥សំនុំដែលមាន២០ធាតុ ដូចខាងក្រោម

$$\{1,2,...,20\},\{21,22,...,40\},\{41,42,...,60\},\quad \{61,61,...,80\},\{81,82,...,100\}$$

យើងត្រូវជ្រើសរើសយក ៩៥ចំនួនគត់ ចេញពី ៩សំនុំខាងលើ ដូច្នេះ ត្រូវមានសំនុំមួយដែលគេយកយ៉ាងតិច១១ ចំនួនគត់។ ពីសំនុំនោះ តាមការអង្កេតខាងលើ (យក $n = 10$) ត្រូវមាន២ចំនួនគត់ ដែលមានផលសងស្មើ១០។

6. ▲ឧបមាថា យើងទាញថាសចេញមួយចំនួនដំបូងមានលេខខុសគ្នាទាំងអស់ ដោយមិនមានថាសណាមានលេខដូចគ្នាដល់ទៅ១០ដងទេ។ ដូច្នេះ សន្មតថាយើងទាញចេញថាសមានលេខ១ដល់លេខ៩ ទាំងអស់ ដូច្នេះ មានទាំងអស់ $1+2+...+9=45$ ថាស។ ដូច្នេះ ថាសនៅសល់មានតែ លេខ១០ដល់លេខ៥០។

បន្ទាប់មកទៀត សន្មតថា យើងទាញយកថាសពីក្នុងចំនោម ថាសលេខ ១០ដល់លេខ៥០ មួយមុខចំនួន៩ (ដើម្បីកុំអោយទាន់មានថាស១០មានស្លាកដូចគ្នា)។ ដូច្នេះ យើងយកថាសចេញបាន ចំនួន $45+9.41=414$ ហើយ។ ថាសដែលទាញចេញលើកទី 415 នឹងធ្វើអោយមានថាសចំនួន១០មានលេខដូចគ្នា។

7. ▲សន្មតថាសុខជាមនុស្សម្នាក់នៅក្នុងមនុស្សទាំង១៧នាក់នោះ។ គាត់សរសេរសំបុត្រទៅមនុស្ស១៦ នាក់ទៀត។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានប្រធានបទមួយ ក្នុងចំណោមប្រធានបទទាំង៣ ដែលសុខសរសេរទៅកាន់មនុស្សយ៉ាងតិច៦នាក់ផ្សេងគ្នាដែរ ។ ហៅប្រធានបទនោះថា ប្រធានបទលេខ១។ បើសិនជាមាន២នាក់ក្នុងចំណោម៦នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមកនិងទៅសុខ ពីប្រធានបទលេខ១ ដែរ នោះ មានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

ផ្ទុយទៅវិញ សន្មតថា អ្នកទាំង៦នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក តែលើប្រធានបទលេខ២ រឺលេខ៣ ប៉ុណ្ណោះ។ សន្មតថា សៅនៅក្នុងចំណោមអ្នកទាំង៦នាក់នេះ។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានប្រធានបទមួយក្នុងចំណោមប្រធានបទ២ រឺ៣ ដែលសៅសរសេរទៅកាន់មនុស្សយ៉ាងតិច៣នាក់ផ្សេងគ្នាដែរ ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំង៥នាក់ទៀត។ ហៅប្រធានបទនេះ ថា ប្រធានបទលេខ២។ បើសិនជាមាន២នាក់ ក្នុងចំណោម៣នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក និងទៅសៅ ពីប្រធានបទ លេខ២នេះ នោះ មានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

ផ្ទុយទៅវិញ បើអ្នកទាំង៣នាក់ នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក តែពីប្រធានលេខ៣ នោះក៏ មានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

8. ▲យើងដឹងថា មានចំនួនបឋម p មួយដែល គ្រប់ ចំនួន $p+1,...,p+n$ ជាចំនួនពហុគុណ។ សៅត្រូវកំនត់រកចំនួនបឋម p នោះសិន។ សៅអាចសួរទៅសុខនូវបណ្តាចំនួនគត់ $\{1,...,n-1\}$ម្តងមួយៗ។ ដើម្បីដឹងថា m ជាលេខ១រឺអត់ វាសួរ លេខ $p-1$ បើ សុខឆ្លើយថា បឋមនោះ $m=1$។ បើមិនមែនទេ m មិនមែនជាលេខ១ទេ។ បន្ទាប់មកទៀតវាតេស្តលេខ២ទៀត ដោយសួរទៅសុខនូវលេខ $p-2$ ហើយធ្វើសេចក្តីសន្និដ្ឋានដូចខាងលើ។

ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា សៅត្រូវសួរយ៉ាងច្រើន $n-1$ សំនួរ ព្រោះ វាមិនចាំបាច់តេស្តលេខ $n-1$ ទេ ព្រោះបើ គ្រប់ $p-k$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ចំពោះ $k \le n-2$ នោះ $m=n-1$។

9. ▲សំនួរខាងលើសមមូលនឹងសំនើ "បើមាន ថ្ងៃសុក្រទី១៣ នោះត្រូវមានថ្ងៃអាទិត្យទី១"។

តារាងខាងក្រោមគណនាថ្ងៃទី១នៃខែនិមួយៗ តើត្រូវនឹងថ្ងៃអ្វី។
តាមរយៈ ជួរឈរ $\bmod 7$ យើងឃើញថា មានយ៉ាងណាស់ថ្ងៃអាទិត្យទី១មួយថ្ងៃដែរ។(នៅក្នុងជួរឈរនេះ មានន័យថា បើ ១ត្រូវជាថ្ងៃអាទិត្យនោះ ២ច័ន្ទ ៣អង្គា ៤ពុធ ៥ព្រហស្បតិ ៦សុក្រ ០សៅរ៍។ ដោយវាមានគ្រប់លេខពី០ ដល់ ៦ មានន័យថា យើងចង់យកលេខប៉ុន្មានជាថ្ងៃអាទិត្យក៏បាន)។

ខែ	លំដាប់ថ្ងៃដើមខែនិមួយៗ គិតពីដើមឆ្នាំមក	$(\bmod 7)$
មករា	១	១
កុម្ភៈ	៣២ (=១កុម្ភៈ)	៤
មិនា	៦០រឺ ៦១(=១មិនា)	៤រឺ៥
មេសា	៩១រឺ៩២	០រឺ១
ឧសភា	១២១រឺ១២២	២រឺ៣
មិថុនា	១៥២រឺ១៥៣	៥រឺ៦
កក្កដា	១៨២រឺ១៨៣	០រឺ១
សីហា	២១៣រឺ២១៤	៣រឺ៤
កញ្ញា	២៤៤រឺ២៤៥	៦រឺ០
តុលា	២៧៤រឺ២៧៥	១រឺ២
វិច្ឆិកា	៣០៥រឺ៣០៦	៤រឺ៥
ធ្នូ	៣៣៥រឺ៣៣៦	៦រឺ០

10. ▲យើងតំរៀប១០០ចំនួនគត់ជា៥០សំនុំ

$$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\ldots,\{99,100\}$$

សំនុំនិមួយៗមានធាតុរបស់វាបឋមនឹងគ្នា។

ដោយគេត្រូវជ្រើសរើស៥១ចំនួនគត់ នោះគេត្រូវតែបាន២ចំនួនដែលនៅក្នុងសំនុំតែមួយ។ មានន័យថា ត្រូវតែទទួលបាន២ចំនួនដែលបឋមរវាងគ្នា។

11. ▲គេត្រូវការប្រើលេខចំនួន $137,94/0,02 = 6897$ ។ ទូពីលេខ១ ដល់លេខ៩ ត្រូវប្រើលេខចំនួន៩លេខ។ ពីលេខ១០ដល់លេខ៩៩ ត្រូវប្រើលេខ$2.90 = 180$ លេខ ហើយទូរពីលេខ១០០ដល់លេខ៩៩៩ ត្រូវប្រើលេខចំនួន$3.900 = 2700$ ។ ទូនៅសល់ត្រូវការតួលេខចំនួន $6897 - 2700 - 180 - 9 = 4008$ ។ ដូច្នេះត្រូវមានទូចំនួន $4008/4 = 1002$ ទៀត ដែលទូនិមួយៗប្រើលេខ៤ខ្ទង់។ ដូច្នេះជាសរុបមានទូចំនួន $1002 + 999 = 2001$ ។

12. ▲ចំនួនគត់ដែលធំមិនលើសពី២០០១ មានចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៣ចំនួន $\lfloor 2001/3 \rfloor = 667$ ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ4 ចំនួន $\lfloor 2001/4 \rfloor = 500$ ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ$12 = 3 \times 4$ មានចំនួន $\lfloor 2001/12 \rfloor = 166$។ ដូច្នេះចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៣រឺ៤ មានចំនួន $667 + 500 - 166 = 1001$(ដក ១៦៦ចេញ ព្រោះរាប់ច្រំដែលប៉ុណ្ណឹងដង)។

បន្ទាប់មកយើងត្រូវដកចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៥ ដែលពហុគុណនឹង៣ រឺនឹង៤ ចេញ។ ចំនួនពហុគុណនឹង៥ផងនឹង៣ផងមានចំនួន $\lfloor 2001/15 \rfloor = 133$ ។ ចំនួនពហុគុណនឹង៥ផងនឹង៤ផងមានចំនួន $\lfloor 2001/20 \rfloor = 100$ ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៣ ៤និង៥ មានចំនួន $\lfloor 2001/60 \rfloor = 33$ ។ ដូច្នេះចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៥ ដែលពហុគុណនឹង៣ រឺនឹង៤ មានចំនួន $100 + 133 - 33 = 200$ ។

ដូច្នេះចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៣រឺនៃ៤ តែមិនមែនជាពហុគុណនៃ៥មានចំនួន $1001 - 200 = 801$ ។

13. ▲តាង zជាលេខខ្ទង់ទី១៩៨៣។ យើងកាត់តួលេខក្រោយក្បៀសរបស់x ត្រឹមខ្ទង់ទី១៩៨៣ជា

$$\underbrace{123456789}_{A}\underbrace{101112\ldots99}_{B}\underbrace{100101\ldots z}_{C}$$

A មានលេខ៩ខ្ទង់។ B មានលេខ $2 \times 90 = 180$ ខ្ទង់។ ដូច្នេះC ត្រូវមានលេខ$1983 - 189 = 1794$ ខ្ទង់។ យើងមាន $1794 = 598 \times 3 + 0$ ។ ដូច្នេះ C មានលេខ៣ខ្ទង់ដំបូងចំនួន598 ។ លេខ៣ខ្ទង់ទីមួយស្មើ១០០ ទីពីរស្មើ១០១....ទី៥៩៨ស្មើ $598 + 99 = 697$ ។ ដូច្នេះខ្ទង់ទី១៩៨៣ស្មើ $z = 7$ ។

14. ▲សន្មតផ្ទុយទៅវិញថា មានរបៀបអង្គុយដែលគ្មានក្មេងស្រីនៅអមសង្ខាងក្មេងប្រុស។ យើងកំនត់ប្លុកមួយដោយ ក្មេងស្រីម្នាក់រឺពីរនាក់អង្គុយជាប់គ្នា ហើយមានក្មេងប្រុសអង្គុយសង្ខាង

...ប្រុស.ស្រី.(ស្រី).ប្រុស....

ដើម្បីកុំអោយមានក្មេងម្នាក់ដែលអ្នកនៅសង្ខាងវា ជាក្មេងស្រីនោះទាល់តែប្លុកនិមួយៗមានក្មេងស្រីនៅកណ្តាល យ៉ាងច្រើនពីរនាក់ ហើយត្រូវមានក្មេងប្រុសអង្គុយអមយ៉ាងតិចពីរនាក់។ ដូច្នេះប្លុកបែបនេះ មានយ៉ាងហោច ណាស់ចំនួន $[25/2]=13$ ហើយត្រូវការក្មេងប្រុសយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន $2.13=26$ នាក់ដែរដើម្បីអង្គុយ នៅរវាងប្លុកនិមួយៗ។ ប៉ុន្តែយើងមានក្មេងប្រុសតែ២៥នាក់តែប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះការសន្មតរបស់យើងមិនអាចទៅ រួចទេ។

15. ▲តាងលេខជើងនិមួយៗរបស់ពីងពាងដោយលេខ១ដល់លេខ៨។ តាង a_k និង b_k ជាស្រោមជើងនិង ស្បែកជើង ដែលស្ថិតនៅជើងទី k ។ តំរៀបដែលអាចនៃស្រោមជើងនិងស្បែកជើង ជាចំលាស់នៃ $a_1; b_1; \dots; a_8; b_8$ ដែល a_k ត្រូវនៅមុខ b_k ចំពោះ $1\le k\le 8$ ។មានចំលាស់នៃចំនួនទាំង១៦នេះ ចំនួន $16!$ ហើយa_1 នៅមុខ b_1 ចំលាស់មានចំនួនពាក់កណ្តាលគឺ $16!/2$។ ដូចគ្នាដែរ ចំនួនចំលាស់ដែលa_2 នៅមុខ b_2 មានចំនួនពាក់កណ្តាលនៃចំនួនក្រោយនេះគឺ $16!/2^2$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបានចំនួនចំលាស់ដែលមាន a_k នៅមុខ b_k ដែល $1\le k\le 8$ មានចំនួន $16!/2^8$ ។

16. ▲សន្មតថាយុវជននោះយកស្រោមជើង៤ដំបូងមានពណ៌ខុសគ្នាទាំងអស់។ ដូច្នេះវាចាប់មិនទាន់បានមួយគូ ទេ។ វាយកស្រោមជើងមួយទៀត។ ទោះជាស្រោមជើងនេះពណ៌អីក៏ដោយ ក៏គង់ទទួលបានស្រោមជើងមានពណ៌ ដូចគ្នាមួយគូដែរ។ សន្មតថាពណ៌ខៀវ។ ដូច្នេះយុវជននេះចាប់បានស្រោមជើងពណ៌ខៀវ២ ក្រហម១ បៃតង១ និង ខ្មៅ១។

វាចាប់យកថែមមួយទៀត។ ករណីអន់បំផុតគឺវាយកបានស្រោមជើងមួយទៀត ដែលមានពណ៌ខៀវ ព្រោះមិន អាចផ្សំបានស្រោមជើងមួយគូថែមទៀតទេ។ ដូច្នេះស្រោមជើងដែលយកចេញហើយមាន ខៀវ៣ ក្រហម១ បៃតង១ និងខ្មៅ១។

វាយកស្រោមជើងមួយបន្ថែមទៀត។ ពេលនេះទោះជាយកពណ៌អីក៏គង់ផ្សំបានស្រោមជើងមួយគូទៀតដែរ។ សន្មត ថាវាចាប់ចំពណ៌ខៀវដដែល។ ដូច្នេះវាទាញស្រោមជើងចេញមកក្រៅបាន ពណ៌ខៀវ៤ ក្រហម១ បៃតង១ និងខ្មៅ ១។

តាមរបៀបដូចគ្នា វាយកស្រោមជើងចេញបាន ពណ៌ខៀវចំនួន២០ ក្រហម១ បៃតង១ និងខ្មៅ១។ មានន័យថាវា ត្រូវយកស្រោមជើងចេញចំនួន២៣។

17. ▲ប្រភាគមួយដែលគេបង្រួមរួច មានភាគបែងនិងភាគយកបឋមនឹងគ្នា។ ដូច្នេះកត្តាបឋមមួយមិនអាច ស្ថិតនៅក្នុងភាគយកផងភាគបែងផងបានទេ។ កត្តាបឋមរបស់ $20!$ មានចំនួន៨ គឺ $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17$ និង 19 ។ កត្តាបឋមនិមួយៗក្នុងចំនោមនេះ ត្រូវស្ថិតនៅលើភាគយករឺនៅលើភាគបែងបានតែម្តង តែមិនអាចស្ថិត នៅលើភាគយកផង ភាគបែងផងបានទេ។ ដូច្នេះគេមាន$2^8=256$ របៀប។ តែចំនួនទាំង256 ដែលទទួលបាន

នោះត្រូវធ្វើអោយប្រភាគមានតំលៃតូចជាង១។ ក្នុងចំនោមប្រភាគទាំង២៥៦នោះ យើងអាចចែកជាប្រភាគចំនួន ១២៨គូ ដែលគូនិមួយៗគុណគ្នាស្មើ១ រឺក្នុងគូនិមួយៗមានប្រភាគមួយមានតំលៃតូចជាង១។ ដូច្នេះចំនួនសនិទាន ដែលមានលក្ខខណៈចង់បានមានចំនួន ១២៨។

18. ▲ចំនួនគត់សេស x_i និមួយៗអាចជំនួសដោយ $2y_i - 1$ ដែល y_i ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ដោយ

$$98 = \sum_{i=1}^{4}(2y_i - 1) = 2\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right) - 4$$

ដូច្នេះ $51 = \sum_{i=1}^{4} y_i$ ។ ចតុធាតុ $(y_1; y_2; y_3; y_4)$ មានដូចជា $(17; 5; 11; 18)$ ដូចគ្នានឹងលេខ១ចំនួន១៧ ខណ្ឌដោយលេខ០ បន្ទាប់មកលេខ១ចំនួន៥ ខណ្ឌដោយលេខ០ បន្ទាប់មកលេខ១ចំនួន១១ ខណ្ឌដោយលេខ០ បន្ទាប់មកលេខ១ចំនួន១៨

$$\underbrace{11111111111111111}_{17}0\underbrace{11111}_{5}0\underbrace{11111111111}_{11}0\underbrace{111111111111111111}_{18}$$

ដូច្នេះចតុធាតុនេះដូចគ្នានឹងលេខ១ចំនួន៥១ ត្រូវចែកជាបួនក្រុមខណ្ឌដោយលេខ០។ គេមាន $\binom{50}{3} = 19600$ របៀបក្នុងការសកលេខ០ចូលក្នុងចន្លោះទាំង៥០រវាងលេខ១ទាំងអស់៥១។

19. ▲សន្មតថា n មានទំរង់ទសភាគជា $1abc$ ។ បើមួយក្នុងចំនោម $a; b$ រឺ c ជាលេខ $5; 6; 7$ រឺ 8 នោះនឹងមានត្រាទុក ពេល n បូកនឹង $n+1$ ។ បើ $b = 9$ និង $c \neq 9$ រឺ បើ $a = 9$ និង b រឺ $c \neq 9$ នោះក៏នឹងមានត្រាទុកដែរ ពេល n បូកនឹង $n+1$ ។

បើ n ជាចំនួនគត់ដែលមានលក្ខណៈខាងលើ នោះវាត្រូវមានរាងមួយខាងក្រោម

$$1abc; \quad 1ab9; \quad 1a99; \quad 1999$$

ដែល $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ។ n ទាំងនេះមិនត្រូវការត្រាទុកទេ ពេលយើងបូក n នឹង $n+1$ ។ តំលៃ n បែបនេះ មានទាំងអស់ចំនួន $5^3 + 5^2 + 5 + 1 = 156$ ។ ដូច្នេះមានចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់156 គូ ដែលផលបូកគូនិមួយៗមិនត្រូវការត្រាទុក។

20. ▲កៅអីខាងចុងទាំងពីរត្រូវតែសំរាប់សិស្សអ្នកអង្គុយ ដូច្នេះសាស្ត្រាចារ្យមានកៅអីក្នុងចំនួន៧សំរាប់ជ្រើសរើស ដោយមិនអោយអង្គុយនៅជាប់គ្នា។ បើកៅអីទាំងនេះត្រូវតាងដោយលេខ១២ដល់លេខ១៨ នោះកៅអីទាំងបីសំរាប់សាស្ត្រាចារ្យមាន

$(2; 4; 6)$ $(2; 4; 7)$ $(2; 4; 8)$ $(2; 5; 7)$ $(2; 5; 8)$ $(2; 6; 8)$ $(3; 5; 7)$ $(3; 5; 8)$ $(3; 6; 8)$ $(4; 6; 8)$
ក្នុងត្រីធាតុនិមួយៗ សាស្ត្រាចារ្យអាចផ្លាស់ប្តូរកន្លែងគ្នា បាន$3! = 6$ របៀប។ ដូច្នេះជាសរុបមាន $10 \times 6 = 60$ ។

21. ▲តាង $a_1 < a_2 < \cdots < a_{16}$ ជាចំនួនគត់ទាំង១៦នោះ។ យើងពិនិត្យគូផ្សេងៗគ្នានៃចំនួនគត់ទាំងនេះ។ គេអាចផ្សំបានគូបែបនេះចំនួន $\binom{16}{2} = 120$ គូ។

តាង $(a_i;a_j)$ ជាគូមួយ ដែល $a_i > a_j$ ។ បើយើងមានគូពីរផ្សេងគ្នា $(a_{i_1};\ a_{i_2})$ និង $(a_{i_3};a_{i_4})$ ដែល $a_{i_1} - a_{i_2} = a_{i_3} - a_{i_4}$ នោះយើងទាញបានចតុធាតុដែលចង់បាន $(a;b;c;d) = (a_{i_1};a_{i_2};a_{i_3};a_{i_4})$ លើកលែងតែករណី $a_{i_2} = a_{i_3}$ ។

យើងថា a *មិនបានការ* ចំពោះគូពីរ គឺ $(a_{i_1};a)$ និង $(a;a_{i_2})$ បើ $a_{i_1} - a = a - a_{i_2}$ (រឺ $2a = a_{i_1} + a_{i_2}$) ។ យើងសំគាល់ឃើញថា សំនើពិត បើ a មិនបានការចំពោះគូពីរនៃគូចំនួនគត់ ព្រោះថា បើa មិនបានការចំពោះ $(a_{i_1};a),(a;a_{i_2})$ និង $(a_{i_3};a),(a;a_{i_4})$ នោះ $a_{i_1} + a_{i_2} = 2a = a_{i_3} + a_{i_4}$ ។

ជាចុងក្រោយយើងសន្មតថា a_i និមួយៗ មិនបានការ ច្រើនបំផុតនៅក្នុងគូមួយនៃគូចំនួនគត់។ ចំពោះគូនៃគូចំនួនគត់និមួយៗទាំងនេះ យើងដកគូនៃចំនួនគត់មួយចេញ។ ដូច្នេះគ្មានចំនួនមិនបានការទៀតទេ។ ដូច្នេះយើងនៅសល់យ៉ាងហោចណាស់$120 - 16 = 104$ គូនៃចំនួនគត់ដែលនៅសល់។ ផលសងនៃចំនួននៅក្នុងគូនៅសល់និមួយៗមានតំលៃពី១ដល់៩៩។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានផលសងខ្លះមានតំលៃដូចគ្នា។ សន្មតថា $a_{i_1} - a_{i_2} = a_{i_3} - a_{i_4}$ ដូច្នេះ $(a_{i_1};a_{i_2};a_{i_3};a_{i_4})$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌសំនួរ។

22. ▲ដើម្បីអោយអិដ្ឋមួយដុំមានលក្ខណៈខុសពីអិដ្ឋមួយដុំទៀត គេមានជំរើសមួយទៅលើសម្ភារ ជំរើសពីរទៅលើទំហំ ជំរើស៣ទៅលើពណ៌ និងជំរើស៣ទៅលើទ្រង់ទ្រាយ។ មាន $\binom{4}{2} = 6$ របៀបដែលអិដ្ឋមួយដុំខុសពីអិដ្ឋមួយដុំទៀត ត្រង់ពីរចំនុចគត់ គឺ

១) សម្ភារនិងទំហំ៖ មានអិដ្ឋ ចំនួន $1 \times 2 = 2$ ដុំផ្សេងគ្នា

២) សម្ភារនិងពណ៌៖ មានអិដ្ឋ ចំនួន $1 \times 3 = 3$ ដុំផ្សេងគ្នា

៣) សម្ភារនិងទ្រង់ទ្រាយ៖ មានអិដ្ឋ ចំនួន $1 \times 3 = 3$ ដុំផ្សេងគ្នា

៤) ទំហំនិងពណ៌៖ មានអិដ្ឋ ចំនួន $2 \times 3 = 6$ ដុំផ្សេងគ្នា

៥) ទំហំនិងទ្រង់ទ្រាយ៖ មានអិដ្ឋ ចំនួន $2 \times 3 = 6$ ដុំផ្សេងគ្នា

៦) ពណ៌និងទ្រង់ទ្រាយ៖ មានអិដ្ឋ ចំនួន $3 \times 3 = 9$ ដុំផ្សេងគ្នា

ដូច្នេះជាសរុបមាន អិដ្ឋចំនួន $2 + 3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 29$ ដុំ ដែលមានលក្ខណៈខុសពីដុំមួយដុំដែលអោយ ត្រង់ពីរចំនុចគត់។

23. ▲ចំនួនលេខដែល អាចបង្កើតបានដោយប្រើលេខ១០ដល់៩ ជារាង $\overline{d_1d_2d_3}$ មានចំនួន $10.10.10 = 1000$ ។ ដូច្នេះយើងមានករណី $\overline{d_1d_2d_3} = \overline{d_4d_5d_6}$ (សំនុំ A)ចំនួន$1000 \times 10 = 10\ 000$ ករណី និង ករណី $\overline{d_1d_2d_3} = \overline{d_5d_6d_7}$ (សំនុំ B)ចំនួន$1000 \times 10 = 10\ 000$ករណី។ ករណី $\overline{d_1d_2d_3} = \overline{d_4d_5d_6} = \overline{d_5d_6d_7}$ អាចតែពេល $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7$ តែប៉ុណ្ណោះ(សំនុំ $A \cap B$)។ ករណីបែបនេះ មាន10 ករណី។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\text{Card}(A\cup B) &= \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}(A\cap B)\\ &= 10\,000 + 10\,000 - 10\\ &= 19990\end{aligned}$$

24. ▲គេមាន $\binom{49}{2} = 1176$ របៀបក្នុងការជ្រើសរើសទីតាំងនៃក្រលាពណ៌លឿង។ ដោយសារគេអាចបង្វិលក្ដារអុក៩០ដឺក្រេ នោះក្ដារពណ៌មិនសមមូលគ្នាមានតិចជាងហ្នឹង។ ក្ដារពណ៌ដែលមានពណ៌លឿង**មិន**ស្ថិតនៅឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត មានទំរង់សមមូល៤បែប។ ក្ដារពណ៌ដែលក្រលាពណ៌លឿងពីរឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត មានទំរង់សមមូលពីរ ហើយយើងមានគូក្រលាពណ៌លឿងបែបនេះចំនួន $\frac{49-1}{2} = 24$ ។ ដូច្នេះចំនួនក្ដារអុកពណ៌មិនសមមូលគ្នាមានចំនួន

$$\frac{1176-24}{4} + \frac{24}{2} = 300$$

Y1						
		Y2				
			x			
				Y2		
						Y1

ក្រលាពណ៌លឿងY1 ឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត។ ក្រលាពណ៌លឿងY2 ឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត។

25. ▲ដោយយើងចង់សិក្សាសំនួរនេះ តាមរយៈសមមូលតាម៣ ដូច្នេះយើងសរសេរលេខ $21; 31; 41; 51; 61; 71$ និង 81 ជា $0; 1; 2; 0; 1; 2; 0$ ។ សន្មតថា $a_1; a_2; \dots; a_7$ ជាតំរៀបដែលយើងចង់បាន។ យើងឃើញថា $0 \equiv (a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_4+a_5+a_6+a_7) \equiv (a_1+a_2+\cdots a_7)+a_4 \equiv (0+1+2+0+1+2+0)+a_4 \equiv a_4 \pmod 3$ ។ ដូច្នេះ $a_1; a_2; a_3$ ត្រូវតែជាតំរៀបនៃ $0; 1; 2$ ព្រោះ $a_1+a_2+a_3 \equiv a_1+a_2+a_3+a_4 \equiv 0 \pmod 3$ ។ ដោយ $a_1+a_2+a_3+a_4 \equiv a_2+a_3+a_4+a_5 \equiv 0 \pmod 3$ នោះ $a_1 \equiv a_5 \pmod 3$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបានថា លំដាប់របស់ $a_5; a_6; a_7$ កំនត់ដោយ $a_1; a_2; a_3$ តែមួយគត់។ ដូច្នេះយើងមាន $3 \times 2^3 \times 3! = 144$ របៀប (ដើម្បីជ្រើសរើសa_4 យើងមាន 3របៀប។ សន្មតថាដំបូងជ្រើសរើសយក$a_1 \equiv 0 \pmod 3; a_2 \equiv 1 \pmod 3; a_3 \equiv 2 \pmod 3$ ដូច្នេះ ដើម្បីជ្រើសរើស a_1 យើងមាន2 របៀប ដើម្បីជ្រើសរើស a_2 យើងមាន

2 របៀប ដើម្បីជ្រើសរើស a_3 យើងមាន2 របៀប ដូច្នេះយើងមាន 2^3 របៀបក្នុងការជ្រើសរើស$a_1;a_2;a_3$។ បន្ទាប់មកចំលាស់របស់វាមាន 3!)។

26. ▲ដើម្បីអោយ $A\cup B=S$ នោះចំពោះធាតុនិមួយៗ s របស់ S គេមានសំនើមួយគត់ក្នុងចំនោមសំនើទាំងបីខាងក្រោមដែលពិត

$$(i)\ s\in A\ \wedge s\notin\ B;\quad (ii)\ s\notin A\wedge s\in B;\quad (iii) s\in A\wedge s\in B$$

ដូច្នេះបើ S មាន n ធាតុ នោះមាន 3^n ក្នុងការជ្រើសរើសសំនុំ A និង B ។ ក្រៅពីករណី $A=B$ យើងរាប់ជាប់គ្នាពីរដង ព្រោះឧទាហរណ៍ គូសំនុំរង $\{a;c\};\{b;c;d;e;f\}$ និងគូ $\{b;c;d;e;f\};\{a;c\}$ ត្រូវរាប់តែម្តង។ ដោយ $A\cup B=S$ នោះ $A=B$ ទាល់តែ $A=B=S$ ។ ដូច្នេះចំនួនគូនៃសំនុំរងដែលមានប្រជុំរបស់វាជា S ស្មើនឹង

$$\frac{3^n-1}{2}+1$$

ដែលស្មើ 365 ពេល $n=6$ ។

27. ▲សន្មតថា មានធាតុបួននៃ S ដែល $ab=cd$ ។ តាង $A=M^2+M$, $a=A+x, b=A+y$, $c=A+z$ និង $d=A+t$ ដែល x,y,z និង t មានតំលៃដាច់ខាតតូចជាង រឺស្មើ M ។ សមមភាពនេះ អាចសរសេរជា

$$(x+y)A+xy=(z+t)A+zt$$

បើ យើងមាន $x+y=z+t$ នោះ $xy=zt$ នោះ គូ $\{x,y\}$ និង $\{z,t\}$ ជាគូតែមួយ ដូច្នេះយើងមិនចាំបាច់បកស្រាយអ្វីបន្តទៀតទេ។ ក្រៅពីនេះ

$$2M^2\ge|xy-zt|=|(x+y)-(z+t)|.|A|>|(x+y)-(z+t)|.M^2$$

ដូច្នេះមានតែ $x+y$ និង $z+t$ ខុសគ្នាមួយឯកតាគត់ ឧទាហរណ៍ បើ $x+y=z+t+1$ នោះ $xy=zt-A$ រួចហើយ x និង y ជារឺសរបស់ពហុធា

$$X^2-(z+t+1)X+(zt-A)$$

ពហុធានេះមានរឹស $\dfrac{z+t+1\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

ដែល $\Delta=(z+t+1)^2-4zt+4A\ge 4A=(z-t+1)^2+4d\ge 4M^2$

$\Delta=4M^2$ កើតមានលុះត្រាតែ $d=M$ និង $z-t+1=0$ ព្រោះ $d\ge M^2$។ ដូច្នេះទាល់តែ $t=-M$ និង $z=-M-1$ មិនអាចព្រោះ $|z|\le M$ ។ ដូច្នេះ $\Delta>4M^2$ ។

បើ $z+t+1\ge 0$ នោះ $\dfrac{z+t+1+\sqrt{\Delta}}{2}>M$

បើ $z+t+1\le 0$ នោះ $\frac{z+t+1-\sqrt{\Delta}}{2}<-M$

ក្នុងករណីទាំងពីរ យើងមាន x និង y មានតំលៃដាច់ខាតធំជាង M ដែលករណីនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។

28. ▲ពិន្ទុដែលគេអាចធ្វើបាន ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានដែលមានរាង $ax+by$ ។ បើ $(a,b)>1$ នោះមានចំនួនគត់ទាំងនេះច្រើនរាប់មិនអស់។ ដូច្នេះ $(a,b)=1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទប្រូបិន ចំនួនពិន្ទុដែលមិនអាចទទួលបានមាន ចំនួន$(a-1)(b-1)/2$ ។ ដូច្នេះ $(a-1)(b-1)=2(35)=70=5(14)=7(10)$ ។ លក្ខខណ្ឌ $a>b$ និង $(a,b)=1$ នាំអោយយើងទាញបាន២ករណី $a=71,b=2$ និង$a=11,b=8$ ។ ដោយ $58=0.71+2.29$ ដូច្នេះករណីទី១មិនត្រឹមត្រូវ។ បន្ទាត់$11x+8y=58$ កាត់តាមចំនុច$(6,-1)$និង$(-2,10)$ ។ បន្ទាត់នេះមិនកាត់តាមចំនុចគត់(x,y)ណាមួយនៅក្នុងកាដ្រង់ទី១ទេ។ ដូច្នេះមិនមានចំនួនគត់វិជ្ជមានx,y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនេះទេ។ ដូច្នេះចំលើយមានតែមួយគត់គឺ $a=11,b=8$ ។

29. ▲តាងx,y,z ជាចំនួនដុំអិដ្ឋដែលតំរៀបជាកំពស់៤,១០ និង១៩រៀងគ្នា។ យើងចង់ដឹងថាតើផលបូក $4x+10y+19z$ មានប៉ុន្មានប្រភេទខុសគ្នា ដោយអោយលក្ខខណ្ឌ $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0,x+y+z=94$ ។ យើងមាន $4x+10y+19z\le 19.94=1786$ ។ ដោយយក $x=94-y-z$ យើងរាប់ចំនួនចំលើយមិនអវិជ្ជមានរបស់វិសមភាព $376+3(2y+5z)\le 1786, y+z\le 94$

$\Rightarrow \quad 2y+5z\le 470, y+z\le 94$

តាមទ្រឹស្តីបទ ៣៤ គ្រប់ចំនួនគត់$n\ge(2-1)(5-1)=4$ អាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទប្រូបិន ចំនួននៃ n ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ បាន មានចំនួន $(2-1)(5-1)/2=2$ ។ យើងមានករណី $n=1$ និង $n=3$ ដែលមិនអាចសរសេរជារាង$n=2y+5z$ ។ ដូច្នេះ ក្នុងចំណោម៤៧១ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ដែល $n\le 470$ យើងឃើញថា មាន៤៦៩ចំនួនគត់ដែលអាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ បាន។

យក $z=94-x-y$ យើងទាញបាន $\quad 470-n=470-2y-5z=470-2y-5(94-x-y)$ $=5x+3y$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ ប្រូបិន បណ្តា $m=470-n$ ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $m=3x+5z$ បានមានចំនួន $(3-1)(5-1)/2=4$ករណី ។ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទ ៣៤ បណ្តា m ទាំងនោះត្រូវតែ $\le 3.5-3-5=7$ ដែលក្នុងនោះមាន $m=1,2,4,7$ ដូច្នេះត្រូវនឹង $n=463,466,468,469$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនគត់n , $0\le n\le 470$ លើកលែងតែករណី $n=1,3,463,466,468$ និង469 ចេញ អាចសរសេរជារាងខាងលើបាន ដូច្នេះចំនួនផលបូកខុសៗគ្នាមានចំនួន $471-6=465$ ។

30. ▲យើងនឹងបង្ហាញថា គេមិនអាចបំបែកសំនុំខាងលើជា២ដូចរៀបរាប់ទេ។ សន្មតថាគេអាចបំបែកវាជា២បាន ដោយសន្មតថា ផលគុណនៃបណ្តាចំនួននៅក្នុងសំនុំមួយ ស្មើនឹង A ហើយនិងផលគុណនៃបណ្តាចំនួននៅក្នុងសំនុំមួយ ទៀតស្មើនឹង B ។ យើងអាចមាន២ករណី។

ករណីទី១គឺថា មានតែមួយគត់ក្នុងចំនោម

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

ដែលចែកដាច់នឹង៧ ដែលនៅក្នុងករណីនេះមានតែ A រឺ B មួយប៉ុណ្ណោះដែលចែកដាច់នឹង៧។ ដូច្នេះ A មិនអាចស្មើ B ទេ។

ករណីទី២គឺ គ្រប់តួទាំងអស់សុទ្ធតែបឋមនឹង៧។ ក្នុងករណីនេះ យើងមាន

$$n(n+1)\dots(n+6) \equiv 1.2\dots6 \equiv A.B \equiv -1 \pmod 7$$

តែបើ $A = B$ នោះ សមមូលខាងលើទៅជា $A^2 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$ ។ ចំនួនការេសមមូលនឹង $1, 2, 4$ $\bmod 7$ ដូច្នេះ $A^2 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$ មិនអាច។

ប្រព័ន្ធរបាប់.ចំនួនគត់.ភាពចែកដាច់

ប្រព័ន្ធរបាប់

31.▲ យើងមាន $4444 \equiv 7 \bmod 9$

$$\Rightarrow \quad 4444^3 \equiv 7^3 \equiv 1 \bmod 9$$

$$\Rightarrow \quad 4444^{4444} = 4444^{3.1481}.4444$$

$$\equiv 1.7 \equiv 7 \bmod 9$$

តាង C ជាផលបូកលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់ B ។

តាមទ្រឹស្តីបទនៃភាពចែកដាច់នឹង៩ យើងទាញបាន

$$7 \equiv 4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \bmod 9$$

យើងមាន

$$4444 \log_{10} 4444 < 4444 \log_{10} 10^4 = 17776$$

មានន័យថា 4444^{4444} មានយ៉ាងច្រើន 17776 ខ្ទង់។ ដូច្នេះ ផលបូក តួលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់ 4444^{4444} យ៉ាងច្រើនស្មើ $9.17776 = 159984$

ដូច្នេះ $A \le 159984$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់ ដែល ≤ 159984 ចំនួនដែលមានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់វាធំបំផុត គឺ99999 ដូច្នេះ $B \le 45$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់ ដែល ≤ 45 ចំនួនដែលមានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់វាធំបំផុត គឺ 39 ដែលផលបូកតួលេខស្មើ ១២។ ដូច្នេះ ផលបូកតួលេខរបស់ B យ៉ាងច្រើនស្មើ ១២។

តែដោយ $C \equiv 7 \bmod 9$ នោះមានន័យថា $C = 7$ ។

32.▲ ដោយ $\phi(100) = 40,$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទ**អឺលែរ** យើងទាញបាន $3^{40} \equiv 1(\bmod 100)$ ។ ដូច្នេះ $3^{1000} = \left(3^{40}\right)^{25} \equiv 1^{25} = 1(\bmod 100)$ ។ ដូច្នេះលេខ២ខ្ទង់ចុងគេគឺ ០១។

33.▲ យើងមាន $\phi(100) = \phi\left(2^2\right)\phi\left(5^2\right) = \left(2^2 - 2\right)\left(5^2 - 5\right) = 40$ ។ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទ**អឺលែរ** $7^{40} \equiv 1(\bmod 100)$ ។ យើងមាន $\phi(40) = \phi\left(2^3\right)\phi(5) = 4.4 = 16$ ដូច្នេះ $7^{16} \equiv 1(\bmod 40)$ ។ យើងមាន $1000 = 16.62 + 8$ ។ ដូច្នេះ $7^{1000} \equiv \left(7^{16}\right)^{62} 7^8 \equiv 1^{62} 7^8 \equiv \left(7^4\right)^2 \equiv 1^2 \equiv 1(\bmod 40)$ ។ មានន័យថា $7^{1000} = 1 + 40t$ ចំពោះចំនួនគត់ t មួយ។ យើងទាញបាន

$$7^{7^{1000}} = 7^{1+40t} \equiv 7.\left(7^{40}\right)^t \equiv 7\left(\mathrm{mod}100\right)$$

មានន័យថា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេគឺ ០៧។

34.▲ តាង $0 \le y \le 9$ និង $10x + y = mx$ ដែល m និង x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ ដូច្នេះ $10 + y / x = m$ ជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ $x \mid y$ ។ បើ $y = 0$ នោះ គ្រប់ចំនួនគត់ x ចែកដាច់ y ។ បើ $y = 1$ នោះ $x = 1$ យើងទាញបាន 11។ បើ $y = 2$ នោះ $x = 1$ រឺ $x = 2$ យើងទាញបាន 12 និង 22 ។ តាមរបៀបដូចនេះ យើងទាញបាន ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ ជាពហុគុណនៃ $10,11,12,13,14,15,$

$16,17,18,19,22,24,26,28,33,36,39,44,48,55,66,77,88,99$ ។

35.▲ សន្មតថា ចំនួនទាំងនោះមាន $n+1$ ខ្ទង់។ ដូច្នេះចំនួននេះអាចសរសេរជា $6.10^n + y$ ដែល y ជាលេខមាន n ខ្ទង់(វាអាចផ្តើមដោយលេខសូន្យមួយរឺច្រើនជាងនេះ)។ តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$6.10^n + y = 25.y$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{6.10^n}{24}$$

$\Rightarrow \qquad n \ge 2$ (បើមិនអញ្ចឹង 6.10^n ចែកមិនដាច់នឹង 24)។ ចំពោះ $n \ge 2$ យើងមាន $y = 25.10^{n-2}$ មានន័យថា y មានរាង $250...0$ (មានលេខសូន្យចំនួន $n-2$)។ យើងទាញបាន ចំនួនដែលត្រូវរកមានរាង

$625\underbrace{0...0}_{n-2}$ ។

36.▲ សន្មតថា x មានរាង

$$x = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + ... + a_{n-1}10^{n-1}, a_k \le 9, a_{n-1} \ne 0$$

តាង $P(x)$ ជាផលគុណតួលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់ x ដូច្នេះ

$$P(x) = x^2 - 10x - 22$$

យើងមាន

$$P(x) = a_0 a_1 ....a_{n-1} \le 9^{n-1}a_{n-1} \le 10^{n-1}a_{n-1} \le x$$

(វិសមភាពដាច់ខាតកើតមានពេលដែល x មានច្រើនជាងមួយខ្ទង់)។ ដូច្នេះ $x^2 - 10x - 22 < x$ យើងទាញបាន $x < 13$ ។ បើ x មានលេខ១ខ្ទង់ នោះ $x = x^2 - 10x - 22$ សមីការគ្មានរឺសជាចំនួនគត់។

បើ $x = 10$ នោះ $10^2 - 10^2 - 22 = -22 \ne 1.0 = 0$

បើ $x = 11$ នោះ $11^2 - 10.11 - 22 = -11 \ne 1.1 = 1$

បើ $x = 12$ នោះ $12^2 - 10.12 - 22 = 2 = 1.2$ ។ ដូច្នេះ $x = 12$ ។

37.▲យើងឃើញថា $0.\overline{abc}=\frac{abc}{999}$ និង $999=3^3.37$ ។ បើ abc ចែកមិនដាច់នឹង៣ហើយនិងនឹង៣៧ នោះប្រភាគត្រូវបានសំរួលរួចហើយ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 មានចំនួន 333 ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 37 មានចំនួន ២៧។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 ផងនិង 7 មានចំនួន $\frac{999}{3(37)}=9$ ។ ដូច្នេះ ចំនួនដែលមិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 និង 7 មានចំនួន $999-(333+27)+9=648$ ។

ប្រភាគមានរាង $\frac{s}{37}$ ដែល $3|s$ និង $37\nmid s$ ស្ថិតនៅក្នុងសំនុំ S ។គេមានប្រភាគបែបនេះចំនួន១២បែប។(គួរសំគាល់ថា យើងមិនយកប្រភាគមានរាង $\frac{l}{3^3}$ ដែល $37|l$ និង$3\nmid l$ ទេ ព្រោះប្រភាគអស់នេះ ធំជាង១ ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់S)។ ដូច្នេះចំនួនភាគយកខុសៗសរុប នៅក្នុងសំនុំនេះក្រោយសំរួលរួច មានចំនួន $640+12=660$ ។

38.▲តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលមានk ខ្ទង់។ តាង $m=123456789.10^{k+1}$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ n ចំនួនគត់តគ្នា $m+1,m+2,...,m+n$ ដែលចាប់ផ្តើមដោយលេខ១១២៣៤៥៦៧៨៩0 និងមានមួយក្នុងចំនោមនោះចែកដាច់នឹងn ។ ដូច្នេះ ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ n ហើយមានគ្រប់តួលេខពី0ដល់ ៩។

39.▲គេមាន ចំនួនគត់វិជ្ជមាន មាន j ខ្ទង់ចំនួន 9.10^{j-1} នៅលេខនេះ។ ចំនួនខ្ទង់សរុបរបស់លេខនេះពេលគេយកត្រឹមលេខមាន r ខ្ទង់យ៉ាងច្រើនមករៀប កំនត់ដោយ $g(r)=\sum_{j=1}^{r} j.9.10^{r-1}=r.10^r-\frac{10^r-1}{9}$ ។ ដោយ

$0<\frac{10^r-1}{9}<10^r$ យើងទាញបាន $(r-1)10^r<g(r)<r.10^r$ ។ ដូច្នេះ $g(1983)<1983.10^{1983}<10^4.10^{1983}=10^{1987}$ និង $g(1984)>1983.10^{1984}>10^3.10^{1984}$ ។ ដូច្នេះ $g(1983)<10^{1987}<g(1984)$ មានន័យថា ចំនួនខ្ទង់របស់លេខនេះបង្កើតដោយប្រើត្រឹមលេខមាន 1983 ខ្ទង់ តូចជាង 10^{1987} ហើយ ដោយប្រើត្រឹមលេខមាន 1984 ខ្ទង់ ធំជាង 10^{1987} ។ ដូច្នេះ ទីតាំងខ្ទង់ទី 10^{1987} ស្ថិតនៅត្រឹមយកលេខមាន1984 ខ្ទង់មកប្រើ ដូច្នេះ $f(1987)=1984$ ។

40.▲យើងឃើញថា $5213<7^5$ ។ ដូច្នេះ យើងគណនា $0\le a_0,...,a_4\le 6, a_4\ne 0$ ដែល $5213=a_4 7^4+a_3 7^3+a_2 7^2+a_1 7+a_0$ ។ យើងមាន $5213=2.7^4+411;\ 411=1.7^3+68;$ $68=1.7^2+19;\ 19=2.7^1+5.7^0$ ។ ដូច្នេះ $5213=2.7^4+1.7^3+1.7^2+2.7^1+5.7^0$ ។ ដូច្នេះ $5213=21125_7$ ។

41.▲សរសេរ

$$\frac{13}{16}=\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6^2}+\frac{a_3}{6^3}+...$$

គុណ $13/16$ នឹង៦ យើងទាញបាន $\frac{13}{16}6=4+\frac{14}{16}$ ។ ដូច្នេះ $\frac{13}{16}=\frac{4}{6}+\frac{14}{96}$ ដូច្នេះ $a_1=4$ ។គុណ $\frac{14}{96}$ នឹង 6^2 យើងទាញបាន $\frac{14}{96}6^2=5+\frac{1}{4}$; ដូច្នេះ $\frac{14}{96}=\frac{5}{6^2}+\frac{1}{144}$; ដូច្នេះ $a_2=5$ ។ តាមរបៀបដដែល យើងទាញបាន $13/16=0.4513_6$ ។

42.▲ យើងដឹងថា $p\left(\overline{a_1a_2...a_n}\right)=p\left(\overline{a_1}\right)p\left(\overline{a_2}\right)...p\left(\overline{a_n}\right)$ ដែល $p(0)=1$

យើងមាន

$$p(1)+p(2)+.....+p(9)=1+2+...+9=45=A$$

$$\left[p(10)+..+p(19)\right]+\left[p(20)+...+p(29)\right]+...+\left[p(90)+...+p(99)\right]=$$

$$=\left[p(1)+p(2)+...+p(9)\right](A+1)=A(A+1)$$

$$\Rightarrow \quad p(1)+...+p(99)=A^2+2A$$

$$\left[p(100)+...+p(199)\right]+\left[p(200)+...+p(299)\right]+...+\left[p(900)+...+p(999)\right]$$

$$=\left[p(1)+p(2)+...+p(9)\right]\left[p(00)+p(01)+...+p(99)\right]$$

$$=A\left(A^2+2A+1\right)=A(A+1)^2$$

$$\Rightarrow \ p(1)+p(2)+...+p(999)=A^2+2A+A(A+1)^2$$

$$=A\left((A+1)^2+(A+1)+1\right)=45(2163)=\left(3^3\right)(5)(7)(103)$$

ដូច្នេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ១០៣។

43.▲ យើងមាន $m+n=n-m+2m$ ។ ដូច្នេះ $m+n$ តូចបំផុត ពេល $n-m$ និង $2m$ តូចបំផុត។ យើងមាន $1978^n-1978^m=1978^m\left(1978^{n-m}-1\right)$ ចែកដាច់នឹង $1000=2^35^3$ ។ ដោយកត្តាទី២ជាចំនួនសេស នោះ 2^3 ត្រូវតែចែកដាច់ 1978^m ដូច្នេះ $m\geq 3$ ។ ដូចគ្នា 5^3 ត្រូវតែចែកដាច់ $1978^{n-m}-1$ ។ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត s មួយ ដែល

$$1978^s\equiv 1(\mathrm{mod}\,125)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ ***អឺលែរ*** $1978^{100}\equiv 1(\mathrm{mod}\,125)$ ។ ដូច្នេះ $s\,|\,100$ ។ ដោយ $125\,|\left(1978^s-1\right)$ នោះ យើងមាន $5\,|\left(1978^s-1\right)$ មានន័យថា $1978^s\equiv 3^s\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ ។ ដោយ $s\,|\,100$ នោះសមមូលក្រោយនេះ នាំអោយ $s=4,20,100$ ។ យើងពិនិត្យករណីនិមួយៗ។

ករណី $s=4$, យើងមាន

$$1978^4\equiv(-22)^4\equiv 2^4.11^4\equiv(4.121)^2\equiv(-16)^2\equiv 6(\mathrm{mod}\,125)$$

មានន័យថា $s\neq 4$ ។ ដូចគ្នាដែរ

$$1978^{20}\equiv 1978^{4}.\left(1978^{4}\right)^{4}\equiv 6.6^{4}\equiv 6.46\equiv 26\pmod{125}$$

មានន័យថា $s\neq 20$ ។ ដូច្នេះមានតែ $s=100$ ។ ដោយ s ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $1978^{s}\equiv 1\pmod{125}$ នោះ យើងយក $n-m=s=100$ និង $m=3$ មានន័យថា $n=103, m=3$ ។ យើងទាញបាន $m+n=106$ ។

44.▲ យើងដឹងថា $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1980}+\left(6-\sqrt{35}\right)^{1980}=2k$ ជាចំនួនគត់គូ។

យើងមាន $0<6-\sqrt{35}<\frac{1}{10}$ (ព្រោះបើ $6-\sqrt{35}>\frac{1}{10}$ នោះ $3500<3481$)

$$\Rightarrow \quad \left(6-\sqrt{35}\right)^{1980}<10^{-1980}$$

$$\Rightarrow \quad 2k-1+0.\underbrace{99....9}_{1979\text{ខ្ទង់}}=2k-\frac{1}{10^{1980}}<\left(6+\sqrt{35}\right)^{1980}<2k$$

$\Rightarrow$ ១៩៧៩ខ្ទង់ដំបូងក្រោយក្បៀសសុទ្ធតែជាលេខ៩

ចំនួនគត់

45.▲ តាមសមភាពទ្វេធា

$$\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n+1}{n+1}$$

ដោយ $2n+1$ និង $n+1$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ហើយដោយផ្នែកខាងស្តាំរបស់សមភាពខាងលើជាចំនួនគត់ នោះ វាត្រូវតែ $(n+1)$ ចែកដាច់ $\binom{2n}{n}$ ។

46.▲ យើងដឹងថា បើ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ នោះ $[\alpha]+[\beta]\leq[\alpha+\beta]\leq[\alpha]+[\beta]+1$

ដូច្នេះតាមកំណើនយើងទាញបាន

$$[a_1]+[a_2]+...+[a_l]\leq[a_1+a_2+...+a_l]$$

ចំពោះចំនួនបឋម p ណាមួយ ស្វ័យគុណ m ធំបំផុតនៃ p ដែល p^m ចែកដាច់ $n!$ កំនត់ដោយ

$$\sum_{j\geq 1}\left[\frac{n}{p^j}\right]=\sum_{j\geq 1}\left[\frac{n_1+n_2+...+n_k}{p^j}\right]$$

ស្វ័យគុណ m ធំបំផុតនៃ p ដែល p^m ចែកដាច់ $n_1!...n_k!$ កំនត់ដោយ

$$\sum_{j\ge 1}\left[\frac{n_1}{p^j}\right]+\left[\frac{n_2}{p^j}\right]+...+\left[\frac{n_k}{p^j}\right]$$

ដោយ $\left[\frac{n_1}{p^j}\right]+\left[\frac{n_2}{p^j}\right]+...+\left[\frac{n_k}{p^j}\right]\le\left[\frac{n_1+n_2+...+n_k}{p^j}\right]$

នោះ ស្វ័យគុណធំបំផុតm នៃចំនួនបឋម p ណាមួយ ដែល p^m ចែកដាច់ភាគបែងរបស់ប្រភាគ

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$$

មានតំលៃតូចជាងរឺស្មើ ស្វ័យគុណធំបំផុតm នៃចំនួនបឋម p នោះ ដែល p^m ចែកដាច់ភាគយករបស់ប្រភាគ។ មានន័យថាប្រភាគនេះជាចំនួនគត់។

47.▲គេអោយ n ។ តាង k ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែល $2^k\le n$ និង តាង P ជាផលគុណនៃគ្រប់ចំនួនគត់សេសធំមិនលើសពី n។ យើងមាន $2^{k-1}P.S$ ជាផលបូក ដែលតួនិមួយៗជាចំនួនគត់ទាំងអស់ លើកលែងតែ $2^{k-1}P\frac{1}{2^k}$ ។ ដូច្នេះ $2^{k-1}P.S$ មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ។ មានន័យថា S មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ។

48.▲រង្វាស់មុំក្នុងរបស់ពហុកោណនិយ័តមួយដែលមាន n ជ្រុង ស្មើនឹង $\frac{(n-2)180}{n}$ ។ ដូច្នេះមានន័យថា n ត្រូវតែចែកដាច់១៨០។ ដោយ$180=2^2.3^2.5$ មានតួចែកចំនួន $(1+2)(1+2)(1+1)=18$ នោះ ចំលើយគឺ ១៦ ព្រោះ$n\ge 3$ ដូច្នេះយើងមិនគិតតួចែកលេខ១និងលេខ២។

ភាពចែកដាច់

49.▲យើងឃើញថា ផលធៀប $\frac{5n+13}{3n+7}$ ស្ថិតនៅចន្លោះ 0 និង២ដាច់ខាត ដោយវាជាចំនួនគត់ នោះវាត្រូវតែស្មើ១។ ដូច្នេះ យើងត្រូវតែដោះស្រាយសមីការ $5n+13=3n+7$ យើងទាញបាន $n=-3$ ។ ចំនួននេះមិនមែនជាចំនួនវិជ្ជមានទេ ដូច្នេះ គ្មានចំនួនគត់ n ទេ។

50.▲យើងឃើញថា A និង A' ត្រូវតែមានលេខ១១០ខ្ទង់។ តាង $A=a_{10}a_9...a_1$ ជាតួលេខរបស់A និង $A'=a'_{10}a'_9...a'_1$ ។ ដូច្នេះ $A+A'=10^{10}$ លុះត្រាតែ មាន j មួយ ដែល $0\le j\le 9$ ហើយដែល $a_1+a'_1=a_2+a'_2=...=a_j+a'_j=0,\ \ a_{j+1}+a'_{j+1}=10, a_{j+2}+a'_{j+2}=a_{j+3}+a'_{j+3}=...$ $=a_{10}+a'_{10}=9$ ។ ក្នុងផលបូកលើ បើ $j=0$ មានន័យថា គ្មានផលបូកដែលមានរាង $a_k+a_k{}'=0,$ $1\le k\le j$ ទេ។ បើ $j=9$ នោះ មានតែ $a_{10}+a_{10}{}'=10$ ។ ដោយបូក ផលបូកទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$a_1+a_1'+a_2+a_2'+...+a_{10}+a_{10}'=10+9(9-j)$$

ដោយ a_s' ជាចំលាស់របស់a_s នោះ យើងទាញបានថា អង្គខាងឆ្វេងរបស់សមភាពខាងលើ ជាចំនួនគូ គឺ $2(a_1+a_2+...+a_{10})$ ។ ដូច្នេះ j ត្រូវតែជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ $a_1+a_1'=0$ ។ ដូច្នេះសំនើពិត។

51.▲តាង $m=n+1$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $m(m-2)$ ចែកដាច់ $2^{(m-1)!}-1$ ។ យើងមាន $\phi(m)$ ចែកដាច់ $(m-1)!$ ដូច្នេះ $\left(2^{\phi(m)}-1\right)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ហើយ តាមទ្រឹស្តីបទ**អឺលែ** យើងទាញបាន $m|\left(2^{\phi(m)}-1\right)$ ។ ដូច្នេះ $m|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $(m-2)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។ ដោយ m ជាចំនួនសេស នោះ $(m,m-2)=1$ ដូច្នេះ $m(m-2)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។

52.▲យើងមាន

$$\begin{aligned}(a+b)^7-a^7-b^7 &= 7\left(a^6b+ab^6+3\left(a^5b^2+a^2b^5\right)+5\left(a^4b^3+a^3b^4\right)\right)\\ &= 7ab\left(a^5+b^5+3ab\left(a^3+b^3\right)+5a^2b^2(a+b)\right)\\ &= 7ab(a+b)\left(a^4+b^4-a^3b-ab^3+a^2b^2\right.\\ &\qquad \left.+3ab\left(a^2-ab+b^2\right)+5ab\right.\\ &= 7ab(a+b)\left(a^4+b^4+2\left(a^3b+ab^3\right)+3a^2b^2\right)\\ &= 7ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)^2\end{aligned}$$

តាមសម្មតិកម្ម(i) និង (ii) យើងទាញបានសម្មតិកម្មថ្មី

(i) $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង៧

(ii') a^2+ab+b^2 ចែកដាច់នឹង7^3

ដោយ $(a+b)^2>a^2+ab+b^2\geq 7^3$ នោះយើងទាញបាន $a+b\geq 19$ ។ ដោយសាកលេខម្តងមួយៗ យើងទាញបាន $a=1,b=18$ ជាចំលើយមួយ ព្រោះ $1^2+1.18+18^2=343=7^3$ ។

ឥលូវយើងកំនត់រកចំលើយផ្សេងខ្លះទៀតតាម ទ្រឹស្តីបទ**អឺលែ**។ ដោយ $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ នោះ លក្ខខណ្ឌ(ii') ទៅជា

$$(ii'')\quad \begin{cases}a^3\equiv b^3\left(\mod 7^3\right)\\ a\not\equiv b(\mod 7)\end{cases}$$

យើងមាន $x^{\phi(m)} \equiv 1(\bmod m)$ ។ ដោយ $\phi\left(7^3\right)=(7-1)7^2=3\times 98$ ។ ដូច្នេះ បើ x បឋមនឹង 7^3 នោះ យើងមាន $\left(x^{98}\right)^3 \equiv 1\left(\bmod 7^3\right)$ ដែលលក្ខណៈនេះផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទី១នៃ $(ii")$ ។ ដូច្នេះយើងត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទី២ទៀត។ ឧទាហរណ៍ យក $x=2$ យើងឃើញថា $2^{98} \equiv 4(\bmod 7)$ ។ ដូច្នេះយក $a=2^{98}, b=1$ ។ យក $x=3$ យើងឃើញថា $3^{98} \equiv 324\left(\bmod 7^3\right)$ ។ យើងឃើញថា $a=324, b=1$ ជាចំលើយមួយទៀត។

53.▲ យើងមាន

$$ab^p - ba^p = ab\left(b^{p-1}-a^{p-1}\right)$$

បើ $p \mid ab$ នោះ $p \mid ab^p - ba^p$ ។ បើ p ចែកមិនដាច់ ab ហើយដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះ $(p,a)=(p,b)=1$ ហើយនាំអោយ តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងទាញបាន $b^{p-1} \equiv a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$ ។ ដូច្នេះ $p \mid b^{p-1}-a^{p-1}$ នាំអោយ $p \mid ab^p - ba^p$ ។ ដូច្នេះ $p \mid ab^p - ba^p$ ចំពោះគ្រប់ p ។

54.▲ យើងមាន $\underbrace{11...1}_{(p-1)x1} = \dfrac{10^{p-1}-1}{9}$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម ហើយ $(p,10)=1$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** p ចែកដាច់ $10^{p-1}-1$ ។ ដោយ $(p,9)=1$ ហើយ $\dfrac{10^{p-1}-1}{9}$ ជាចំនួនគត់ នោះ p ចែកដាច់ $\dfrac{10^{p-1}-1}{9}$ ។

55.▲ តាង $a=56786730=2.3.5.7.11.13.31.61$ ។ តាង

$$Q(x,y)=xy\left(x^{60}-y^{60}\right)$$

យើងសង្កេតឃើញថា

$$(x-y) \mid Q(x,y); \qquad \left(x^2-y^2\right) \mid Q(x,y);$$
$$\left(x^3-y^3\right) \mid Q(x,y); \qquad \left(x^4-y^4\right) \mid Q(x,y);$$
$$\left(x^6-y^6\right) \mid Q(x,y); \qquad \left(x^{10}-y^{10}\right) \mid Q(x,y);$$
$$\left(x^{12}-y^{12}\right) \mid Q(x,y); \qquad \left(x^{30}-y^{30}\right) \mid Q(x,y);$$

តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** ចំពោះចំនួនបឋម p មួយ យើងទាញបាន

$$m^p - m \equiv 0(\bmod p) \text{ និង } n^p - n \equiv 0(\bmod p)$$

ដូច្នេះ $n\left(m^p-m\right)-m\left(n^p-n\right) \equiv 0(\bmod p)$ មានន័យថា $mn\left(m^{p-1}-n^{p-1}\right) \equiv 0(\bmod p)$ ។

ដូច្នេះ យើងមាន

$2 \mid mn(m-n) \mid Q(m,n);$

$3 \mid mn\left(m^2-n^2\right) \mid Q(m,n);$

$5 \mid mn\left(m^4-n^4\right) \mid Q(m,n);$

$7 \mid mn\left(m^6-n^6\right) \mid Q(m,n);$

$11 \mid mn\left(m^{10}-n^{10}\right) \mid Q(m,n);$

$13 \mid mn\left(m^{12}-n^{12}\right) \mid Q(m,n);$

$31 \mid mn\left(m^{30}-n^{30}\right) \mid Q(m,n);$

$61 \mid mn\left(m^{60}-n^{60}\right) \mid Q(m,n);$

ដោយ $2,3,5,7,\ldots,61$ ទាំងអស់នេះជាចំនួនបឋម នោះយើងទាញបាន $a \mid mnQ(m,n)$ ។

56.▲ ចំពោះចំនួនបឋមសេស p ណាមួយ យើងយក $n=(p-1)^{2k+1}, k=0,1,2,\ldots$ នោះ

$$n2^n+1=(p-1)^{2k+1}\left(2^{p-1}\right)^{(p-1)^{2k}}+1 \equiv (-1)^{2k+1}1^{(-1)^{2k}}+1 \equiv 0 \pmod p$$

57.▲ បើ $n \mid 2^n-1$ ចំពោះចំនួនគត់ $n>1$ ណាមួយ នោះ n ត្រូវតែជាចំនួនសេស និង មានតួចែកបឋមសេស p តូចបំផុត។ យើងមាន p ចែកដាច់ n ហើយ n ចែកដាច់ 2^n-1 និង ដូច្នេះ $2^n \equiv 1 \pmod p$ ។ តាង m ជាចំនួនគត់តូចបំផុត ដែល $2^m \equiv 1 \pmod p$ ។ តាង $n=xm+y, 0 \le y < m$ ។ ដូច្នេះ

$$2^y=2^{n-xm}=2^n.\left(2^m\right)^{-x} \equiv 1.1^{-x}=1 \pmod p$$

បើ $y>0$ នោះ $2^y \equiv 1 \pmod p$ ដូច្នេះយើងមាន $y<m$ ដែល $2^y \equiv 1 \pmod p$ ផ្ទុយពីសន្មតិដែល ថា m តូចជាងគេ។ ដូច្នេះ $y=0$ មានន័យថា m ចែកដាច់ n ។ ដោយ n ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ m ក៏សេសដែរ។

តាមទ្រឹស្តីបទ**ភែម៉ា** យើងមាន $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ។ ដោយ m ជាចំនួនតូចជាងគេដែល $2^m \equiv 1 \pmod p$ នោះ $m<p-1$ ។ ដូច្នេះ $m \le p-2 < p$ ។ ផ្ទុយពីសន្មតិដែល p តូចជាងគេ។

58.▲ តាង $2n=m\left(1+\left[\sqrt{2n}\right]\right)$ ។

បើ $m \le \left[\sqrt{2n}\right]-1$ នោះ $2n \le \left(\left[\sqrt{2n}\right]-1\right)\left(\left[\sqrt{2n}\right]+1\right)=\left[\sqrt{2n}\right]^2-1 \le 2n-1 < 2n$ មិនពិត។

បើ $m \ge \left[\sqrt{2n}\right]+1$ នោះ $2n \ge \left(\left[\sqrt{2n}\right]+1\right)^2 \ge 2n+1$ មិនពិត។

ដូច្នេះ មានតែ $m=\left[\sqrt{2n}\right]$ ។ ដូច្នេះ $n=m(1+m)/2$ ដែល $m=\left[\sqrt{2n}\right]$

ច្រាសមកវិញ បើ $n=m(1+m)/2$ នោះ

$\Rightarrow \quad 2n=m(1+m)$

$\Rightarrow \quad m<\sqrt{2n}<m+1$

$\Rightarrow \quad m=\left[\sqrt{2n}\right]$

$\Rightarrow \quad 2n=\left[\sqrt{2n}\right]\left(1+\left[\sqrt{2n}\right]\right)$

$\Rightarrow \quad 2n$ ចែកដាច់នឹង $\left(1+\left[\sqrt{2n}\right]\right)$ ។

ដូច្នេះ ចំពោះ $m\in\mathbb{N}, n=\dfrac{m(m+1)}{2}$ នោះ $1+\left[\sqrt{2n}\right]$ ចែកដាច់ $2n$ ។

59.▲ តំលៃ k ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់ $1000!$ ស្មើនឹង $\left[\dfrac{1000}{7}\right]+\left[\dfrac{1000}{7^2}\right]+\left[\dfrac{1000}{7^3}\right]$ $=142+20+2=164$ ។ ដូចគ្នាដែរ តំលៃ k ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់ $500!$ ស្មើនឹង $71+10+1=82$ ។ ដោយ $\dbinom{1000}{500}=\dfrac{1000!}{(500!)^2}$ ដូច្នេះ តំលៃ k ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់ $\dbinom{1000}{500}$ ស្មើនឹង $164-2.82=0$ ដូច្នេះ 7 ចែកមិនដាច់ $\dbinom{1000}{500}$ ទេ។

60.▲ សន្មតថា n ចែកដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនគត់ $\le\sqrt{n}$ ។ តាង $p_1=2, p_2=3,\dots\ p_l$ ជាបណ្តាចំនួនបឋម $\le\sqrt{n}$ ហើយតាង k_j ជាចំនួនគត់មួយដែល $p_j^{k_j}\le\sqrt{n}<p_j^{k_j+1}$ ។ ដូច្នេះ $n^{l/2}<p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\dots p_l^{k_l+1}$ ។ តាង $PPCM\left(1,2,3,\dots,\left[\sqrt{n}-1\right],\left[\sqrt{n}\right]\right)=K$,($[x]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x)។ ដូច្នេះ $K=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_l^{k_l}$ ។ដូច្នេះ $p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\dots p_l^{k_l+1}\le K^2$ ។ ដូច្នេះ $n^{l/2}<K^2$ ។ តាមសម្មតិកម្ម n ត្រូវចែកដាច់នឹង K ហើយដូច្នេះ $K\le n$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា $n^{l/2}<n^2$ ។ មានន័យថា $l<4$ និង ដូច្នេះ $n<49$ ។ តាមរយៈការពិនិត្យ យើងឃើញថា n ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $n=2,4,6,8,12,24$ ។

61.▲ តាង $n=s.2^k$ ដែល s ជាចំនួនសេស។ បើ $s=1$ នោះ $2S=(l+m)(m-l+1)$ ដែលមានកត្តាមួយជាចំនួនគូ និងកត្តាមួយជាចំនួនសេស។ កត្តាគូ មានតំលៃ $<2n$ ។ ដូច្នេះ $2S$ មិនអាចចែកដាច់នឹង $2n=2^{k+1}$ ទេ ។

តែ បើ $s>1$ នោះ S ចែកដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ $0<l<m<n$ ដោយយក

$$m=\frac{1}{2}\left(s+2^{k+1}-1\right)$$

និង

$$l=\begin{cases}1+m-2^{k+1}, s>2^{k+1}\\1+m-s, s<2^{k+1}\end{cases}$$

62.▲តាមទ្រឹស្តីបទនៃភាពចែកដាច់នឹង៩ ចំនួននេះ ចែកដាច់នឹង ៩ បើសិនជា

$$19+20+21+...+92=37^2.3$$

ចែកដាច់នឹង៩ និង ប្រាសមកវិញ។ តែចំនួននេះ ចែកដាច់នឹង៣ តែចែកមិនដាច់នឹង៩ទេ។ មានន័យថា យ៉ាងច្រើន ចំនួននោះ ចែកដាច់នឹង ៣។

63.▲យើងមាន

$$3^n-1=2\left(3^{n-1}+3^{n-2}+...+1\right)$$

បើ n ជាចំនួនសេស នោះ $3^{n-1}+3^{n-2}+...+1$ ជាផលបូកនៃ n ចំនួនសេស ដូច្នេះផលបូកជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ 3^n-1 មិនអាចជាពហុគុណនៃ៤បានទេ។ ដូច្នេះមានតែ $n=1$។

បើ n ជាចំនួនគូ តាង $n=2k$។ លក្ខខណ្ឌទៅជា 2^{2k} ចែកដាច់ $3^{2k}-1=\left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right)$។ ចំនួនទាំង២គឺ 3^k-1 និង 3^k+1 មានផលសងស្មើ២ ដូច្នេះ $PGCD$ របស់ចំនួនពីរនេះ ជាតួចែករបស់ 2។ ម៉្យាងវិញទៀត ចំនួនទាំងនេះជាចំនួនគូ ដូច្នេះ $PGCD\left(3^k-1,3^k+1\right)=2$។ យើងទាញបានថា បើមិន 3^k-1 ក៏ 3^k+1 ដែរ ដែលចែកដាច់នឹង 2^{2k-1}។ តែវាត្រូវតែជា $3^k+1\geq 2^{2k-1}$។ វិសមភាពនេះមិនពិតទេ បើ $k\geq 3$។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយដៃឃើញថា $k=0,k=1,k=2$ ជាចំលើយ។

ដូច្នេះចំលើយគឺ $n=1,n=2,n=4$។

64.▲តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$2^p-2=(1+1)^p-2=\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+...+\binom{p}{p-1}$$

ដោយដឹងថា $\binom{p}{0}=\binom{p}{p}=1$។ តាមវិបាកខាងលើ p ចែកដាច់គ្រប់តួទាំងអស់របស់អង្គខាងស្តាំនៃសមភាពខាងលើ។

65.▲ $n^2+23=n^2-1+24=(n-1)(n+1)+24$

យក $n=24k\pm1, k=0,1,2,...$ នោះ យើងទាញបាន កន្សោមដែលអោយចែកដាច់នឹង២៤។

66.▲ចំនួនគត់ទាំងអស់អាចមានរាងមួយ ក្នុងចំនោមរាងទាំង ៦ ខាងមុខនេះ ៖ $6k, 6k\pm1, 6k\pm2, 6k+3$។

បើ $p>3$ ជាចំនួនបឋម នោះវាត្រូវតែមានរាង $6k\pm1$ (ព្រោះផ្សេងទៀត ចែកដាច់នឹង ២រឺនឹង៣)។

$$p^2-1=(6k\pm1)^2-1=36k^2\pm12k=12k(3k-1)$$

បើ k ជាចំនួនគូ នោះ $24|\left(p^2-1\right)$ ។

បើ k ជាចំនួនសេស នោះ $3k-1$ ជាចំនួនគូ នាំអោយ $24|\left(p^2-1\right)$ ។

67.▲ $a^3b-ab^3=ab(a-b)(a+b)$ ជាចំនួនគូ ជានិច្ច។

បើសិនជាមានមួយក្នុងចំនោមចំនួនគត់ទាំង៣ មានរាង $5k$ នោះ សំនើពិត។

បើសិនជាចំនួនគត់ទាំង៣សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង ៥ នោះ ពួកវាស្ថិតនៅក្នុង ចំនោម ក្រុមចំនួនមានរាង $5k\pm1$ រឺ $5k\pm2$ ។ ដោយគេមាន៣ចំនួនគត់ នោះ គេត្រូវមាន២ចំនួនដែលស្ថិតនៅក្នុងក្រុមតែមួយ (ក្រុម ដែលមានរាង $5k\pm1$ រឺ $5k\pm2$)។ ផលបូករឺបើមិនអញ្ចឹងទេ ផលសងនៃ២ចំនួននោះ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង៥។ ដូច្នេះ សំនើពិត។

68.▲សន្មតថា

$$a=3k\pm1, \text{ និង } b=3m\pm1$$

$$a^2+b^2=3y+2 \text{ មិនអាចចែកដាច់នឹង៣ ទេ។}$$

$$(a=3k\pm1, \text{ និង } b=3m) \text{ រឺ } (a=3k, \text{ និង } b=3m\pm1)$$

$$a^2+b^2=3y+1 \text{ មិនអាចចែកដាច់នឹង៣ ទេ។}$$

ដូច្នេះ មានតែ a និង b ចែកដាច់នឹង ៣ទាំង២ ទើប $3|\left(a^2+b^2\right)$ ។

69.▲បើ $n=1$ នោះវាពិត។

សន្មតថា $n>1$ ។ តាមរូបមន្តទ្វេធាតុ

$$(n+1)^n-1=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}n^k$$

ហើយគ្រប់តួទាំងអស់របស់ផលបូកនេះ ចែកដាច់នឹង n^2 ទាំងអស់។

70.▲តំរៀបផលបូកជា

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(p-1)/2}+\frac{1}{(p+1)/2}\right)$$

យើងមាន

$$1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}=\frac{p}{2(p-2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ដូច្នេះ ផលបូករបស់ប្រភាគនេះ មានភាគយកស្មើ p ។ តួនិមួយៗមានភាគយក តូចជាង p ។ ដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះ p មិនអាចសំរួលបានទេ នៅក្នុងផលបូកនេះ។ ដូច្នេះ p ចែក a ដាច់។

71.▲ យើងមាន

$2903^n - 803^n$ ចែកដាច់នឹង $2903 - 803 = 7.300$

$261^n - 464^n$ ចែកដាច់នឹង $261 - 464 = 7.(-29)$

មានន័យថា កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូចគ្នា ដែរ

$2903^n - 464^n$ ចែកដាច់នឹង $2903 - 464 = 9.271$

$261^n - 803^n$ ចែកដាច់នឹង $261 - 803 = -2.271$

មានន័យថា កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង 271 ។

ដោយ 7 និង 271 មិនមានកត្តាបឋមរួមគ្នា នោះ កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង $7.271 = 1897$ ។

72.▲ ជំនួស $-y$ ទៅក្នុង y នៅក្នុងរូបមន្ត $x^n - y^n$ ហើយដោយដឹងថា $(-y)^n = -y^n$ បើ n សេស។

73.▲ យើងមាន

$1^{1993} + 1000^{1993} = (1 + 1000)(...)$ ចែកដាច់នឹង 1001

$2^{1993} + 999^{1993} = (2 + 999)(...)$ ចែកដាច់នឹង 1001

……………………………………………………….

$500^{1993} + 501^{1993} = (500 + 501)(...)$ ចែកដាច់នឹង 1001

ដូច្នេះ ផលបូកវាចែកដាច់នឹង 1001។

74.▲ យក $x = 2n - 1$ យើងទាញបានសំនើខាងលើពិត។

75.▲ យើងមាន

$$3^{kd} - 2^{kd} = \left(3^d - 2^d\right)\left(3^{(k-1)d} + 3^{(k-2)d}.2 + ... + 2^{(k-1)d}\right)$$

តាមសមភាពខាងលើ យើងទាញបានថា

បើ d ចែកដាច់ n នោះ $3^d - 2^d$ ចែកដាច់ $3^n - 2^n$ ។ (១)

បើ d ជាចំនួនពហុគុណ នោះ $3^d - 2^d$ ក៏ជាចំនួនពហុគុណដែរ។ (២)

យើងនឹងបង្ហាញថា មាន d ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល ចែកដាច់ 3^d-2^d-1។ យើងយក $d=2^t$ ដូច្នេះយើងទាញបាន d ចែកដាច់ 2^d ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា d ចែកដាច់ 3^d-1 ទៀត។ យើងនឹងបង្ហាញតាមវិចារដោយកំណើន។

បើ $t=1$ នោះ $d=2$ ចែកដាច់ $3^2-1=8$ ពិត។ សន្មតថា ពិតចំពោះចំនួនគត់ t មួយ។ យើងមាន

$$3^{2^{t+1}}-1=\left(3^{2^t}-1\right)\left(3^{2^t}+1\right)$$

កត្តាទី១ចែកដាច់នឹង 2^t តាមកំណើន ដូច្នេះ សំណើពិត។ ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញថា មាន $d=2^t$ ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល ចែកដាច់ 3^d-2^d-1។

យក $n=3^d-2^d=3^{2^t}-2^{2^t}$ ។

ដោយ $d=2^t$ ជាចំនួនពហុគុណ នោះ $n=3^d-2^d$ ក៏ជាចំនួនពហុគុណដែរ(តាម(២))។

ដោយ d ចែកដាច់ $n-1$ នោះ 3^d-2^d ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$(តាម(១))។

ដូច្នេះជាសរុប យើងបានបង្ហាញថា មាន $n=3^d-2^d=3^{2^t}-2^{2^t}$ ដែល $t\ge 1$ ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $n=3^d-2^d$ ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$។

76.▲ យើងដឹងថា ផលធៀប $q=\dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ មិនអាចស្មើ 1 បានទេ ដូច្នេះ $q\ge 2$ ។

ដោយដឹងថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\ge 5$ យើងមាន $x-1\ge \dfrac{x}{\sqrt[3]{2}}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $a\ge 5$ យើងមាន

$$2(a-1)(b-1)(c-1)\ge abc>abc-1 \qquad (\text{ព្រោះ } c>b>a\ge 5)$$

ដូច្នេះ $abc-1$ មិនអាចចែកដាច់នឹង $(a-1)(b-1)(c-1)$ បានទេ។ ដូច្នេះ $2\le a\le 4$ ។

សន្មតថា $q=2$ ។ ដូច្នេះ $abc-1$ ជាចំនួនគូ មានន័យថា abc ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ a ត្រូវតែសេស ដូច្នេះ $a=3$។ សមីការទៅជា $4(b-1)(c-1)=3bc-1$ សមមូលនឹង $bc+5=4b+4c \Rightarrow$ $(b-4)(c-4)=11 \Rightarrow b-4=1, c-4=11 \Rightarrow b=5$ និង $c=15$។

ពេលនេះ សន្មតថា $q\ge 3$។ បើ $a=2 \Rightarrow q(bc-b-c+1)=2bc-1 \Rightarrow$ $(q-2)bc+(q+1)=qb+qc \Rightarrow \left[(q-2)b-q\right]\left[(q-2)c-q\right]=q+2$

យើងមាន $b\ge 3$ ហើយបើ $c\ge 4 \Rightarrow (q-2)b-q\ge 2q-6$ និង $(q-2)c-q\ge 3q-8$។ ដូច្នេះផលគុណ $\left[(q-2)b-q\right]\left[(q-2)c-q\right]\ge(2q-6)(3q-8)$ ហើយយើងមាន $(2q-6)(3q-8)>q+2$ ពេល $q\ge 4$។ ដូចនេះមានតែ $q=3$។ ករណីនេះ $(b-3)(c-3)=5 \Rightarrow b=4$ និង $c=8$។

បើ $a=3 \Rightarrow 2q(bc-b-c+1)=3bc-1 \Leftrightarrow (2q-3)bc+(2q+1)=2qb+2qc$ ។ ដោយ $b\ge 4$ $\Rightarrow (2q-3)bc\ge(8q-12)c\ge 4qc>2qc+2qb$ ដូច្នេះគ្មានចំលើយ។

បើ $a=4$ យើងសរសេរ $(3q-4)bc+(3q+1)=3qb+3qc$ ។ តែ $b\geq 4 \Rightarrow (3q-4)bc\geq$ $(12q-16)c>6qc>3qb+3qc$ ដូច្នេះគ្មានចំលើយទៀត។

ជាសរុប ចំលើយមានតែ $a=2,b=4,c=8$ និង $a=3,b=5,c=15$ ។

77.▲យើងមាន

$$\begin{aligned} n^2+1 &= n^2-1+2 \\ &= (n-1)(n+1)+2 \end{aligned}$$

ដូច្នេះត្រូវតែ $n+1|2$ ហើយមានតែ $n+1=1$ រឺក៏ $n+1=2$ ។ដូច្នេះ $n=0,1$ ។ដោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ $n=1$ ។

78.▲$15x^2-11x-14 \quad =(3x+2)(5x-7)$

ដូច្នេះ មានន័យថា បើ $7|3x+2$ នោះ $7|15x^2-11x-14$

79.▲យើងមាន

$$3\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)<3^n+5^n<5\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$$

ដូច្នេះ $3<\dfrac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}<5$ មានន័យថា ផលធៀប $\dfrac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ក្រៅពី៤ទេ ដូច្នេះ

$$3^n+5^n=4\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$$

$\Rightarrow \quad 3^{n-1}=5^{n-1}$

$\Rightarrow \quad n=1$

80.▲ជាដំបូង យើងសន្មតថា បណ្ដា n ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា $m+1,\ m+2,\dots,\ m+n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ដោយដឹងថា មេគុណទ្វេធា ជាចំនួនគត់

$$\binom{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{n!m!}=\frac{(m+n)(m+n-1)\dots(m+1)}{n!}$$

ដូច្នេះ មានន័យថា ផលគុណ $(m+1)\dots(m+n)$ ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

បើមានមួយក្នុងចំនោមបណ្ដាចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់នេះ ស្មើ 0 នោះផលគុណស្មើ0 ហើយចែកដាច់នឹង $n!$ ។

បើបណ្ដា ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់នេះ សុទ្ធតែជាចំនួនអវិជ្ជមាន នោះ ផលគុណនោះដូចគ្នានឹងករណីវិជ្ជមាន គុណនឹង $(-1)^n$ ។ ដូច្នេះ វាក៏ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

81.▲$n^3-n=n(n-1)(n+1)$

មានន័យថា n^3-n ជាផលគុណនៃ៣ចំនួនគត់តរៀងគ្នា។ ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនោះ ចាំបាច់ត្រូវតែមានមួយជាពហុគុណនៃ២ និងមួយទៀតជាពហុគុណនៃ៣ ព្រោះ៣ចំនួនតរៀងគ្នាមានរាង $(3k;\ 3k+1;\ 3k+2;\dots)$។ បើ k គូ នោះ យើងមាន$3k$ ជាពហុគុណនៃ៦។ បើ k សេស នោះ $k=2m+1$ នោះ $3k+1=6m+4$ ជាពហុគុណនៃ2 ។

82.▲ $5x+2=8(2x+3)-11(x+2)$

រឺក៏ $2x+3=7(5x+2)-11(3x+11)$

83.▲ $p^2-1=(p-1)(p+1)$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម ខុសពី២ នោះ p ជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ $p-1$ និង $p+1$ គូទាំង២ ដូច្នេះផលគុណរបស់វាជាពហុគុណនៃ៤។

ដោយ $p>3$ ដូច្នេះ p មិនអាចជាពហុគុណនៃ៣ទេ។ ដូច្នេះ មានមួយក្នុងចំណោម $p-1$ រឺ $p+1$ ជាពហុគុណនៃ៣ ដូច្នេះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ៣។

ដូច្នេះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ៣ផងនិង នៃ៤ផង ហើយ ៣បឋមនឹង៤ នោះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ១២។

84.▲ a ចែកដាច់ $bc-1$ នោះ មាន $m\geq 1$ ដែល $ma=bc-1$។ ដូច្នេះ $bc-ma=1$។ បើ a និង b មានតួចែករួម ស្មើ $k>1$ នោះ $a=pk, b=qk$ ដូច្នេះ $qkc-mpk=1$ រឺ $qc-mp=\frac{1}{k}$។ អង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាពនេះ ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះមានតែ $k=1$។ ដូច្នេះ a និង b មានតួចែករួមធំមិនលើសពី១ ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ តាមរបៀបដូចគ្នាយើងទាញបាន a,b,c បឋមនឹងគ្នា២ៗ។

បើ a ចែកដាច់ $bc-1$ នោះ វាចែកដាច់ $bc+ac+ab-1$។ ដូចគ្នា b និង c ត្រូវតែចែកដាច់ $bc+ac+ab-1$។ ដោយ a,b,c បឋមនឹងគ្នា២ៗ នោះយើងទាញបាន abc ចែកដាច់ $ab+bc+ca-1$។ ផលធៀប

$$\frac{ab+bc+ca-1}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$$

មានតំលៃតូចជាងរឺស្មើ $\frac{3}{2}$។ ដូច្នេះវាត្រូវតែស្មើ ១។

ដូច្នេះ យើងទាញបានសមីការ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}=1$$

ជាដំបូងយើងសន្មតថា $a\leq b\leq c$។ យើងទាញបាន

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{abc}=\frac{3}{a}-\frac{1}{abc}$$

$1<1+\dfrac{1}{abc}\le\dfrac{3}{a}$

ដូច្នេះ $a<3$ ។ ដោយ $a>1$ នោះ $a=2$ ។

សមីការទៅជា

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2bc}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2bc}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2bc}=\frac{2}{b}-\frac{1}{2bc};\ b<4.$$

ដោយ $a=2\le b<4$ នោះ $b=2;3$ ។

ករណី $b=2$ សមីការគ្មានចំលើយ។

ករណី $b=3\Rightarrow c=5$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ឃើញថា $(2,3,5)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ។

ដូច្នេះជាសរុបសមីការមានចំលើយ $(2,3,5)$ និង ចំលាស់របស់វា $(2,5,3);(3,2,5);(3,5,2);(5,2,3)$; និង $(5,3,2)$ ។

85.▲ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ឧបមាថា 3 ចែកដាច់ $a^2-1=(a-1)(a+1)$

ដោយ 3 ជាចំនួនបឋម នោះ $a-1$ រឺ $a+1$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង៣។ ក្នុងករណីទាំងពីរ a ត្រូវតែចែកមិនដាច់នឹង3 ។ ដូច្នេះ បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។

ច្រាសមកវិញ យើងបង្ហាញថា បើ a ចែកមិនដាច់នឹង៣ នោះ a^2-1 ចែកដាច់នឹង៣។ ដោយ a ចែកមិនដាច់នឹង ៣ នោះ យើងអាចតាង

$a=3q+r$ ដែល $r=1$ រឺ 2

បើ $r=1$ នោះ $(a-1)(a+1)=(3q)(3q+2)$ ចែកដាច់នឹង ៣

បើ $r=2$ នោះ $(a-1)(a+1)=(3q+1)(3q+3)$ ចែកដាច់នឹង ៣។

ដូច្នេះ បើ a ចែកមិនដាច់នឹង៣ នោះ a^2-1 ចែកដាច់នឹង៣។

86.▲ករណី $n=1$ យើងមាន $3^6-26-27=169.4$ ជាពហុគុណ នៃ 169 ពិត។

សន្មតថាវាពិត រហូតដល់ $n-1, n>1$ មានន័យថា

$$3^{3n}-26n-1=169N \qquad \text{ចំពោះចំនួនគត់ } N \text{ ណាមួយ។}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}3^{3n+3}-26n-27&=27.3^{3n}-26n-27\\&=27\left(3^{3n}-26n-1\right)+676n\end{aligned}$$

$= 27.169N + 169.4.n$ ពិត។

ដូច្នេះ $3^{3n+3} - 26n - 27$ ជាពហុគុណ នៃ 169 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

87.▲ករណី $n = 1$ $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 8 ចំពោះគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិសេស k ព្រោះ $(k-1)$ និង $(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 2 ទាំង២ ហើយមានមួយចែកដាច់នឹង៤។ ព្រោះ បើ $k = 2m+1$ នោះ $k-1 = 2m$; $k+1 = 2m+2$ ។ បើ m គូ នោះ $k-1$ ចែកដាច់នឹង៤ ហើយ $k+1$ ចែកដាច់នឹង២។ បើ m សេស $k-1$ ចែកដាច់នឹង២ ហើយ $k+1$ ចែកដាច់នឹង៤។

ឧបមាថា សំណើពិតដល់ $n, n > 1$ មានន័យថា 2^{n+2} ចែកដាច់ $k^{2^n} - 1$ ។ យើងមាន

$$k^{2^{n+1}} - 1 = \left(k^{2^n} - 1\right)\left(k^{2^n} + 1\right)$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា $\left(k^{2^n} + 1\right)$ ចែកដាច់នឹង ២។ វាពិតព្រោះ k សេស ហើយនាំអោយ $\left(k^{2^n} + 1\right)$ គូ។

88.▲ដំបូងយើងពិនិត្យករណី $1 \in S$ ។ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ n ដែល $p = n^2 + 1$ ។ ដូច្នេះ $n > 2$ ហើយ n គូ។ តាង $a = p - \left(n-1\right)^2 = 2n$ និង $b = p - 1 = n^2$ ។ ដូច្នេះយើងមាន a និង b ជាធាតុរបស់ S ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $1 < a < b$ ហើយ a ចែកដាច់ b ព្រោះ n គូ។

ម្តងនេះយើងសន្មតថា $1 \notin S$ ។ ដូច្នេះ មាន $n > 2$ ដែល

$$n^2 + 1 < p < \left(n+1\right)^2 - 1 = n\left(n+2\right)$$

វិសមភាពខាងស្តាំជាវិសមភាពដាច់ខាត ព្រោះ p ជាចំនួនបឋម។ តាង $a = p - n^2 \in S$ ។ យើងមាន $a - n = p - n\left(n+1\right)$ ជាចំនួនខុសពីសូន្យ ព្រោះ p ជាចំនួនបឋមហើយតូចជាង n ដាច់ខាត។ តាង $b = p - \left(a-n\right)^2 \in S$ ។ យើងមាន $b = a\left(1 + 2n - a\right)$ ។ យើងមាន $a < 2n$ និង $1 + 2n - a > 1$ ព្រោះ $a < b$ ។ ដូច្នេះ គូ $\left(a, b\right)$ នេះផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនេះ។

89.▲សន្មត (m,n) ជាគូចំលើយដែលត្រូវរក។ នោះ $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ ជាចំនួនគត់។ ដូចគ្នា

$$m^3\frac{n^3+1}{mn-1} = \frac{(mn)^3 - 1 + m^3 + 1}{mn-1}$$

$$= (mn)^2 + mn + 1 + \frac{m^3+1}{mn-1}$$

មានន័យថា $\dfrac{m^3+1}{mn-1}$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ។ មានន័យថា បើ (m,n) ជាចំលើយ នោះ (n,m) ក៏ជាចំលើយដែរ។ ដូច្នេះជាដំបូងយើងតំរៀប $m \ge n$ សិន។

តាង $K=\dfrac{n^3+1}{mn-1}\ge 1$ ។ យើងទាញបាន

$$n^3+1=K(mn-1)$$

$$n^3+Kmn+(K+1)=0$$

$\Rightarrow$ n ចែក $K+1$ ដាច់។

$\Rightarrow$ $K=nx-1$ ចំពោះចំនួនគត់ $x\ge 1$ ណាមួយ។

ចំពោះ $n>1$

$$nx-1=K=\frac{n^3+1}{mn-1}\le\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}\le n+1$$

បើ $n\ge 3$ នោះ

$$nx-1\le n+\frac{1}{n-1}<n+1$$

$\Rightarrow$ $n(x-1)<2$

$\Rightarrow$ $n(x-1)=0;1$

$\Rightarrow$ $n(x-1)=0$ ព្រោះ $n\ge 3$

$\Rightarrow$ $x-1=0\Rightarrow\quad x=1$ ។

$\Rightarrow$ $n-1=\dfrac{n^3+1}{mn-1}$

$\Rightarrow$ $m=n+1+\dfrac{2}{n-1}$

$\Rightarrow$ $n-1$ ចែក២ដាច់។ ដោយ $n\ge 3$ ដូច្នេះ មានតែ $n-1=2$

$\Rightarrow$ $n=3;\ m=5$ ។

ករណី $n<3$

បើ $n=2$, $K=\dfrac{9}{2m-1}$, $2m-1=1;3;9$ មានន័យថា $m=1;2;5$ ។ យើងយក

$(m,n)=(2,2);(5,2)$ (ព្រោះយើងសន្មតថា $m\ge n$)។

បើ $n=1$,

$K=\dfrac{2}{m-1}$, $m-1=1;2;$ មានន័យថា $m=2;3$ ។ យើងទាញបាន $(m,n)=(2,1);(3,1)$ ។

ដូច្នេះជាសរុបចំលើយគឺ $(m,n)=(2,1);(3,1)\ (2,2);(5,2);\ (5,3)$

និងចំលាស់របស់វា $(1,2);(1,3);(2,5);(3,5)$ ។

90.▲ គ្រប់ចំនួនគត់ក្នុងចំនោម៥១ចំនួនគត់នោះ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $2^a m$ បានទាំងអស់ ដែល m ជាចំនួនសេស $(3=2^0.3, 4=2^2.1, \ldots)$។ ដោយយើងមាន ចំនួនសេសតែ៥0 ចន្លោះ១និង១00 នោះ គេមាន m ចំនួនតែ៥0ប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ ក្នុងចំណោម៥១ចំនួនគត់ ត្រូវតែមាន២ដែលមាន m មានតំលៃដូចគ្នា។ ដូច្នេះ ករណីនេះលេខតូចចែកដាច់លេខធំ។

សំនល់. ភាពសមមូល

91.▲ ១) យើងមាន $(p-1)(p-2)\ldots(p-n) \equiv (-1)(-2)\ldots(-n) \equiv (-1)^n n! \pmod{p}$ ។ សំនើពិត។

២) យើងមាន $(p+1)p(p-1)\ldots(p-n+2) \equiv (1)(0)(-1)\ldots(-n+2) \equiv 0 \pmod{p}$ ។ សំនើពិត។

92.▲ យើងមាន $240=2^4.3.5$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងមាន $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ និង $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ។ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានសេសសុទ្ធតែបឋមនឹង 2^4 ។ ដូច្នេះ $\phi\left(2^4\right)=2^3=8$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**អឺលែ** យើងទាញបាន $p^8 \equiv 1 \pmod{16}$ ។ ដូច្នេះ $p^8 \equiv 1 \pmod{m}$ ចំពោះ $m=3,5$ និង 16 ។ នាំអោយ $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$ ។

93.▲ តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

$$1059 = q_1 d + r$$

$$1417 = q_2 d + r$$

$$2312 = q_3 d + r$$

ដែល q_1, q_2, q_3 ជាចំនួនគត់។

យើងទាញបាន

$$2.179 = 358 = 1417 - 1059 = d(q_2 - q_1)$$

$$7.179 = 1253 = 2312 - 1059 = d(q_3 - q_1)$$

$$5.179 = 895 = 2312 - 1417 = d(q_3 - q_2)$$

ដូច្នេះ មានន័យថា $d \mid 2.179$, $d \mid 7.179$, និង $q \mid 5.179$ ។ ដោយ $d>1$ ដូច្នេះ $d=179$ ។ ដោយ $1059 = 5.179 + 164$ ដូច្នេះ $r=164$ ។ ដូច្នេះ $d-r = 179-164 = 15$ ។

ចំនួនការេ

94.▲សន្មតថា $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}=k$ ដែល k ជាចំនួនគត់។ យើងត្រូវបង្ហាញថា k ជាចំនួនការេ។ យើងសន្មតថា មានគូ(a,b) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ k ជាចំនួនគត់ ជ្រើសរើសយកa,b ជាគូដែលតូចជាងគេ។

យើងអាចសន្មតថា $a \le b$ ព្រោះ កន្សោមខាងលើ មានលក្ខណៈ ស៊ីមេទ្រី ធៀបនឹង a,b ។

បើ $a=b$ នោះ $0<k=\dfrac{2a^2}{1+a^2}<2$

$\Rightarrow$ បើ k ជាចំនួនគត់ នោះ $k=1=1^2$ ជាចំនួនការេ។

បើ $a<b$ នោះ

$$a^2+b^2-k(ab+1)=0$$

$$b^2-ka.b+a^2-k=0$$

សមីការដឺក្រេទី២ ធៀបនឹង b ដែលមានផលបូករឹសស្មើ ka និង ផលគុណរឹសស្មើ a^2-k (តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត)។

តាង $b_1,b_2=b$ ជារឹសរបស់វា ដូច្នេះ $b_1+b=ka$ និង $b_1b=a^2-k$ ។ ដោយ b,ka ជាចំនួនគត់ នោះ b_1 ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ។ យើងមាន a,k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយនិង $b>a\ge 0$ ។ b_1 មិនអាចធំជាងសូន្យបានទេ ព្រោះ បើមិនអញ្ចឹងទេ

$b_1=\dfrac{a^2-k}{b}<\dfrac{b^2-k}{b}<b$ មានន័យថា មាន b_1 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន(តូចជាងរឺធំជាង a ក៏បាន) ដែល $b_1<b \Rightarrow b$ មិនមែនជាចំនួនគត់ដែលតូចជាងគេទេ ដែលផ្ទុយពីសន្មតិ។ ដូច្នេះ $b_1 \le 0$ ។ តែ

$$a^2+{b_1}^2=k(ab_1+1)\ge 0\,;\ ab_1+1\ge 0\,;\ b_1\ge -\frac{1}{a}$$

ដូច្នេះ $b_1\le 0$ និង $b_1\ge -\dfrac{1}{a}$ ដែល $a>0$ ជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ $b_1=0$ ។ នាំអោយ $k=a^2$ ជាចំនួនការេ។

95.▲ចំនួនគត់ទាំងអស់អាចមានរាងមួយ ក្នុងចំណោមរាងទាំង ២ ខាងមុខនេះ ៖ $2k,2k+1$។ ដោយលើកវាជាការេ យើងទាញបាន

$$(2k)^2=4k^2$$

$$(2k+1)^2=4\left(k^2+k\right)+1$$

96. ▲ការេនៃចំនួនគត់មួយមានរាង $4k$ រឺ $4k+1$ ។ គ្រប់ចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងស្វ៊ីតនេះ មានរាង $4k-1$ ដូច្នេះ វាមិនអាចជា ជាការេនៃចំនួនគត់មួយទេ។

97. ▲យើងមាន $d-a>c-b$ ដោយលើកជាការេ យើងទាញបាន $a^2-2ad+d^2>c^2-2bc+b^2$ ។
បូក $4ad=4bc$ ចូលអង្គទាំង២ យើងទាញបាន $(a+d)^2>(b+c)^2$ ដូច្នេះ $a+d\ge b+c+1$ ។
បើ $\sqrt{d}-\sqrt{a}<1$ នោះ យើងទាញបាន

$$a+d<1+2\sqrt{ad}=1+2\sqrt{bc}\le 1+b+c\le a+d \qquad \text{មិនអាច}$$

ដូច្នេះ $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1$ ។ ដូច្នេះ $a+d=1+2\sqrt{ad}=1+2\sqrt{bc}\le 1+b+c\le a+d$ ដូច្នេះសមភាពអាចកើតមាន ពេល $b=c$ ដូច្នេះ $ad=b^2$ ។ តាង p ជាតួចែកបឋមរួមរបស់ a និង d ។ ដូច្នេះ p ត្រូវតែចែកដាច់ b ហើយ p ចែកដាច់ $a+d=2b+1$ មិនអាចទេ បើ $p\neq 1$ ។ ដូច្នេះ a បឋមនឹង d ។ ដោយផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ នោះ a ក៏ត្រូវតែជាចំនួនការេដែរ។

98. ▲ពិនិត្យចំនួនគត់ $(n-1)n(n+1)=n\left(n^2-1\right)$ ។ ដោយ n និង n^2-1 បឋមរវាងគ្នា នោះ ដើម្បីអោយផលគុណចំនួនទាំង២ជាចំនួនស្វ័យគុណទី $k\ge 2$ នោះ វាត្រូវតែ n^2-1 ជាចំនួនស្វ័យគុណទី k និង n ជាចំនួនស្វ័យគុណទី k ដែរ។ ដូច្នេះ $n^2-1=p_1^k$ និង $n=p_2^k>1$ ដែល p_1 បឋមនឹង p_2 ។ យើងទាញបាន

$p_2^{2k}-1=p_1^k \Rightarrow p_2^{2k}-p_1^k=1 \Rightarrow \left(p_2^2-p_1\right)\left(\left(p_2^2\right)^{k-1}+\left(p_2^2\right)^{k-2}p_1+\ldots+p_1^{k-1}\right)=1$ ។ ចំពោះ $k\ge 2$ និង ចំពោះ $p_1\ge 1,$ និង $p_2\ge 2$ យើងមានកត្តាទី២នៃអង្គខាងឆ្វេងធំជាង ១ ដូច្នេះ អង្គខាងឆ្វេងនិងស្តាំមិនអាចស្មើគ្នាបានទេ។

99. ▲បើ $k^2=2^8+2^{11}+2^n=2304+2^n=48^2+2^n$ នោះ $k^2-48^2=(k-48)(k+48)=2^n$ ។
យើងទាញបាន $k-48=2^s, k+48=2^t, s+t=n$ ។ តែ $2^t-2^s=96=3.2^5$ រឺក៏
$2^s\left(2^{t-s}-1\right)=2^5.3$ ។ យើងទាញបាន $s=5, t-s=2, t=7$ ។ ដូច្នេះ $n=t+s=12$ ។

100. ▲តាង T_n ជាចំនួនមិនការេទី n ។ គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ m ដែល $m^2<T_n<(m+1)^2$ ។ មានចំនួនការេចំនួន m ដែលតូចជាង T_n និង ចំនួនមិនការេចំនួន n មកត្រឹម T_n ដូច្នេះយើងឃើញថា $T_n=n+m$ ។ ដូច្នេះ

$$\Rightarrow \quad m^2<n+m<(m+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2-m<n<m^2+m+1$$

ដោយ $m^2-m; n; m^2+m+1$ សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ នោះវិសមភាពខាងលើទៅជា

$$m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left(m-\frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(m+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad m < \sqrt{n}+\frac{1}{2} < m+1$$

$$\Rightarrow \quad m = \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad T_n = n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

101.▲ តាង $m = k^2 + j, 0 \le j \le 2k$

យើងចែក សំនុំនៃm ជា២សំនុំរង ដែលក្នុងនោះ $A = \left\{m = k^2 + j, 0 \le j \le k\right\}$ ជាសំនុំនៃm ដែលធំជាងចំនួនការេចំនួន j ដែល $0 \le j \le k$ ។ $B = \left\{k^2 + j, k < j \le 2k\right\}$ ជាសំនុំនៃm ដែលធំជាងចំនួនការេចំនួន j ដែល $k < j \le 2k$ ។

យើងសង្កេតឃើញថា $k^2 \le m < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ ។ បើសិនជា $j = 0$ មានន័យថាសំនើខាងលើពិត។ សន្មតថា $m \in B$ ។ ដោយ $\left[\sqrt{m}\right] = k$ នោះ

$$f(m) = k^2 + j + k = (k+1)^2 + j - k - 1$$

ដែល $0 \le j - k - 1 \le k - 1 < k$ ។ ដូច្នេះ $f(m)$ មិនមែនជាធាតុរបស់ B ទេ។ ដូច្នេះ មានន័យថា $f(m)$ អាចជាចំនួនការេ រឺក៏ $f(m) \in A$ ។ ដូច្នេះ យើងពិនិត្យតែករណី $m \in A$ គឺគ្រប់គ្រាន់ហើយ។ ករណីនេះ $k^2 < m + k = k^2 + k + j \le k^2 + k + k < k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k^2 < m + k < (k+1)^2 \Rightarrow$ $k < \sqrt{m+k} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{m+k}\right] = k$ ។ ដូច្នេះ

$$f\left(f(m)\right) = f(m+k) = m + 2k = (k+1)^2 + j - 1$$

មានន័យថា $f\left(f(m)\right)$ អាចជាចំនួនការេរឺក៏បើមិនអញ្ចឹងទេក៏ $f\left(f(m)\right) \in A$ ដោយលើសចំនួនការេចំនួន $j-1$ ដែលតិចជាងm ដែលលើសចំនួនការេចំនួន j ។ ដូច្នេះ ជំហានបន្តបន្ទាប់មកទៀត តំលៃដែលលើសនោះនឹងថយចុះកាន់តែតូចទៅៗ រហូតដល់ពេលមួយតំលៃស្មើសូន្យ។ នៅពេលនោះ យើងនឹងទាញបានចំនួនការេ។

102.▲ 4.41 នៅក្នុងគោល r កំនត់ដោយ

$$4.41 = 4 + \frac{4}{r} + \frac{1}{r^2} = \left(2+\frac{1}{r}\right)^2$$

103.▲ ក) សន្មតថា $n(n+1)$ ជាចំនួនការេ។ ដោយ n និង $n+1$ បឋមនឹងគ្នា នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំង២។ តែមិនដែលមានចំនួនការេ២ខុសគ្នាមួយឯកតាទេ លើកលែងតែ១និង០ ($1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\ldots$ $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > 1$)។

ខ) សន្មតថា $(n-1)n(n+1)$ ជាចំនួនការេ។ ដោយ n និង $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ បឋមនឹងគ្នា នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំង២។ តែដើម្បីអោយ $n^2 - 1$ ជាការេនៃចំនួនគត់ ទាល់តែ $n = \pm 1$ (ព្រោះ $n^2 - 1 = b^2$; $1 = (n-b)(n+b) \geq 1$) តែពេលនោះ ផលគុណ $(n-1)n(n+1)$ ស្មើសូន្យ។

គ) $(n-1)n(n+1)(n+2) = \left(n^2 + n - 1\right)^2 - 1$ អាចជាចំនួនការេ មានតែ $n^2 + n - 1 = \pm 1$ រឺ ផលគុណនោះស្មើសូន្យ។

104.▲ បើ $x < 0$ នោះ $x^2 - x + 2 > x^2 + 2$ និង $x^2 - x + 2 < x^2 - 2x + 2$

ដូច្នេះ $x^2 < x^2 - x + 2 < (x-1)^2 + 1$

ដូច្នេះ $x^2 < x^2 - x + 2 \leq (x-1)^2$

តាង $u = -x > 0$ នោះ $u^2 < u^2 + u + 2 \leq (u+1)^2$

$u^2 + u + 2$ ជាការេនៃចំនួនគត់ស្ថិតនៅចន្លោះការេនៃចំនួនគត់២តគ្នា ដូច្នេះ មានតែ $u^2 + u + 2 = (u+1)^2$ រឺក៏ $u = 1$ ។ ដូច្នេះ $x = -1$ ដូច្នេះ $x^2 - x + 2 = 1 + 1 + 2 = 4 = 2^2$ ។

បើ $x = 1$ នោះ $x^2 - x + 2 = 2$ មិនមែនជាចំនួនការេ។

បើ $x = 2$ នោះ $x^2 - x + 2 = 4 = 2^2$ ជាចំនួនការេ។

បើ $x > 2$ នោះ $x^2 - x + 2 = x^2 - (x-2) > x^2$

និង $x^2 - x + 2 < x^2 + 2$

ដូច្នេះ $x^2 < x^2 - x + 2 < x^2 + 2$ រឺក៏ $x^2 + 1 \leq x^2 - x + 2 \leq x^2 + 1$

ដូច្នេះ $x^2 + 1 = x^2 - x + 2$ ដូច្នេះ $x = 1 < 2$ ។

ដូច្នេះ $x = -1; x = 2$ ដែល $x^2 - x + 2$ ជាចំនួនការេ។

សំគាល់៖សំនួរនេះអាចសរសេរជា ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - x + 2 = y^2$ ។

105.▲ ចំពោះ $x \neq 0$ យើងមាន

$$\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2<1+x+x^2+x^3+x^4<\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$$

បើ x ជាចំនួនគូ នោះ តួកណ្ដាលស្ថិតនៅចន្លោះចំនួនការេពីរតគ្នា ដូច្នេះវាមិនអាចជាចំនួនការេបានទេ។ បើ x ជាចំនួនសេស នោះចន្លោះ $x^2+\frac{x}{2}$ និង $x^2+\frac{x}{2}+1$ មានតែចំនួនគត់ $x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ មួយគត់ ដូច្នេះត្រូវតែ

$$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=1+x+x^2+x^3+x^4$$

ដូច្នេះ $x^2-2x-3=0$ មានចំលើយ $x=1$ និង $x=-3$ ។

ដូច្នេះ ចំលើយគឺ $x=0, x=1, x=-3$ ។

106.▲តាង $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ ជាចំលើយតូចជាងគេបង្អស់របស់សមីការ

$$a^4+(a+b)^4+b^4=c^2$$

បើ a និង b សុទ្ធតែគូ នោះ 2^4 ចែកដាច់អង្គខាងឆ្វេង ដូច្នេះ វាចែកដាច់ c^2 ដូច្នេះ c ជាពហុគុណនៃ 4 ។ ដូច្នេះ $(a/2,b/2,c/4)$ ក៏ជាចំលើយរបស់សមីការដែរ។ ករណីនេះផ្ទុយពី ការសន្មត។ ដូច្នេះ a រឺ b ជាចំនួនសេស។ ឧបមាថា a គូ ហើយ b សេស នោះ

$a^4+(a+b)^4+b^4\equiv 0+1+1\equiv 2 \pmod 4$ មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ។ ដូច្នេះ a និង b ត្រូវតែសេសទាំង២។ ករណីនេះ

$a^4+(a+b)^4+b^4\equiv 1+0+1\equiv 2 \pmod 4$ មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ។

ដូច្នេះ គូ (a,b) ដែល $a^4+(a+b)^4+b^4$ ជាចំនួនការេ មានតែ $(0,0)$ មួយប៉ុណ្ណោះ។

107.▲ចំនួនដែលជាធាតុរបស់សំនុំនោះ មានរាង

$$5^a7^b11^c13^d23^f$$

ដូច្នេះ ធាតុនិមួយៗ មាន (a,b,c,d,f) មួយបែប។ បើគិតពីលក្ខណៈគូសេស នៃ a,b,c,d,f យើងមានបន្សំ (a,b,c,d,f) ចំនួន៣២បែប។ ឧទាហរណ៍ (គូ,សេស,សេស,គូ,សេស) ជាករណី១ក្នុងចំណោមករណីទាំង៣២នោះ។ ដោយយើងមាន៣៣ចំនួនគត់ នោះត្រូវតែមានចំនួនគត់២ ដែលមាន (a,b,c,d,f) តំរៀបតាមលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា។ ដូច្នេះផលគុណនៃ២ចំនួននេះជាចំនួនការេ។

108.▲ចំនួននិមួយៗស្ថិតនៅក្នុងសំនុំ M មានរាង

$$2^a3^b5^c7^d11^f13^g17^h19^j23^k$$

បើគិតតាមលក្ខណៈគូសេស យើងមាន (a,b,c,d,f,g,h,j,k) ចំនួន $2^9=512$ បែប។

ដូច្នេះបើ យើងចាប់យក៥១៣ធាតុ នោះ យើងនឹងទទួលបានធាតុ២ខុសគ្នាដែលមាន (a,b,c,d,f,g,h,j,k) មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ដូច្នេះធាតុ២នេះមានផលគុណជាចំនួនការេ។

ដោយយើងមាន$1985>513$ នោះយើងអាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_1,b_1 ដែល $a_1b_1=c_1^2$ ។ យើងដកមួយគូនេះចេញ។ ពីក្នុងចំណោម $1983>513$ នៅសល់ យើងអាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_2,b_2 ដែល $a_2b_2=c_2^2$ ។ យើងដកមួយគូនេះចេញ។ ពីក្នុងចំណោម $1981>513$ នៅសល់ យើងអាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_3,b_3 ដែល $a_3b_3=c_3^2$ ។ យើងបន្តដកយក រហូតបាន n គូ ដែល $1985-2n\geq 513$ មានន័យថា $n=736$ ។ ដូច្នេះ យើងអាចប្រមូលបាន៧៣៧គូចំនួនគត់ខុសគ្នាដែល $a_kb_k=c_k^2$ ។ បន្ទាប់មកទៀតបណ្តា៧៣៧ចំនួនគត់c_k មានតួចែកបឋមរបស់វាតូចជាងរឺស្មើ២៦ ហើយដោយ $737>513$ នោះ យើងអាចរកបានចំនួនគត់c_k ២ខុសគ្នា តាងដោយc_i និង$c_j, i\neq j$ ដែល $c_ic_j=a^2$ ។ ដូច្នេះ $a_ib_ia_jb_j=a^4$ ជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤។ ដូច្នេះមានន័យថា យើងអាចរកបាន៤ចំនួនគត់ដែលមានផលគុណរបស់ជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤។

ចំនួនដែលមានរាងណាមួយ

109.▲ បើ n ជាចំនួនសេស នោះយើងយក $a=2,b=n-2$ ។

បើ n គូ នោះ n អាចជា $4k$ រឺ $4k+2$ ។

បើ $n=4k$ នោះ យើងយក $a=2k+1,b=2k-1$ ។ចំនួន២នេះបឋមរវាងគ្នា ព្រោះបើ $d=(2k+1,2k-1)$ នោះ $d\mid(2k+1-(2k-1))=2$ ដោយ d សេស នោះ $d=1$ ។

បើ $n=4k+2, k>1$ នោះ យើងយក $a=2k+3,b=2k-1$ ។

110.▲ យើងមាន $10^j-10^i=10^i\left(10^{j-i}-1\right)$ និង 1001 បឋមនឹង 10^i ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរក i និង j ដែល $10^{j-i}-1$ ចែកដាច់នឹង 1001 ។ យើងមាន $10^3\equiv -1(\bmod 1001)$ ដូចនេះ $10^6\equiv 1(\bmod 1001)$ ។ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា 6 ជាចំនួនតូចជាងគេដែល $10^6\equiv 1(\bmod 1001)$ ។ ដូច្នេះ $10^{j-i}\equiv 1(\bmod 1001)$ ទាល់តែ $j-i=6n$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ណាមួយ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរាប់ចំនួនចំលើយជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន របស់សមីការ

$$6n=j-i$$

ដែល $j\leq 99, i\geq 0$ ហើយ $n>0$ ។ ដូច្នេះ $n\leq 16$ ។

ចំពោះ $n=1$ សមីការទៅ ជា $j-i=6$ ដូច្នេះ $(j,i)=(6,0),(7,1),(8,2),....,(99,93)$ មាន 94 ចំលើយ

ចំពោះ $n=2$ សមីការទៅ ជា $j-i=12$ ដូច្នេះ $(j,i)=(12,0),(13,1),(14,2),....,(99,87)$ មាន 88 ចំលើយ។

......

ចំពោះ $n=16$ សមីការទៅ ជា $j-i=96$ ដូច្នេះ $(j,i)=(96,0),(97,1),(98,2),....,(99,3)$ មាន 4 ចំលើយ។

ដូច្នេះជាសរុប មាន $94+88+82+...+4=784$ ចំលើយ។

111.▲តួនៃស៊ីតនេះអាចសរសេរជា

$1,3,4,9,10,12,13,...$	គោល១០	(១)
$1,10,11,100,101,110,111,...$	គោល៣	(២)
$1,10,11,100,101,110,111,...$	ក្នុងគោល២ ត្រូវនឹង	(៣)
$1,2,3,4,5,6,7,...$	គោល១០	(៤)

ដូច្នេះតួទី១០០នៃស៊ីតនេះ ជាលេខ១០០ក្នុង(៤)។ យើងទាញរក តំលៃត្រូវគ្នានៃ១០០នេះ ក្នុងទំនាក់ទំនងទី(៣)។ យើងសរសេរ១០០ នៅក្នុងគោល២គឺ $100=1100100_2$ ហើយបំលែងវាទៅជាគោល៣ គឺ $1100100_3=3^6+3^5+3^2=981$ ។ ដូច្នេះតួទី១០០របស់ស៊ីតស្មើនឹង 981 ។

112.▲តាង $P(n)$ ជាសំនើដែលថា «បណ្តាចំនួនគត់ $n,n+1,...,2n+7$ សុទ្ធតែជាលេខពិសេស»។ យើងមាន $P(33)$ ពិត។ យើងនឹងបង្ហាញថា $P(n+1)$ ក៏ពិតដែរ មានន័យថា «បណ្តាចំនួនគត់ $n+1,n+2,...,2n+9$ សុទ្ធតែជាលេខពិសេស»។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $2n+8$ និង $2n+9$ ជាលេខពិសេស ជាបន្ថែមទៀតបានហើយ។

យើងនឹងបង្ហាញថា បើ n ជាលេខពិសេស នោះ $2n+8$ និង $2n+9$ ក៏ជាលេខពិសេសដែរ។ យើងមាន

$$n=a_1+a_2+...+a_k \text{ និង } \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=1$$

នោះ $2n+8=2a_1+2a_2+...+2a_k+4+4$ និង

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

ដូចគ្នាដែរ $2n+9=2a_1+2a_2+...+2a_k+3+6$ និង

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

ដូច្នេះ បើ n ជាលេខពិសេស នោះ $2n+8$ និង $2n+9$ ក៏ជាលេខពិសេសដែរ។

113. ▲ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា $2abc-ab-bc-ca$ មិនអាចសរសេរជារាង $xbc+yca+zab$ បានទេ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់នូវអំនអំនាងនេះ ជាដំបូងយើងសន្មតថា អាចសរសេរបានសិន មានន័យថា

$$2abc-ab-bc-ca = xbc+yca+zab$$

$$\Rightarrow \quad (x+1)bc = 2abc-ab-ca-yca-zab$$

ដោយ a,b និង c បឋមនឹងគ្នា២ៗ នោះ a ត្រូវចែកដាច់ $x+1$ ។ $x+1$ មិនអាចស្មើសូន្យបានទេ ព្រោះ $x\geq 0$ ។ ដូច្នេះ $x\geq a-1$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបានថា $y\geq b-1$ និង $z\geq c-1$ ។ តែបើដូច្នេះ នោះ

$$xbc+yca+zab \geq (a-1)bc+(b-1)ac+(c-1)ab$$

$$=3abc-bc-ac-ab > 2abc-bc-ac-ab$$

ផ្ទុយពីការសន្មត។ ដូច្នេះ $2abc-ab-bc-ca$ មិនអាចសរសេរជារាង $xbc+yca+zab$ បានទេ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលធំជាង $2abc-ab-bc-ca$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាងខាងលើបានទាំងអស់។

យើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែល ធំជាង $ab-a-b$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xb+ya$ បានទាំងអស់។ ដោយ a បឋមនឹង b នោះគ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ពេលចែកនឹង a មានសំនល់មួយក្នុងចំណោម $\{0,b,2b,\ldots,(b-1)a\}$ ។ បើ $r>(a-1)b-a$ នោះ r ចែកនឹង a សល់ xb ដែល $0\leq x\leq (a-1)$ ។ ដោយ $r>xb-a$ នោះ $r=xb+ya$ ដែល $y\geq 0$ ។ ដូច្នេះមានន័យថា គ្រប់ចំនួនគត់ធំជាង $ab-a-b$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xb+ya$ បានទាំងអស់។

ដោយដឹងថា c និង ab បឋមនឹងគ្នា នោះគ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលធំជាង $abc-ab-c$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $tc+zab$ បានទាំងអស់ ដែល t និង z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ តាង $d=tc+zab$ ។ យើងមាន $ab-a-b+1+t$ ធំជាង $ab-a-b$ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរជារាងខាងក្រោមបាន

$$ab-a-b+1+t = xb+ya \qquad \text{ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន } x \text{ និង } y \text{ ខ្លះ។}$$

យើងទាញបាន

$$xbc+yac+zab=(abc-ac-bc+c)+(tc+zab)=abc-ac-bc+c+d$$

យើងមាន $d>abc-ab-c$ នោះ

$$abc-ac-bc+c+d > abc-ac-bc+c+abc-ab-c = 2abc-ab-bc-ca$$

យើងបានបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមានរាង $abc-ac-bc+c+d>2abc-ab-bc-ca$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង ដែលអោយបាន។

114. ▲តាង r ជាចំនួនសនិទាន ដែល $\frac{1}{2}<r<2$ ។ តាង $r=\frac{m}{n}$ ។ យើងយក

$a=2m-n, b=m+n, c=2n-m$ និង $d=m+n$ នោះ $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}=\frac{m}{n}=r$ ជាចំនួនសនិទាន។

ក្នុងករណីទូទៅ យើងសន្មតថា $r\geq 1$ ។ ដូច្នេះ គេមាន $n\geq 0$ ដែល

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3n}<r\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3n+3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}<r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{16}<2$$

ដូច្នេះ $r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}$ ជាចំនួនសនិទាននៅចន្លោះ $\frac{1}{2}$ និង 2 ។ តាមលទ្ធផលខាងលើ យើងទាញបាន

$$r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}=\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$$

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c និង d ណាមួយ។ យើងទាញបាន

$$r=\frac{\left(3^n a\right)^3+\left(3^n b\right)^3}{\left(2^n c\right)^3+\left(2^n d\right)^3}$$

យើងទាញបានថា សំនើពិត។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត.តួចែករួមធំបំផុត

ចំនួនបឋម

115. ▲ សន្មតថា n ជាចំនួនពហុគុណ ហើយ ថា d ជាតួចែករបស់ n ខុសពី១។ យើងមាន $n = dd'$ និង

$$2^n - 1 = \left(2^d - 1\right)\left(2^{d(d'-1)} + 2^{d(d'-2)} + \ldots + 1\right)$$

ដោយ $2^d - 1$ ខុសពី១ នោះ $2^n - 1$ ជាចំនួនពហុគុណ។ ដូច្នេះ បើ n មិនមែនជាចំនួនបឋម $\Rightarrow$ $2^n - 1$ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ។

សំគាល់

បើ n ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow$ $2^n - 1$ អាចជាចំនួនបឋម រឺ មិនបឋម។

បើ $2^n - 1$ ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow$ n ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ។

116. ▲ យក $m = 2^k - 1,\ n = \left(2^k - 1\right)^2, k = 2,3,\ldots$

យើងឃើញថា m,n មានកត្តាបឋមរួមគ្នា ហើយ

$$m - 1 = 2\left(2^{k-1} - 1\right)$$

$$n - 1 = 2^{k+1}\left(2^{k-1} - 1\right)$$

117. ▲ $n^3 - 1 = (n-1)\left(n^2 + n + 1\right)$ ជាចំនួនបឋម។

ដោយ $n^2 + n + 1$ ធំជាង១ ជានិច្ចនោះ ដើម្បីអោយ $n^3 - 1$ ជាចំនួនបឋម មានតែ $n - 1 = 1,\ n = 2$ ។

ករណី $n = 2$ យើងមាន $n^3 - 1 = 7$ ជាចំនួនបឋម។

118. ▲ $n = 1$ នោះ $n^4 + 4 = 5$ ជាចំនួនបឋម។

ពិនិត្យ

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= \left(n^2 + 2\right)^2 - (2n)^2 \\ &= \left(n^2 + 2 - 2n\right)\left(n^2 + 2 + 2n\right) \end{aligned}$$

$$=\left((n-1)^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right)$$

កត្តានិមួយៗ ធំជាង ១ ចំពោះ $n>1$ ដូច្នេះ n^4+4 មិនអាចជាចំនួនបឋមបានទេ។

119. ▲ បើ កន្សោមខាងលើ ជាចំនួនបឋម នោះ វាត្រូវតែជាចំនួនសេស ហើយនាំអោយ n សេស។

ចំពោះ $n=1$ យើងមាន $n^4+4^n=5$ ជាចំនួនបឋម

ករណី $n\geq 3$

$$n^4+4^n=n^4+2n^2 2^n+2^{2n}-2n^2 2^n$$
$$=\left(n^2+2^n\right)^2-\left(n.2^{(n+1)/2}\right)^2$$
$$=\left(n^2+2^n+n.2^{(n+1)/2}\right)\left(n^2+2^n-n.2^{(n+1)/2}\right)$$

យើងឃើញថា ករណី $n\geq 3$ ជាចំនួនសេស នោះn^4+4^n អាចបំបែកជាផលគុណនៃចំនួនគត់២ ដែលធំជាង១ ដូច្នេះ វាមិនអាចជាចំនួនបឋមទេ។

120. ▲ តាង $a=10^3, b=2$ $1002004008016032=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$

$$=\frac{a^6-b^6}{a-b}$$
$$=(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$$
$$=1002.1002004.998004$$
$$=4.4.1002.250501.k$$

ដែល $k<250000$ ។ ដូចនេះ $p=250501$ ។

121. ▲ យើងឃើញថា $\sqrt{100}=10$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ២១ គ្រប់ចំនួនពហុគុណទាំងអស់ដែល $10\leq n\leq 100$ មានកត្តាបឋមមួយ ក្នុងចំនោម $2,3,5$ រឺ 7 ។ តាង A_m ជាចំនួនពហុគុណនៃm ដែល ≤ 100 ។ ដូច្នេះ $|A_2|=50$, $|A_3|=33$, $|A_5|=20$, $|A_7|=14$, $|A_6|=16$, $|A_{10}|=10$, $|A_{14}|=7$, $|A_{15}|=6$, $|A_{21}|=4$, $|A_{35}|=2$, $|A_{30}|=3$, $|A_{42}|=2$, $|A_{70}|=1$, $|A_{105}|=0$, $|A_{210}|=0$, ។

ដូច្នេះ ចំនួនចំនួនបឋមដែល≤ 100 គឺ

$=100-($ចំនួនចំនួនពហុគុណ$\leq 100)-1$

$=4+100-($ចំនួនចំនួនពហុគុណនៃ២,៣,៥រឺ៧$\leq 100)-1$

$$=4+100-(50+33+20+14)+(16+10+7+6+4+2)$$
$$-(3+2+1+0)-0-1$$
$$=25$$

ក្នុងនោះ ដក១ ព្រោះ ១ មិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជាចំនួនពហុគុណដែរ។

122. ▲ តាង $s=n_1^4+n_2^4+...+n_{31}^4$ ។ យើងថា $n_1=2$ ។ ព្រោះបើមិនអញ្ចឹង គ្រប់ $n_i, 1\le i\le 31$ ជាចំនួនសេសទាំងអស់ នាំអោយ s ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ 30 មិនអាចចែកដាច់ s ទេ ដូច្នេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។
បន្ទាប់មកទៀតយើងសន្និដ្ឋានថា $n_2=3$ ។ ព្រោះបើ $n_2\ne 3$ នោះ ដោយ n_i ជាចំនួនបឋម ហើយ $n_i\ne 3$ នោះ n_i ត្រូវតែមានរាង $3k\pm 1$ ដូច្នេះ $n_i^4\equiv 1(\bmod 3)$ ចំពោះគ្រប់ $1\le i\le 31$ ។ នាំអោយ $s\equiv 31\equiv 1(\bmod 3)$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។
ជាចុងក្រោយយើងនឹងបង្ហាញថា $n_3=5$ ។ ពិត ព្រោះ បើមិនអញ្ចឹង $n_i^2\equiv \pm 1(\bmod 5)$ ដូច្នេះ $n_i^4\equiv 1(\bmod 5)$ ចំពោះគ្រប់ $1\le i\le 31$ ។ ដូច្នេះ $s\equiv 31\equiv 1(\bmod 5)$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។
ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា ចំនួនបឋមពាតរៀងគ្នា គឺ $2,3,5$ ស្ថិតនៅក្នុងចំនោមចំនួនដែលអោយ។

ចំនួនពហុគុណ

123. ▲ ពិនិត្យ $n=(k+1)!+1$ ។ ករណីនេះ បណ្តាចំនួន $n+1,...,n+k$ សុទ្ធតែជាចំនួនមិនបឋម។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត. តួចែករួមធំបំផុត

124. ▲ តាង $d=\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)$ ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ $(a+b)^2-a^2+ab-b^2=3ab$
ដូច្នេះ d ចែកដាច់ $3b(a+b)-3ab=3b^2$ ។ ដូចគ្នា $d\,|\,3a^2$ ។ ដូច្នេះ $d\,|\left(3a^2,3b^2\right)=3\left(a^2,b^2\right)$ ។ ដោយ $(a,b)=1$ នោះ $\left(a^2,b^2\right)=(a,b)^2=1$ ។ ដូច្នេះ $d\,|\,3$ មានន័យថា $d=1$ រឺ 3 ។

125. ▲ តាង $d=(m,n), sd=m, td=n$ ។ ដូច្នេះ

$a^m-1=\left(a^d\right)^s-1$ ចែកដាច់នឹង a^d-1 ។ ដូចគ្នា

a^n-1 ចែកដាច់នឹង a^d-1 ។

ដូច្នេះ $\left(a^d-1\right)|\left(a^m-1,a^n-1\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ**ចាដេ–បឺស្ទូត** គេអាចរកបានចំនួនគត់ x, y ដែល $mx+ny=d$ ។ គួរកត់សំគាល់ថា x, y ត្រូវតែមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។ វាមិនអាចមានសញ្ញាដកទាំង២ទេ ព្រោះ $d \ge 0$ ។វាមិនអាចសញ្ញាបូកទាំង២ទេ ព្រោះនាំអោយ $d \ge m+n$ ដែលតាមពិត $d \le m, d \le n$ ។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា $x>0, y \le 0$ ។ តាង $t=\left(a^m-1, a^n-1\right)$ ។ ដូច្នេះ $t \mid \left(a^{mx}-1\right)$ និង $t \mid \left(a^{-ny}-1\right)$ ។ ដូច្នេះ

$$t \mid \left(\left(a^{mx}-1\right)-a^d\left(a^{-ny}-1\right)\right)=a^d-1$$

126. ▲ យើងមាន $d_n=\left(100+n^2, 100+(n+1)^2\right)$

$$=\left(100+n^2, 100+n^2+2n+1\right)$$

$$=\left(100+n^2, 2n+1\right)$$

ដូច្នេះ $d_n \mid \left(2\left(100+n^2\right)-n(2n+1)\right)=200-n$ ។

ដូច្នេះ $d_n \mid \left(2(200-n)+(2n+1)\right)=401$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា $d_n \mid 401$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។ ដូច្នេះ d_n មិនអាចធំលើសពី៤០១ទេ។ តើ d_n អាចមានតំលៃស្មើ៤០១រឺទេ?។ អោយ $n=200$ នោះ

$$a_{200}=100+200^2=100(401) \text{ និង } a_{201}=100+201^2=101(401)$$

ដូច្នេះ d_n អាចមានតំលៃរហូតដល់៤០១។ មានន័យថា $\max\limits_{n\ge1} d_n=401$ ។

127. ▲ តាង $d=\left(2^m-1, 2^n+1\right)$ ។ ដូច្នេះ d ត្រូវតែជាចំនួនសេស និង $2^m-1=kd$ និង $2^n+1=ld$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ k, l ។ ដូច្នេះ $2^{mn}=(kd+1)^n=td+1$ ដែល $t=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}k^{n-j}d^{n-j-1}$ ។ ដូចគ្នា $2^{mn}=(ld-1)^m=ud-1$ បើសិនជា m ជាចំនួនសេស។ ដោយ $td+1=ud-1$ នោះ $d \mid 2$ ហើយដោយ d ជាចំនួនសេស នោះ $d=1$ ។

128. ▲បណ្តាចំនួនដែលមានរាង $k.m!+1, k=1,2,\ldots,m$ បង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្ត ដែលមានតួចំនួន m និងមានផលសងរួម $m!$ ។ សន្មតថា $d \mid (l.m!+1)$, $d \mid (s.m!+1), 1 \le l < s \le m$ ។ នោះ

$$d \mid \left(s(l.m!+1)-l(s.m!+1)\right)=s-l<m,$$

ដូច្នេះ $1 \le d < m$ ដូច្នេះ $d \mid m!$ ។ ដូច្នេះ $d \mid (s.m!+1-s.m!)=1$ ។ មានន័យថា តួ២ៗនៃស៊ីតនេះ បឋមរវាងគ្នា។

129. ▲យើងមាន $1260=2^2.3^2.5.7$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរកចំនួនចំនួនវិជ្ជមានដែល ≤ 1260 ហើយ ដែលចែកមិនដាច់នឹង $2,3,5$ និងនឹង7 ។ តាង A ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ ≤ 1260 ដែលជាពហុគុណនៃ២, តាង B ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ ≤ 1260 ដែលជាពហុគុណនៃ៣,។ល។

យើងដឹងថា

$$
\begin{aligned}
\text{card}(A\cup B\cup C\cup D) &= \text{card}\,A+\text{card}\,B+\text{card}\,C+\text{card}\,D-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)\\
&-\text{card}(A\cap D)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(B\cap D)-\text{card}(C\cap D)+\text{card}(A\cap B\cap C)\\
&+\text{card}(A\cap B\cap D)+\text{card}(A\cap C\cap D)+\text{card}(B\cap C\cap D)-\text{card}(A\cap B\cap C\cap D)\\
&=630+420+252+180-210-126-90-84-60-36+42+30\\
&+18+12-6\\
&=972
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះចំនួនចំនួនគត់ដែលរកគឺ $1260-972=288$ ។

130. ▲តាង d ជាតួចែករបស់រួមរបស់ ab និង $a+b$ ។ ដូច្នេះ d ចែក $a(a+b)-ab=a^2$ ដាច់។ ដូចគ្នា d ចែក b^2 ដាច់។ ដោយ a និង b បឋមនឹងគ្នា នោះ a^2 និង b^2 ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ។ ដូច្នេះ $d=\pm 1$ ។

131. ▲យើងដឹងថា

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}-2=2^{2^{n+1}}-1 \quad &=\left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right)\\
&=\left(2^{2^{n-1}}-1\right)\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^n}+1\right)\\
&=F_0F_1\ldots F_n
\end{aligned}
$$

តាង d ជាតួចែករួមរវាង F_n និង F_m ។ សន្មតថា $n<m$ ។ តាមទំនាក់ទំនងខាងលើ ដោយសារ d ចែក F_n ដាច់ នោះ d ក៏ចែក F_m-2 ដាច់ដែរ។ ដោយសារ d ចែក F_m ដាច់ នោះ d ចែក2 ដាច់។ ដោយសារ F_n និង F_m ជាចំនួនសេស នោះd ជាតួចែកក៏សេសដែរ ហើយចែក២ដាច់ មានន័យថា $|d|=1$ ។

132. ▲យើងមាន $p=2$ និង $p=3$ ចែកដាច់នឹង $a_2=2^2+3^2+6^2-1=48$ ។

សន្មតថា $p\ge 5$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងមាន $2^{p-1}\equiv 3^{p-1}\equiv 6^{p-1}\equiv 1(\text{mod }p)$ ។ ដូច្នេះ

$$3.2^{p-1}+2.3^{p-1}+6^{p-1}\equiv 3+2+1\equiv 6(\text{mod }p)$$

$$\Rightarrow \quad 6\left(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\right)\equiv 0(\text{mod }p)$$

មានន័យថា $6a_{p-2}$ ចែកដាច់នឹង p ។ ដោយ p បឋមនឹង 6 នោះ a_{p-2} ចែកដាច់នឹង p ។

ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនបឋមទាំងអស់ចែកដាច់យ៉ាងតិចតួមួយរបស់ស្វ៊ីតនេះ។ មានន័យថា មិនអាចមានចំនួនណាមួយ ក្រៅពី១ ដែលបឋមនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតនេះទេ។

133. ▲a និង b ជាតួចែករបស់ $2^3 5^7 11^{13}$ ដូច្នេះ $a=2^x 5^y 11^z$ និង $b=2^s 5^t 11^u$ ចំពោះ ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x,y,z,s,t,u ខ្លះ។ ដោយ $2^3 5^7 11^{13}$ ជា $PPCM$ នៃ a,b ដូច្នេះ $\max(x,s)=3$, $\max(y,t)=7$ និង $\max(z,u)=13$ ។ ដូច្នេះ (x,s) អាចជា $(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0)$ ដូច្នេះយើងមានជម្រើស ៧បែបនៃ (x,s) ។ ដូចគ្នាយើងមានជម្រើស 15 និង 27 បែបចំពោះ (y,t) និង (z,u) ។ ដូច្នេះយើងមាន $7\times 15\times 27=2835$ តំរៀបនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b) ដែលមាន $PPCM=2^3 5^7 11^{13}$ ។

134. ▲យើងមាន

$$(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=(l+m+n)\frac{mn+ln+lm}{lmn}$$

ជាចំនួនគត់ បើ lmn ចែកដាច់ $(l+m+n)$ $(mn+ln+lm)=l(mn+ln+lm)+(m+n)(mn+ln+lm)$ ។ ដូចនេះ lmn ចែកដាច់ $(m+n)(mn+ln+lm)=(m+n)mn+l(m+n)^2$ ។ សមមូលនឹង lmn ចែកដាច់ $(m+n)mn$ ។ ដោយ l បឋមនឹង m,n ដូច្នេះ l ចែកដាច់ $m+n$ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន m ចែកដាច់ $l+n$ និង n ចែកដាច់ $l+m$ ។ ដោយអថេរទាំងអស់នេះមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី នោះយើងអាចសន្មត ថា n ធំជាងគេ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $l+m\le 2n$ ។ ដោយ n ចែកដាច់ $l+m$ ដូច្នេះ $l+m=n$ រឺក៏ $l+m=2n$ ។ ករណី $l+m=2n$ អាចមានតែពេល $l=m=n$ (ព្រោះ $l,m\le n$)។ ដោយ l,m,n បឋមនឹងគ្នាពីរៗ នោះ $l=m=n=1$ ។ ដូច្នេះ $(l,m,n)=(1,1,1)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ។

ពិនិត្យករណី $l+m=n$ ។ ដូច្នេះ លក្ខខណ្ឌទៅជា

$$2(l+m)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{l+m}\right)=2\frac{(l+m)^2+lm}{lm}=2+2\frac{(l+m)^2}{lm}$$ ជាចំនួនគត់

សមមូលនឹង $2\frac{(l+m)^2}{lm}$ ជាចំនួនគត់។

ដោយ l បឋមនឹង m នោះយើងអាចសន្មតថា l សេស។ ដូច្នេះ l ចែកដាច់ $(l+m)^2=l^2+2lm+m^2$ សមមូលនឹង l ចែកដាច់ m^2 ។ ករណីនេះអាចតែពេល $l=1$ ប៉ុណ្ណោះ (ព្រោះ l បឋមនឹង m)។ រួចហើយ m ចែក២ដាច់។ ដូច្នេះ $m=1$ រឺ $m=2$ ។ ករណី $m=1$ យើងទាញបាន $n=2$ ។ $(1,1,2)$ ជាចំលើយ។ បើ $m=2$ យើងទាញបាន $n=3$ ។ $(1,2,3)$ ក៏ជាចំលើយដែរ។

ដូច្នេះជាសរុបចំលើយមាន $(1,1,1);(1,1,2);(1,2,3)$ និង ចំលាស់ទាំងអស់របស់វាជាចំលើយរបស់សមីការ។

135. ▲យើងនិយាយថា ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃបណ្តាផលគុណក្នុងសំនួរ ($x_1x_2...x_k$) កំនត់ដោយ

$$\prod_{p,p\ \text{prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]}$$

យើងពិនិត្យផលគុណ $x_1x_2...x_k$ ណាមួយ និងចំនួនបឋម p ណាមួយ។ សន្មតថា $p^{\alpha_j} \mid x_j, p^{\alpha_j+1} \nmid x_j$ ។ យើងដឹងថា $p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}+...+p^{\alpha_k} \le n$ និងដោយ $p^{\alpha} \ge \alpha p$ នោះយើងមាន

$$p(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k) \le n \qquad \text{រឺក៏ } \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k \le \left[\frac{n}{p}\right]$$

ដូច្នេះមានន័យថា ស្វ័យគុណ α នៃចំនួនបឋម p ណាមួយដែល $p^{\alpha} \mid x_1x_2..x_k$ ធំមិនលើសពី $\left[\frac{n}{p}\right]$ ទេ($\alpha \le \left[\frac{n}{p}\right]$) ។ តែដោយយក $x_1=x_2=...=x_k=p, k=\left[\frac{n}{p}\right]$ យើងឃើញថា មានយ៉ាងហោចណាស់ផលគុណ $x_1x_2...x_k$ មួយ ដែលវិសមភាពទៅជាសមភាពមានន័យថា $\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]$ ។មានន័យថាអំនអំនាងខាងលើពិត។

តាមរូបមន្តឌីប៉ូលីញ៉ាក់ ស្វ័យគុណធំបំផុត α នៃ p ដែល p^{α} ចែកដាច់ $n!$ កំនត់ដោយ

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...$$

មានន័យថា $\prod_{p,p\ \text{prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...} = n!$ ។ ដូច្នេះ

$$\prod_{p,p\ \text{prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \le \prod_{p,p\ \text{prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...} = n!$$

136. ▲ យើងមាន

$$2(21n+4)-3(14n+3)=-1$$

ដូច្នេះ ភាគយកនិងភាគបែង របស់ប្រភាគនេះ មិនអាចមានកត្តារួមធំជាង១ទេ។ មានន័យថា វាមិនអាចសំរួលបានឡើយ។

137. ▲តាង

$$a=\prod p_k^{\alpha_k}, b=\prod p_k^{\beta_k}, c=\prod p_k^{\gamma_k}$$

ដែល p_k ជាចំនួនបឋម។ សំនើខាងលើសមមូលនឹង

$$2\max(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\max(\alpha_k,\beta_k)-\max(\alpha_k,\gamma_k)-\max(\beta_k,\gamma_k)$$
$$=2\min(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\min(\alpha_k,\beta_k)-\min(\alpha_k,\gamma_k)-\min(\beta_k,\gamma_k)$$

យើងសន្មតថា $\alpha_k \geq \beta_k \geq \gamma_k$ ។ សមភាពខាងលើទៅជា

$$2\alpha_k - \alpha_k - \beta_k = 2\gamma_k - \beta_k - \gamma_k - \gamma_k \quad \text{ពិត។}$$

138. ▲តាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃចំនួនពន្ធ យើងទាញបាន a,b,c,d ត្រូវតែមានរាង $3^m7^n, 0 \leq m \leq r, 0 \leq n \leq s$ ។ ជាងនេះទៅទៀត ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុ២ក្នុងចំនោមធាតុទាំង៤ ដែល m ត្រូវស្មើនឹង r ហើយនិង ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុ២ក្នុងចំនោមធាតុទាំង៤ ដែល n ត្រូវស្មើនឹង s ។ យើងពិនិត្យករណី m សិន។ យើងមាន ករណី (១) a,b,c,d ទាំង៤មាន $m=r$ ដូចគ្នា (យើងមាន ១ ករណី)។ (២) មាន៣ក្នុងចំនោម a,b,c,d មាន $m=r$ ហើយមួយទៀត មាន $0 \leq m < r$ (យើងមាន $3r$ ករណី ព្រោះ ក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនទី៤និមួយៗដែល $0 \leq m < r$ យើងមាន r ករណី ហើយ ក្នុងការជ្រើសរើស យក៣ក្នុងចំនោម៤ ដែល $m=r$ យើងមាន $\binom{4}{3}=3$ ករណី ដូច្នេះសរុបមាន $3r$ ករណី។)។ (៣) មាន២ក្នុងចំនោម a,b,c,d មាន $m=r$ ហើយ២ទៀត មាន $0 \leq m < r$ (ដូច្នេះមាន $6r^2$ ករណី ព្រោះ ក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនទី៣ និង ៤និមួយៗដែល $0 \leq m < r$ យើងមាន r^2 ករណី ហើយ ក្នុងការជ្រើសរើស យក២ក្នុងចំនោម៤ ដែល $m=r$ យើងមាន $\binom{4}{2}=6$ ករណី ដូច្នេះសរុបមាន $6r^2$ ករណី។)។ ដូច្នេះ មានទាំងអស់ $1+4r+6r^2$ បែបក្នុងការជ្រើសរើសអោយបានយ៉ាងហោចណាស់ ២ក្នុងចំណោម៤ ដើម្បីអោយបានស្វ័យគុណr ។ ដូចគ្នា មានទាំងអស់ $1+4s+6s^2$ បែបក្នុងការជ្រើសរើសអោយបានយ៉ាងហោចណាស់២ក្នុងចំណោម៤ ដើម្បីអោយបានស្វ័យគុណs ។

ដូច្នេះជាសរុប គេមានចតុធាតុទាំងអស់ចំនួន

$$\left(1+4r+6r^2\right)\left(1+4s+6s^2\right)$$

បំបែកជាកត្តាបឋម

139. ▲យើងមាន $n=\left(2^2.3.5.7\right)^4$ ។ ដូច្នេះ d ជាតួចែករបស់ n លុះត្រាតែ d អាចសរសេរជារាង $2^a.3^b.5^c.7^d$ បាន ដែល $0 \leq a \leq 8, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 4$ និង $0 \leq d \leq 4$ ។ ដូច្នេះ យើងមាន $9,5,5$ និង 5 តំលៃផ្សេងគ្នានៃ a,b,c និង d ។ ដូច្នេះ n មានតួចែកវិជ្ជមានចំនួន $9.5.5.5=1125$ ។ បើ $d \neq 420^2$ នោះ $\frac{420^4}{d}$ ក៏ជាតួចែករបស់ n ដែរ ហើយផលគុណនៃតួចែកទាំង២ស្មើ 420^4 ។ ដូច្នេះ យើងអាចចែកតួចែកទាំង

1125 របស់ n លើកលែងតែ 420^2 ចេញ ជា 562 គូតួចែក ដែលមានរាង $\left(d,\frac{n}{d}\right)$ ហើយផលគុណនៃតួចែក ២នេះ ស្មើ 420^4 ។ ដូច្នេះចំលើយគឺ $420^{4.562}.420^2=420^{2250}$ ។

140. ▲តួចែកគូរបស់ 10000 មានរាង 2^a5^b ដែល a និង b ជាចំនួនគត់ ដែល $1\le a\le 5$ និង $0\le b\le 5$ ។ ផលបូកតួចែកសេសវិជ្ជមានរបស់ 10000 ស្មើនឹង

$$\left(2+2^2+2^3+2^4+2^5\right)\left(1+5+5^2+5^3+5^4+5^5\right)=62.\frac{5^6-1}{5-1}=242172$$

141. ▲យើងមាន $10^{99}=2^{99}.5^{99}$ ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ 10^{99} មានរាង $2^a.5^b$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់ ដែល $0\le a,b\le 99$ ។ ចំពោះ a,b និមួយៗ យើងមានជំរើសចំនួន១០០យ៉ាង ដូច្នេះ 10^{99} មានតួចែកគត់វិជ្ជមានចំនួន 100.100 ។ ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនេះ បណ្តាពហុគុណនៃ $10^{88}=2^{88}.5^{88}$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $88\le a,b\le 99$ ។ ដូច្នេះយើងមានជំរើស a,b ចំនួន១២បែប ដូច្នេះ មាន 12.12 ក្នុងចំនោមតួចែកចំនួន 100.100 នៃ 10^{99} ដែលជាពហុគុណនៃ 10^{88} ។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេដែលចង់បានគឺ $\frac{12.12}{100.100}=\frac{9}{625}$ ។

142. ▲សន្មតថា $p,2^p-1$ ជាចំនួនបឋម។ នោះ $\sigma\left(2^p-1\right)=1+2^p-1$ ។ ដោយ $\left(2^{p-1},2^p-1\right)=1$ នោះ $\sigma\left(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\right)=\sigma\left(2^{p-1}\right)\sigma\left(2^p-1\right)$

$=\left(1+2+2^2+...+2^{p-1}\right)\left(1+2^p-1\right)=\left(2^p-1\right)2\left(2^{p-1}\right)$ ។ ដូច្នេះ ផលបូកតួចែករបស់ $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ ក្រៅពីខ្លួនវា ស្មើនឹង $\sigma\left(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\right)-2^{p-1}\left(2^p-1\right)=2^{p-1}\left(2^p-1\right)$។ ដូច្នេះ $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ ជាចំនួនឥតខ្ចោះ។

ច្រាសមកវិញ តាង n ជាចំនួនគត់គូ។ តាង $n=2^sm,m$ សេស។ នោះ

$\sigma(n)=\sigma\left(2^s\right)\sigma(m)=\left(2^{s+1}-1\right)\sigma(m)$ ។ ដោយn ជាចំនួនឥតខ្ចោះ នោះ $\sigma(n)=2n=2^{s+1}m$ ។ ដូច្នេះ $\left(2^{s+1}-1\right)\sigma(m)=2^{s+1}m$ ។ គេទាញបាន $2^{s+1}\,|\,\sigma(m)$ និងដូច្នេះ $\sigma(m)=2^{s+1}b$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិb ណាមួយ។ ដូច្នេះ $\left(2^{s+1}-1\right)b=m$ និង ដូច្នេះ $b\,|\,m,b\ne m$ ។

យើងចង់បង្ហាញថា $b=1$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា $b+m=\left(2^{s+1}-1\right)b+b=2^{s+1}b=\sigma(m)$ ។ បើ $b\ne 1$ នោះ មានយ៉ាងតិចតួចែករបស់m ចំនួន៣ តាងដោយ $1,b$ និងm ដែល $\sigma(m)\ge 1+b+m$ ផ្ទុយពីការពិត។ ដូច្នេះ $b=1$ ដូច្នេះ $m=\left(2^{s+1}-1\right)b=2^{s+1}-1$ ត្រូវតែជាចំនួនបឋម។ បើ $s+1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះ $s+1=kl$ ។ នោះ $2^{s+1}-1=\left(2^k\right)^l-1=\left(2^k-1\right)\left(1+2^k+...+2^{k(l-1)}\right)=\left(1+2+...+2^{k-1}\right)$

$\left(1+2^k+\ldots+2^{k(l-1)}\right)$ ដូច្នេះមិនអាចជាចំនួនបឋមទេ។ ដូច្នេះ $s+1=p$ ត្រូវតែជាចំនួនបឋម។ ដូច្នេះ p និង 2^p-1 ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ ។

ផ្នែកគត់

143. ▲យើងដឹងថា $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ ។ ព្រោះ

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}\Leftrightarrow$$
$$2n+1+2\sqrt{n^2+n}<4n+2$$
$$2\sqrt{n^2+n}<2n+1$$
$$4\left(n^2+n\right)<4n^2+4n+1 \quad \text{ពិត}$$

បន្ទាប់មកទៀតយើងនឹងបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ k ដែល $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<k\leq\sqrt{4n+2}$ ទេ។

លើកវិសមភាពជាការេ $\quad 2n+1+2\sqrt{n^2+n}<k^2\leq 4n+2$

យើងដឹងថា $\quad 4n+1<2n+1+2\sqrt{n^2+n}\quad$ ដូច្នេះ $\quad 4n+1<k^2\leq 4n+2$

ដោយសារ k ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះ $k^2=4n+2$ ។ តែយើងដឹងថា $4n+2$ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់បានទេ ។ព្រោះ បើ $k=2m$ នោះ $k^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ ។ តែបើ $k=2m+1$ នោះ $k^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ។ តែ $k^2=4n+2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ មានន័យថា k^2 មិនអាចស្មើ $4n+2$ ទេ។ ដូច្នេះ k មិនអាចជាចំនួនគត់បានទេ។

ដូច្នេះ $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ ពិត។

144. ▲អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ជាអនុគមន៍ចុះ។ ដូច្នេះ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow\quad \sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

យើងមាន $\displaystyle\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}=1998$

$$\Rightarrow\quad 1998+\frac{1}{10^3}<\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<1999$$

ដូច្នេះ $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]=1998$

145. ▲យើងមាន

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n=2\sum_{0\le k\le n/2}2^k\binom{n}{2k}=2N$$

ជាចំនួនគត់គូ។

ដោយ $-1<1-\sqrt{2}<0$ នោះ

ករណី n ជាចំនួនសេស នោះ

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n-1<\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n<\left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow\quad \left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n=\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]$$

$$\Rightarrow\quad \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]=2N$$ ជាចំនួនគត់គូ

ករណី n ជាចំនួនគូ នោះ

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n=\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]+1$$

$$\Rightarrow\quad \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]=2N-1$$ ជាចំនួនសេស។

ដូច្នេះមានន័យថា ចំពោះ $n=1,2,....$ នោះ $\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]$ មានតំលៃសេស, គូ, សេស, គូ,... ឆ្លាស់គ្នារហូត។

146. ▲វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{6}{7}n<k<\frac{7}{8}n$$

ដើម្បីអោយមាន k តែមួយគត់ទាល់តែ $\frac{7}{8}n-\frac{6}{7}n\le 2\ \Rightarrow\ n=112$ ។ ចំពោះ $n=112$ យើងទាញបាន $96<k<98$ ដូច្នេះ មានតែ $k=97$ មួយគត់។

147. ▲ដោយ $a>1$ នោះ $0<a^{-1}<1\ \Rightarrow\ \left\{a^{-1}\right\}=a^{-1}$ ។ ដោយ $2<a^2<3$ នោះ $\left[a^2\right]=2$ ។ ដូច្នេះ $\left\{a^2\right\}=a^2-\left[a^2\right]=a^2-2$ ។ ដូច្នេះ $\left\{a^{-1}\right\}=\left\{a^2\right\}\ \Rightarrow\ a^{-1}=a^2-2\ \Rightarrow a^3-2a-1=0$ ។

ដូច្នេះ

$$(a+1)\left(a^2-a-1\right)=0$$

ដែល មានរឹសវិជ្ជមានតែមួយគត់គឺ $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះតំលៃ a នេះ យើងមាន $a^2=a+1$ និង $a^3=2a+1$ យើងទាញបាន

$$a^6=8a+5,\ a^{12}=144a+89 \text{ និង } a^{13}=233a+144$$

$$\Rightarrow \qquad a^{12}-144a^{-1}=\frac{a^{13}-144}{a}=233$$

148. ▲យើងមាន

$$11111.11^2=123456765.4321<123456789<123456789.87654321=11111.1111^2$$

ដូច្នេះ $\left[\sqrt{123456789}\right]=11111 \Rightarrow \frac{1}{10}<0.11<\left\{\sqrt{123456789}\right\}<0.1111<\frac{1}{9}$ ។ កណ្ដាលនៃ $1/10$ និង $1/9$ គឺ $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)/2=0.105<0.11$ ។ ដូច្នេះ $\frac{1}{9}$ នៅជិត $\left\{\sqrt{123456789}\right\}$ ជាង។ ដូច្នេះ $n=9$ ។

149. ▲តាង

$f(t)=3[2t]-2[3t]$

$f(t+1)=3[2t+2]-2[3t+3]\ =3[2t]+6-(2[3t]+6)=f(t)$

ដូច្នេះយើងនឹងគណនាតំលៃរបស់ $f(t)$ តែក្នុងករណី $t\in[0,1)$ ។

យើងមាន

$$[0,1)=[0,1/3)\cup[1/3,1/2)\cup[1/2,2/3)\cup[2/3,1)$$

បើ $t\in[0,1/3)$ នោះ $[2t]=[3t]=0$ ដូច្នេះ $f(t)=0$

បើ $t\in[1/3,1/2)$ នោះ $[2t]=0;[3t]=1$ ដូច្នេះ $f(t)=-2$

បើ $t\in[1/2,2/3)$ នោះ $[2t]=1;[3t]=1$ ដូច្នេះ $f(t)=1$

បើ $t\in[2/3,1)$ នោះ $[2t]=1;[3t]=2$ ដូច្នេះ $f(t)=-1$

ដូច្នេះ

$$P(x,y)=(3x-2y)(3x-2y-1)(3x-2y+1)(3x-2y+2)K(x,y)$$

150. ▲យើងឃើញថា នៅក្នុងផលបូកខាងលើ ចំនួនតួដែលខុសពី0 មានចំនួនកំនត់ គឺថា $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$ ស្មើសូន្យ ពេលដែល $2^{k+1}>n+2^k \Rightarrow 2^k>n$ ។

សំនើ៖ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$ ។

សំរាយបញ្ជាក់៖ បើ $n\le x<n+1/2$ នោះ $[x]=n=[x+1/2]$ និង $[2x]=2n$ ។ បើ $n+1/2\le x<n+1$ នោះ $[x]=n;\ [x+1/2]=n+1$ និង $[2x]=n+1$ ។

ដូច្នេះ

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$$

ដូច្នេះផលបូកខាងលើទៅជា

$$\left([n]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]\right)+\dots.$$

$=[n]=n$ បើ n ជាចំនួនគត់។

151. ▲បើ x ជាចំនួនគត់នោះ យើងឃើញថា សមភាពពិត។ យើងសន្មតថា x មិនមែនជាចំនួនគត់ មានន័យថា $0<\{x\}<1$។ យក $i=[n-n\{x\}]$ ដូច្នេះ

$$1\le i\le n-1;\quad \{x\}+\frac{i-1}{n}<1 \text{ និង } \quad \{x\}+\frac{i}{n}\ge 1 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-i}{n}\le\{x\}<\frac{n-i+1}{n}\Rightarrow (n-i)\le n\{x\}<n-i+1$$

$$\Rightarrow n[x]+n-i\le n[x]+n\{x\}=nx<n[x]+n-i+1$$

$$\Rightarrow [nx]=n[x]+n-i \qquad (**)$$

តាម (*) យើងទាញបាន

$$[x]=[x];\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[[x]+\{x\}+\frac{1}{n}\right]=[x];\dots.;\left[x+\frac{i-1}{n}\right]=[x]$$

និង $\left[x+\frac{i}{n}\right]=\dots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+1$

ដូច្នេះ $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\dots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=i[x]+(n-i)([x]+1)$

$=n[x]+n-i=[nx]$ តាម (**)

152. ▲តាង $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ ។ យើងឃើញថា បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $f(x+n)=f(x)+20n$ ។ ជាពិសេស នេះមានន័យថា បើ ចំនួនគត់ k មួយអាចសរសេរជារាង $f(x_0)$ បានចំពោះចំនួនគត់ x_0 នោះចំពោះ $n=1,2,3,\dots$ គេអាចសរសេរចំនួន $k+20n$ បានដូចគ្នា មានន័យថា $k+20n=f(x_0)+20n=f(x_0+n)$។ ដោយហេតុនេះហើយ ជាដំបូងយើងគ្រាន់តែកំនត់ថាតើក្នុងចំនោម ២០ចំនួនគត់ដំបូងមួយណាដែលអាចជាតំលៃរបស់ $f(x)$ ចំពោះ $x\in(0,1]$។

យើងសង្កេតឃើញថា ពេល x កើន តំលៃរបស់ $f(x)$ ប្តូរជាតំលៃថ្មីតែពេល ណា ដែល $2x,4x,6x$ រឺ $8x$ មានតំលៃគត់ប៉ុណ្ណោះ ហើយពេលនោះ តំលៃរបស់ $f(x)$ កើនធំជាងមុន។ ពេល x ប្រែប្រួលចន្លោះ $(0,1]$ កំនើន $f(x)$ បែបនេះ កើតមានតែពេលណា ដែល x មានរាង m/n ដែល $1\le m\le n$ និង $n=2,4,6$ រឺ 8 ។ ប្រភាគបែបនេះមានចំនួន១២យ៉ាងគឺ

$$\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8} \text{ និង } 1$$

ត្រូវនឹង $f(x)$ មានតំលៃ

$$1,2,4,5,6,13,....,20$$

ដូច្នេះក្នុងចំនោម ២០ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងមានតែចំនួន១២ប៉ុណ្ណោះដែលអាចសរសេរតាមរាងចង់បាន។ ដោយ $1000 = 50.20$ ដូច្នេះ មានចំនួន $50.12 = 600$ ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលអាចសរសេរជារាងចង់បាន។

153. ▲ផលបូកដែលអោយមាន $91-19+1=73$ តួ ដែលតួនិមួយៗ ស្មើនឹង $[r]$ រឺក៏ $[r]+1$ ។ តែ $73.7<546<73.8$ ដូច្នេះមានន័យថា $[r]=7$ ។

តាង k ជាចំនួនតួដែលស្មើ $[r]$ ដូច្នេះចំនួនតួដែលស្មើ $[r]+1$ មាន $73-k$ ។ ដូច្នេះ

$$k[r]+(73-k)([r]+1)=546 \qquad \Rightarrow k[r]+73[r]+73-k[r]-k=546$$

$$\Rightarrow \quad 73[r]-473=k$$

$$\Rightarrow \quad k \equiv -473 \pmod{73}$$

$$\Rightarrow \quad k \equiv 38 \pmod{73}$$

ដោយ $k \le 73$ ដូច្នេះ $k=38$ $\Rightarrow$ $[r]=7$ ។ ដូច្នេះ 38 តួដំបូងស្មើ 7 និង $73-38=35$ តួបន្ទាប់ស្មើ 8 ។ តួទី 38 គឺ $\left[r+\frac{56}{100}\right]=7$ និង តួទី39 គឺ $\left[r+\frac{57}{100}\right]=8$ ។ យើងទាញបាន

$$r+\frac{56}{100}-1<7\le r+\frac{56}{100} \qquad \text{និង} \qquad r+\frac{57}{100}-1<8\le r+\frac{57}{100}$$

$$\Rightarrow \quad 7.43 \le r < 7.44 \qquad \Rightarrow \quad 743 \le 100r < 744 \qquad \Rightarrow [100r]=743$$

154. ▲ចំពោះ $1 \le i \le 2005$ តាង

$$a_i = \left[\frac{i^2}{2005}\right]$$

ដោយ $44^2 = 1936 < 2005 < 2025 = 45^2$, នោះ $a_1 = a_2 = ... = a_{44} = 0$ ។

ចំពោះចំនួនគត់ m ដែល $m \ge 1002$ ដោយ

$$\frac{(m+1)^2}{2005}-\frac{m^2}{2005}=\frac{2m+1}{2005}\ge 1$$

នោះ $a_m < a_{m+1}$ ។ ដូច្នេះ $a_{1002}, a_{1003}, ..., a_{2005}$ មានតំលៃខុសៗគ្នា។

ចំពោះចំនួនគត់ m ដែល $m<1002$ ដោយ

$$\frac{(m+1)^2}{2005}-\frac{m^2}{2005}=\frac{2m+1}{2005}<1$$

នោះ $a_{m+1} \le a_m + 1$ ។ ដោយដឹងថា ស្វីតនេះមិនមែនជាស្វីតថយ នោះមានន័យថា $a_m \le a_{m+1} \le a_m + 1$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ដែលមានតំលៃតូចជាង a_{1001} ជាតួនៃស្វីតនេះ។

យើងមាន $a_{1001} = 499$ និង $a_{1002} = 500$ ។ ដូច្នេះចំនួនតួដែលមានតំលៃខុសគ្នាគឺ $500+1004=1504$ (តំលៃទាំងនោះគឺ $0,1,...,499,a_{1002},a_{1003},...,a_{2005}$) ។

155. ▲យើងឃើញថា គ្មានចំនួនណាមួយដែលចែកដាច់មួយទៀតទេ បើមិនអញ្ចឹង យើងនឹងមាន $PPCM \le 2n$ ។ ដូច្នេះ $a_k = 2^{t_k} A_k$ ដែល A_k ជាចំនួនសេស។ យើងឃើញថា A_k ខុសគ្នាទាំងអស់។ ដោយយើងមាន A_k ទាំងអស់ចំនួន n ដូច្នេះ សំណុំរបស់ A_k ដូចគ្នានឹងសំណុំចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាន ដែលតូចជាង $2n$ ។ ឥលូវយើង យើងពិនិត្យ $a_1 = 2^{t_1} A_1$ ។ បើ $a_1 \le \left[\frac{2n}{3}\right]$ នោះ $3a_1 = 2^{t_1} 3A_1 \le 2n$ និង $3A_1 < 2n$ ។ ដូច្នេះ $3A_1$ ជាចំនួនសេសដែល $< 2n$ ដូច្នេះ $2A_1 = A_j$ ចំពោះតំលៃ j ណាមួយ និង $a_j = 2^{t_j} 3A_1$ ។ ដូច្នេះ $\left[a_1, a_j\right] = 2^{t_1} 3A_1 = 3a_1 \le 2n$ រឺក៏ $\left[a_1, a_j\right] = 2^{t_1} 3A_1 = a_j \le 2n$ ។ ដូច្នេះវាផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។

សមីការឌីយ៉ូផង់ទីន

156. $x = 3; n = 3$▲ សមីការសមមូលនឹង

$$2^n = (x+1)(x-1)$$

ដូច្នេះ $(x+1)$ និង $(x-1)$ ត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ២ទាំង២។ យើងដឹងថាចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ដែលខុសគ្នាចំនួន ២ឯកតា មានតែ២និង៤ប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ $x=3$ ជាចំលើយតែមួយគត់ ហើយ $n=3$។

157.$\{(\pm3;\pm1)\}$▲សមីការនេះអាចសរសេរទៅជា

$$x^2 = \left(y^2+3\right)^2 - 7$$

$$x = \left(y^2+3\right)\sqrt{1-\frac{7}{\left(y^2+3\right)^2}} < y^2+3$$

ជាមួយគ្នានេះដែរ យើងមាន

$$x^2 = \left(y^2+2\right)^2 + 2y^2 - 2$$

ដូច្នេះ បើ $2y^2-2>0$ នោះ យើងទាញបាន $x > y^2+2$។ ដូច្នេះ $y^2+2 < x < y^2+3$។ សមីការគ្មានឫស។ ដូច្នេះទាល់តែ $2y^2-2 \le 0$ មានន័យថា $y=-1,0,1$។ ករណី $y=\pm1$ យើងទាញបាន $x=\pm3$។ ករណី $y=0$ x មិនមែនជាចំនួនគត់។

158.▲ដោយ x,y,z មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីនឹងគ្នា នោះយើងអាចសន្មតថា $0<x\le y\le z$។ តាមលក្ខខណ្ឌនេះ យើងមាន

$$1 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{x}$$

ដូច្នេះ $x \le 3$។ ដូច្នេះ $x=1;2;3$។

បើ $x=1$ នោះ $1/y + 1/z = 0$ មិនអាចព្រោះ $y,z>0$។

បើ $x=2$ នោះ $1/y + 1/z = 1/2$។ ដោយ $y \le z$ នោះ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{1}{y}+\frac{1}{y} \qquad \Rightarrow \qquad y \le 4$$

ដោយ $x=2$ ដូច្នេះ $2=x\le y\le 4$ ។ ដូច្នេះ $y=2;3;4$ ។ $y=2$ មិនអាចមាន z ។ បើ $y=3$ នោះ $z=6$ ។ បើ $y=4$ នោះ $z=4$ ។

បើ $x=3$ នោះ

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{2}{y}$$

$\Rightarrow y\le 3$ $\quad\Rightarrow 3=x\le y\le 3$ ដូច្នេះ មានតែ $y=3$ ។ ដូច្នេះ $z=3$ ។

ដូច្នេះជាសរុបចំលើយរបស់សមីការមាន $(2,3,6);(2,4,4);(3,3,3)$ និងគ្រប់តំរៀបទាំងអស់ដែលអាចមាននៃត្រីធាតុទាំងអស់នេះ$((2,6,3),(3,2,6),....)$។

159.▲តាង $P(x)=x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3 \ =8x^3+84x^2+420x+784$ ។

បើ $x\ge 0$ នោះ

$$(2x+7)^3 \quad =8x^3+84x^2+294x+343$$

$$<P(x)<8x^3+120x^2+600x+1000=(2x+10)^3$$

ដូច្នេះ $\quad 2x+7<y<2x+10$ ដូច្នេះ $y=2x+8$ រឺ $2x+9$ ។សមីការ

$$P(x)-(2x+8)^3=-12x^2+36x+272=0$$

$$P(x)-(2x+9)^3=-24x^2-66x+55=0$$

គ្មានចំលើយជាចំនួនគត់ទាំង២។ ដូច្នេះ $x\ge 0$ សមីការគ្មានចំលើយ។

យើងមាន $P(-x-7)=-P(x)$ ដូច្នេះ (x,y) ជាចំលើយ លុះត្រាតែ $(-x-7,-y)$ ជាចំលើយដែរ។ តែសមីការគ្មានចំលើយចំពោះ $-x-7\ge 0$ រឺ $x\le -7$ ទេ។ ដូច្នេះ បណ្តាចំលើយ (x,y) ត្រូវតែ $-6\le x\le -1$ ។

យើងមាន $P(-1)=440$ មិនមែនជាចំនួនគូប។ $P(-2)=216=6^3$ និង $P(-3)=64=4^3$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានចំលើ $(x=-2,y=6)$ និង $(x=-3,y=4)$ ។ ហើយគូចំលើយផ្សេងទៀតគឺ

$(x=2-7=-5,y=-6)$ និង $(x=3-7=-4,y=-4)$ ។

160.▲ យើងមាន $y^5 \equiv 0,1,-1 \pmod{11}$ ចំពោះគ្រប់ y ។ ដូច្នេះ $y^5 \equiv 7,8,6 \pmod{11}$ ចំពោះគ្រប់ y ។

តែ យើងមាន $x^2 \equiv 0,1,4,9,5,3 \pmod{11}$ ចំពោះគ្រប់ x ។ ដូច្នេះសមីការនេះគ្មានរឹស។

161.▲ក) $5^n = a^2 \Rightarrow a$ ត្រូវតែជាចំនួនស្វ័យគុណនៃ៥ ដូច្នេះ $a = 5^k$ ។ សមីការទៅជា $2k = n$ ដូច្នេះ n ជាចំនួនគូ។ ដូច្នេះ n ជាចំនួនគូ ហើយ $a = 2^{n/2}$ ។

ខ) $5^n = (a-1)(a+1)$ ។ ដោយ $a-1$ បឋមនឹង$a+1$ បើ $a \neq 2$ នោះ $a-1$និង $a+1$ ត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ៥ទាំង២។ តែមិនដែលមានស្វ័យគុណនៃ៥ដែលខុសគ្នាចំនួន២ទេ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

គ) ដោយពិនិត្យលើភាពសមមូលតាម៤ យើងទាញបាន $a^2 \equiv 3 \pmod 4$ ព្រោះ $5 \equiv 1 \pmod 4$ ។ តែយើងដឹងថាចំនួនការេ សមមូលនឹង0រឺ១ $(\bmod 4)$ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

162.▲សន្មតថាសមីការមានចំលើយ។ សន្មតថា (x,y,z) ជាចំលើយវិជ្ជមានរឹស្ទូឡ ដែលតូចជាងគេ ក្នុងចំនោមចំលើយដែលអាចមាននៃសមីការ។សមីការនេះនាំអោយយើងទាញបានថា x^3 ជាពហុគុណនៃ៣ ដូច្នេះ x ជាពហុគុណនៃ៣។ ដូច្នេះ $x = 3x_1$ ។ យើងទាញបាន

$$27x_1^3 + 9y^3 = 3z^3$$
$$9x_1^3 + 3y^3 = z^3$$
$$\Rightarrow z = 3z_1$$
$$\Rightarrow 9x_1^3 + 3y^3 = 27z_1^3$$
$$\Rightarrow 3x_1^3 + y^3 = 9z_1^3$$
$$\Rightarrow y = 3y_1$$
$$\Rightarrow x_1^3 + 9y_1^3 = 3z_1^3$$

ដូច្នេះ (x_1, y_1, z_1) ដែល $x_1 < x; y_1 < y; z_1 < z$ ក៏ជារឹសរបស់សមីការ $x^3 + 9y^3 = 3z^3$ ដែរ។ តែយើងបានសន្មតថា (x,y,z) ជាចំលើយដែលតូចជាងគេ ដូច្នេះ មានតែ $(x,y,z) = (0,0,0)$ ។

163.▲សមីការមានរឹសងាយ $x_0 = \frac{3}{5}$, $y_0 = \frac{4}{5}$, និង $z_0 = \frac{6}{5}$ ។

ដោយភាគបែងរួមរបស់ x_0^3, y_0^3, z_0^3 ស្មើនឹង 125 នោះ បើយើងគុណ x_0^3, y_0^3, z_0^3 នឹងចំនួនមួយដែល សមមូលនឹង ១ តាម ១២៥ នោះ ផ្នែកទសភាគរបស់ x_0^3, y_0^3, z_0^3 មិនប្រែប្រួលទេ។ យើងមាន $(125k+1)^3$ សមមូលនឹង ១ តាម ១២៥។ ដូច្នេះ បណ្ដាចំនួន

$$x = x_0(125k+1); y = y_0(125k+1); z = z_0(125k+1)$$

សុទ្ធតែជាចំលើយរបស់សមីការ។ ដូច្នេះសមីការមានរឹសច្រើនរាប់មិនអស់។

164.▲ យើងមាន $(x+1)^2 + ... + (x+99)^2 = 99x^2 + 99(2x) + \left(1^2 + 2^2 + ... + 99^2\right)$

និង $\left(1^2 + 2^2 + ... + 99^2\right) = \dfrac{99(99+1)(2.99+1)}{6} = 328350 = 36483(9) + 3$

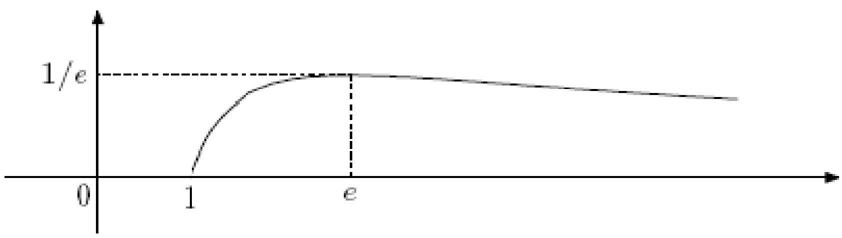
ដូច្នេះ $(x+1)^2 + ... + (x+99)^2 \equiv 3(\bmod 9)$ ។ ដូច្នេះ $y^z \equiv 3\left(\bmod 3^2\right)$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត $y^z \equiv 0(\bmod 3)$ ។ ដូច្នេះ $y^z = p.3$ ដែល p ជាចំនួនគត់ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដោយ $z \ge 2$ នោះសមីការ $y^z = p.3$ មិនអាចមានចំលើយទេ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

165.▲ សមីការអាចសរសេរទៅជា

$$y \log x = x \log y$$

រឺក៏ $$\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y}$$

ដោយសិក្សាទៅលើអនុគមន៍ $f(t) = \dfrac{\log t}{t}$ យើងទាញបានថា អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍កើនលើ $[1, e]$ ហើយជាអនុគមន៍ចុះលើ $[e, +\infty]$ ។



ដូច្នេះ យើងទាញបានថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់ពីរខុសគ្នា(សន្មតថា $x < y$) ដែល $x^y = y^x$ នោះ វាត្រូវតែ $x < e$ និង $y > e$ ដូច្នេះ $x = 2$ នាំអោយ $y = 4$ ។

ជាបញ្ចប់ចំលើយរបស់សមីការគឺ គូ (x, y) ដែល $x = y$ និង គូ $(2,4)$ និង $(4,2)$ ។

166.▲ យើងមាន

$$a_8 = 46233 \equiv 0\left(\bmod 3^2\right)$$

$$a_8 = 46233 \equiv 9\left(\bmod 3^3\right)$$

ចំពោះ $n \geq 9$ យើងមាន $a_n = a_8 + 9! + 10! + \ldots + n! \equiv a_8 \equiv 9\left(\bmod 3^3\right)$

ដូច្នេះមានន័យថា ចំពោះ $n \geq 8$ គេមាន a_n ចែកដាច់នឹង $3^2 = 9$ តែចែកមិនដាច់នឹង 3^3 ។ ដូច្នេះ $a_n = 3^2 q$ ដែល q ជាចំនួនគត់ចែកមិនដាច់នឹង 3^2 ។ ដោយ $a_n = m^k$ នោះ ត្រូវតែ $k = 2$ ។ គ្រប់ចំនួនការេសមមូលនឹង $0,1$ រឺ 4 តាម 5 ។ ចំពោះ $n \geq 8$ យើងមាន $a_n \equiv 1 + 2 + 2.3 + 2.3.4 = 33 \equiv 3(\bmod 5)$ ។ ដូច្នេះអង្គទាំង២នៃសមីការមិនអាចស្មើគ្នាបានទេ។ យើងទាញបាន ថា សមីការគ្មានចំលើយទេ ពេល $n \geq 8$ ។

យើងពិនិត្យករណីនិមួយៗខាងក្រោម

$a_1 = 1 = 1^k, \forall k \Rightarrow$ ចំលើយសមីការ $(m,n,k) = (1,1,k)$

$a_2 = 3$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_3 = 9 = 3^2 \Rightarrow$ ចំលើយសមីការ $(m,n,k) = (3,3,2)$

$a_4 = 33$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_5 = 153 = 9.17$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_6 = 873 = 9.97$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_7 = 5913 = 81.73$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

167.▲ តាង (x,y) ជាចំលើយរបស់សមីការ បើសិនជាមាន។ យើងមាន

$$(y-4)(y+4) = x^3$$

បើ y ជាចំនួនសេស នោះ $y-4$ និង $y+4$ បឋមនឹងគ្នា ហើយជាគូប២ដែលខុសគ្នា៨ឯកតា។ ករណីនេះមិនអាចមាន។ ដូច្នេះ $y = 2y'$ ជាចំនួនគូ $\Rightarrow$ $x = 2x'$ ជាចំនួនគូដែរ។ សមីការទៅជា

$$(y'+2)(y'-2) = 2(x')^3$$

$$\Rightarrow \quad (y'+2)^2 - 4(y'+2) = 2(x')^3$$

$\Rightarrow \quad (y'+2)^2 \equiv 0$ រឺ $2(\bmod 4)$ ដូច្នេះ $(y'+2)^2$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង៤ ដូច្នេះ y' ជាចំនួនគូ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $y' = 2s, x' = 2t$ នាំអោយ

$$(s+1)(s-1) = 4t^3$$

ដូច្នេះ $s+1$និង $s-1$ត្រូវតែជាចំនួនគូ នាំអោយ $s=2u+1$ ជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ

$$u(u+1)=t^3$$

ដោយ u និង $u+1$ បឋមនឹងគ្នា នោះ វាត្រូវតែគូបទាំង២ ដូច្នេះ $u=-1$ រឺ 0 ហើយ $t=0$។

ដូច្នេះ សមីការមានចំលើយ២គត់ គឺ $(x,y)=(0,\pm 4)$។

168.▲ បើ $z=1$ នោះ យើងទាញបាន $x=y=1$។ សន្មតថា $z\geq 2$។ បើគេមិនមាន $x=y=z$ នោះ មានមួយក្នុងចំនោម x និង y ដែលត្រូវតែធំជាងz ជាច់ខាត ដូច្នេះ ធំជាងរឺស្មើ$z+1$។

បើសិនជាមួយនោះជា x យើងទាញបាន

$$2x^x\geq 2(z+1)^{z+1}>2z^{z+1}\geq 4z^z \qquad \text{ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។}$$

បើសិនជាមួយនោះជា y នោះ យើងទាញបាន

$$y^y\geq (z+1)^{z+1}>z^{z+1}+(z+1)z^z=(2z+1)z^z\geq 5z^z$$

ក៏ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែរ។

169.▲ យើងដឹងថា $x=1, y=-a$ ជាចំលើយរបស់សមីការជានិច្ច។

ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ (x,y) ជាចំលើយមួយនៃសមីការ នោះ x ជារឹសរបស់ពហុធា

$$X^2+ayX+\left(y^2-1\right)=0$$

ហើយ រឹសមួយទៀតរបស់ពហុធានេះ គឺ $-ay-x$។ ដូច្នេះយើងទាញបាន គូរឹសមួយទៀតរបស់សមីការគឺ $(-ay-x,y)$។ ដូចគ្នា សមីការមានរឹស $(x,-ax-y)$។

ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ $|a|>2$ ហើយបើ x និង y មិនសូន្យ យើងមាន

បើ $|x|\leq|y|$

$$|-ay-x|=|ay+x|\geq|ay|-|x|=|a||y|-|x|$$

$$\geq(|a|-1)|y|>|y|\geq|x|$$

មានន័យថា បើ (x,y) ជាចំលើយ នោះ យើងអាចរកបាន ចំលើយផ្សេងមួយទៀត កំនត់ដោយ

$(-ay-x,y)$ ដែល $|-ay-x|>y\geq x$។

បើ $|y|\leq|x|$ នោះ $\qquad |-ax-y|>|x|\geq|y|$

មានន័យថា បើ (x,y) ជាចំលើយ នោះ យើងអាចរកបាន ចំលើយផ្សេងមួយទៀត កំនត់ដោយ

$(x,-ax-y)$ ដែល $|-ax-y|>|x|\geq|y|$ ។

តាង $x_0=1$ និង $y_0=-a$ ។ តាមលក្ខណៈ ដូចដែលយើងបានរៀបរាប់ពីខាងដើម យើងទាញរកស៊ីតនៃចំលើយ (x_n,y_n) ដែល

$(x_0,y_0);\ |y_0|>|x_0| \Rightarrow (x_1,y_1=y_0)$ ដោយ $x_1>y_1\geq x_0$

$(x_1,y_1);|x_1|>|y_1| \Rightarrow (x_2=x_1,y_2)$ ដោយ $y_2>x_2\geq y_1$

$(x_2,y_2);|y_2|>|x_2| \Rightarrow (x_3,y_3=y_2)$ ដោយ $x_3>y_3\geq x_2$

....

$x_0<x_1=x_2<x_3........$

លក្ខខណ្ឌចុងក្រោយនេះ ធានាថា ចំលើយទាំងអស់របស់សមីការខុសគ្នាពីរៗ។ ក្នុងករណីនេះសមីការមានរឹសច្រើនរាប់មិនអស់។

បើ $a=2$ សមីការសរសេរទៅជា $(x-y)^2=1$ មានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់។

ដូចគ្នាករណី $a=-2$ ។

បើ $a=1$ នោះសមីការ ទៅជា $x^2+y^2=1-xy$ និង $(x+y)^2=1+xy$ ។ បណ្តាចំនួន $1-xy$ និង $1+xy$ ត្រូវតែជាចំនួនវិជ្ជមាន ដូច្នេះវាមិនអាចធ្វើអោយសមីការមានរឹស(x,y) រាប់មិនអស់ទេ។ ដូចគ្នា ពេល $a=-1$ ។

ជាចុងក្រោយ បើ $a=0$ នោះសមីការមានចំលើយចំនួនកំនត់។

ដូច្នេះ ដើម្បីអោយសមីការមានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់ សំណុំចំនួនគត់ a ត្រូវតែ $|a|\geq 2$ ។

170.▲ យើងឃើញថា សមីការមាន រឹស $(0,0,0)$ ។សន្មតថា សមីការមានចំលើយផ្សេងទៀត។ តាង (x,y,z) ជាចំលើយតូចបំផុតរបស់សមីការដែលខុសពីសូន្យ។ បើ 7 ចែកដាច់ x រឺ y នោះ 7 ត្រូវតែចែកដាច់ x និង y ដូច្នេះ x^2+y^2 ចែកដាច់នឹង 7^2 ។ ដូច្នេះ 7 ចែកដាច់ z ។ តាង $x=7x_1;\ y=7y_1;\ z=7z_1$ ។ ដូច្នេះ ${x_1}^2+{y_1}^2=7{z_1}^2$ ។ ដូច្នេះ (x_1,y_1,z_1) តូចជាង (x,y,z) ក៏ជាចំលើយសមីការដែរ។ ករណីនេះផ្ទុយពីការសន្មតដែល (x,y,z) ជាចំលើយតូចបំផុត។ ដូច្នេះ x និង y ត្រូវតែបឋមនឹង 7 ។ ដូច្នេះ

$$x^2+y^2\equiv 0 \pmod 7$$

$$\Rightarrow \quad x^2\equiv -y^2 \pmod 7$$

ដោយ y បឋមនឹង 7 នោះគេអាចរកបាន y' និង β ដែល $yy'+7\beta=1$ ។ ដូច្នេះ $yy'\equiv 1(\bmod 7)$ ។
ដូច្នេះ $(xy')^2\equiv -1(\bmod 7)$ ។ តែចំនួនការេ មិនអាចសមមូលនឹង -1 តាម៧ ទេ។
ដូច្នេះសមីការមានចំលើយតែមួយគត់គឺ $(0,0,0)$ ។

171.▲ក) យើងអាចសន្មតថា $a\le b\le c$ ។ យើងទាញបាន $\frac{1}{4}\le\frac{3}{a^2}$ ដូច្នេះ $a^2\le 12$ ។ ដូច្នេះ $a=1, a=2$ រឺ $a=3$ ។ a មិនអាចស្មើ ១រឺ ២ ទេ។ បើ $a=3$ សមីការទៅជា

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$$

ដូចគ្នា យើងអាចបង្ហាញថា $b^2\le\frac{72}{5}$ ដូច្នេះ $b=3$ ។ នាំអោយ $c=6$ ។
ដូច្នេះ ចំលើយរបស់សមីការ គឺ $(3,3,6),(3,6,3)$ និង $(6,3,3)$ ។
ខ) ដូចខាងលើដែរ យើងអាចបង្ហាញថា $n=2$ និង $n=3$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ។ ចំពោះ $n=4$ យើងយក $x_1=x_2=x_3=x_4=2$ ។
យើងនឹងបង្ហាញថា $n=5$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ។ ព្រោះបើ (a,b,c,d,e) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ដោយ $a\le b\le c\le d\le e$ នោះ យើងទាញបាន $1<a^2\le 5$ ដូច្នេះ $a=2$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន $b=2, c=2, d=2$ រួចហើយ $\frac{1}{e^2}=0$ មិនអាច។
ដោយដឹងថា $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=\frac{1}{4}$ នោះ $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$
ដូច្នេះ $(2,2,2,3,3,6)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការករណី $n=6$ ។
យើងមាន $\frac{1}{6^2}=\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{18^2}$ ដូច្នេះ $(2,2,2,3,3,9,9,18)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការករណី $n=8$ ។
យើងដឹងថា បើ $(x_1,\dots,x_n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ នោះ $(2x_1,2x_1,2x_1,2x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការដែរ មានន័យថា បើ n ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ នោះ $n+3$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ដែរ។
ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនគត់ n ខុសពី ២, ៣ និង ៥ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

172.▲តាង (a,b,c,d) ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a^2+5b^2=2c^2+2cd+3d^2=2\left(c+\frac{d}{2}\right)^2+\frac{5}{2}d^2$$

សន្មតថា (a,b,c,d) ជាសំនុំចំលើយដែលតូចជាងគេ។

ដោយគុណអង្គទាំង២នឹង៤

$$4a^2+20b^2=2(2c+d)^2+10d^2$$

គណនាសមមូលតាម ៥ សមីការនេះទៅជា

$$4a^2\equiv 2(2c+d)^2\pmod 5$$

ដោយចំនួនការេ តាម៥ សមមូលនឹង 0,១ និង -1 នោះ

$$4a^2\equiv 0,1,4\pmod 5 \text{ និង } 2(2c+d)^2\equiv 0,2,3\pmod 5$$

ដូច្នេះ $4a^2\equiv 0\pmod 5$ និង $2(2c+d)^2\equiv 0\pmod 5$ ។ ដូច្នេះ a និង $2c+d$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង5 ។ តែថា

$$4a^2-2(2c+d)^2=10d^2-20b^2$$

អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង២៥ ដូច្នេះ $d^2\equiv 2b^2\pmod 5$ ។ យើងមាន $d^2\equiv 0,1,4\pmod 5$ និង $2b^2\equiv 0,2,8\pmod 5$ ។ ដូច្នេះ $d^2\equiv 0\pmod 5$ និង $2b^2\equiv 0\pmod 5$ ។ ដូច្នេះ ៥ត្រូវតែចែកដាច់ b និង d ។ ដូច្នេះ 5 ចែកដាច់ a,b,c,d ដូច្នេះ $(a/5,b/5,c/5,d/5)$ ជាចំលើយមួយទៀតរបស់សមីការដែលតូចជាងមុន។ ករណីនេះផ្ទុយពីសន្មតិ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយផ្សេងពីសូន្យទេ។

173.▲ យើងមាន

$$2002^{2002}=2002^{2001}.2002\;=\left(2002^{667}\right)^3.\left(10^3+10^3+1^3+1^3\right)$$

ដូច្នេះ 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកនៃ ៤ចំនួនគូប។ យើងមាន

$$2002^{2002}\equiv 4^{2002}\equiv 4^{6.333+4}\equiv 4^4\equiv 4\pmod 9$$

ព្រោះ $\phi(9)=6$ ។ តែថាបណ្ដាចំនួនគូប តាម៩ សមមូលនឹង $0,1,-1$ ដូច្នេះយើងទាញបានថា ផលបូកនៃ៣ចំនួនគូបរឺតិចជាងនេះ មិនអាចសមមូលនឹង៤ តាម ៩ ទេ។

ដូច្នេះ $t=4$ ។

174.▲ សមីការ

$$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=xyzuv-65$$

មានរឺសងាយ $(1,2,3,4,5)$ ព្រោះ

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55=1.2.3.4.5-65$$

សន្មតថាសមីការមានចំលើយផ្សេងទៀត (x,y,z,u,v) ។ សន្មតថា x តូចជាងគេ។

យើងសរសេរសមីការដែលអោយជាសមីការដឺក្រេទី២ធៀបនឹង x ។ យើងទាញបានថា បើ x ជាឫសមួយ នោះ $(yzuv-x,y,z,u,v)$ ជាចំលើយមួយទៀត។ យើងមាន $yzuv \geq 8y \geq 8x$ ដូច្នេះ $yzuv-x \geq 7x > x$ ជាចំលើយមួយទៀតដែលធំជាងមុន។ បន្ទាប់មកទៀត ចំពោះចំលើយថ្មីនេះ យើងជ្រើសរើសយកធាតុតូចជាងគេ រួចទាញរកចំលើយថ្មីមួយ ទៀតដែលធំជាងមុន។ ដូច្នេះជាបន្តបន្ទាប់ យើងទាញបានធាតុតូចជាងគេចេះតែកើនទៅៗ។ ដូច្នេះជាចុងក្រោយ នៅបន្ទាប់ពីប៉ុន្មានជំហានក្រោយមកយើងនឹងទាញបានចំលើយដែលមាន x,y,z,u,v ដែលនិមួយៗធំជាង 1998 ទាំងអស់។

175.{∅}▲ $x^n+1=y^{n+1}$

$$\Rightarrow \qquad x^n=(y-1)\left(1+y+\ldots+y^n\right) \qquad (*)$$

បើ p ជាតួចែកបឋមរបស់ $y-1$ នោះ p ចែកដាច់ x ហើយចែកមិនដាច់ $n+1$ ទេ ព្រោះវាបឋមនឹង x ។ តែយើងមាន

$$1+y+\ldots+y^n \equiv n+1\left(\bmod (y-1)\right)$$

ដូច្នេះ p ក៏ចែកមិនដាច់ $1+y+\ldots+y^n$ ដែរ។ ដូច្នេះ $y-1$ បឋមនឹង $1+y+\ldots+y^n$ ។ ដូច្នេះ តាមទំនាក់ទំនង (*) យើងទាញបាន $1+y+\ldots+y^n$ ជាចំនួនស្វ័យគុណទី n ។ តែវាមិនអាចមានទេ ព្រោះវាជាចំនួនគត់ស្ថិតនៅចន្លោះចំនួនស្វ័យគុណទី n ២តរៀងគ្នា y^n និង $(y+1)^n$ ដាច់ខាត ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

176.▲ បើ $a \geq b$ នោះ $a^{b^2}=b^a \leq a^a$ ដូច្នេះ $a \geq b^2$ ។ ដូច្នេះ $a^{2b^2}=b^{2a} \leq a^a$ ដូច្នេះ $a \geq 2b^2$ ។

តាង $x=\dfrac{a}{b^2}$ ហើយយើងនឹងបង្ហាញថា x ជាចំនួនគត់។ បន្ទាប់មកទៀត

$$x^{b^2}=\frac{a^{b^2}}{b^{2b^2}}=b^{a-2b^2}$$

ជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះយើងទាញបាន ថា x ជាចំនួនគត់ (ព្រោះវាជាចំនួនសនិទាន)។

យើងមាន $a=b^2x \Rightarrow b^a=b^{b^2x} \Rightarrow a^{b^2}=b^{b^2x} \Rightarrow a=b^x \Rightarrow x=b^{x-2}$

បើ $b=1$ យើងទាញបាន $x=1$ ។ បើ $b \geq 2$ នោះសមភាពមិនមានទេ ពេល $x>4$ ។ ចំពោះ $x=3$ យើងទាញបាន $b=3$ ហើយចំពោះ $x=4$ យើងទាញបាន $b=2$ ។ ចំលើយរបស់សមីការគឺ $(1,1)$, $(16,2)$, $(27,3)$ ។

បើ $a \le b$ នោះយើងមាន $a^{b^2} = b^a \le b^b$ ដូច្នេះ $a^b \le b$ វិសមភាពនេះមិនអាចពិតទេ បើ $a \ge 2$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានចំលើយសមីការ $(1,1)$ ។

ជាសរុបសមីការមានចំលើយ $(1,1), (16,2), (27,3)$ ។

177.▲ក) គ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 1$ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងអស់ លើកលែងតែករណី $n = 2$ ចេញ។ ព្រោះ បើ $n = 1$ យើងយក $a = b \ge 2$ ។ បើ $n \ge 3$ យើងយក $a = (n-1)^{n-1}$ និង $b = (n-1)^n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $n = 2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ។ តាមវិធីសាស្ត្រស្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត យើងសន្មតថា មានចំនួនគត់ $a, b \ge 2$ ដែល

$$\left(a^a\right)^2 = b^b \qquad (**)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនបឋមដែលចែក a ដាច់ សុទ្ធតែចែក b ដាច់ទាំងអស់។ យើងឃើញថា បើ $b \le a$ នោះ $b^b \le a^a < \left(a^a\right)^2$ ហើយ បើ $b \ge 2a$ នោះ $b^b \ge (2a)^{2a} = 2^{2a}\left(a^a\right)^2 > \left(a^a\right)^2$ ។ ដូច្នេះវាត្រូវតែ $a < b < 2a$ ។

តាង p ជាចំនួនបឋម ដែល ចែកដាច់ a ដូច្នេះចែកដាច់ b ដែរ។ តាង α (និង β រៀងគ្នា) ជានិទស្សន្តរបស់ p ក្នុងផលគុណកត្តាបឋមរបស់ a (និង b រៀងគ្នា) មានន័យថា $a = p^\alpha k, b = p^\beta l$ ។

$\left(a^a\right)^2 = b^b \Rightarrow a^{2a} = b^b \Rightarrow p^{2a\alpha} k^{2a} = p^{b\beta} l^b \Rightarrow 2a\alpha = b\beta$ មានន័យថា $\alpha / \beta = b / 2a < 1$

ដូច្នេះ $\alpha < \beta$ ។

បន្ទាប់មកទៀត ដោយដឹងថា គ្រប់ចំនួនបឋម ដែលចែកដាច់ a ក៏ចែក b ដាច់ដែរ ហើយ $\alpha < \beta$ នោះយើងទាញបានថា b ជាពហុគុណនៃ a តែវាមិនអាចព្រោះ $a < b < 2a$ ។ ដូច្នេះ $n = 2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់។

ខ) សមីការមានរឹសងាយ $(1,1)$ ។ សន្មតថា $a, b \ge 2$ ជាចំនួនគត់ ដែល

$$\left(a^a\right)^5 = b^b$$

តាមរបៀបស្រាយបញ្ជាក់ដូចក្នុងសំនួរក) យើងទាញបានថា $a < b < 5a$ ហើយថា a ចែកដាច់ b ។ ដូច្នេះ $b = ka$ ដែល $k \in \{2,3,4\}$ ។ សមីការទៅជា $a^{5a} = (ka)^{ka} \Rightarrow a^{5-k} = k^k$ ។ ចំពោះ $k = 2$ យើងមាន $a^3 = 4$ មិនអាច។ ចំពោះ $k = 3$ យើងទាញបាន $a^2 = 27$ មិនអាច។ ចំពោះ $k = 4$ យើងទាញបាន $a = 4^4$ បន្ទាប់មក $b = 4^5$ ។ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាវាជាចំលើយរបស់សមីការ។

ដូច្នេះសមីការមានចំលើយ $(1,1)$ និង $\left(4^4, 4^5\right)$ ។

178.▲តាង $x=zc$ និង $y=zb$ ដែល b និង c ជាចំនួនគត់បឋមនឹងគ្នា។ សមីការទៅជា

$$c+zb^2+z^2=z^2cb$$

យើងទាញបានថា z ចែកដាច់ c ដូច្នេះ $c=za$ ចំពោះចំនួនគត់ a ។ សមីការបំលែងទៅជា

$a+b^2+z=z^2ab$ ដូច្នេះ

$$a=\frac{b^2+z}{z^2b-1}$$

$$\Rightarrow \qquad z^2a=b+\frac{b+z^3}{z^2b-1}$$

$\Rightarrow$ តួ $\dfrac{b+z^3}{z^2b-1}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ ហើយដោយវាជាចំនួនវិជ្ជមាន (ធំជាងរឺស្មើ១) ហើយ ដូចនេះ

$b\le\dfrac{z^2-z+1}{z-1}$ ។ តំលៃរបស់ $\dfrac{z^2-z+1}{z-1}$ តូចជាង $z+1$ ដាច់ខាត ពេល $z\ge 3$ ។ ដូច្នេះ បើ $z\ge 3$ នោះ

$b\le z$ ហើយ ដូច្នេះ $a\le\dfrac{z^2+z}{z^2-1}<2$ ។ នាំអោយ $a=1$ ហើយសមីការទៅជា

$1+b^2+z=z^2b$

ជាសមីការដឺក្រេទី២ធៀបនឹង b ដែលមានឌីសគ្រីមីណង់ ស្មើ z^4-4z-4 ។ វាមិនអាចជាចំនួនការេបានទេ

ព្រោះ វាស្ថិតក្នុងចន្លោះ $\left(z^2-1\right)^2$ និង z^4 ដាច់ខាត។ ដូច្នេះយើងគ្មានចំលើយទេ។

ដូច្នេះនៅសល់ករណី $z=1$ និង $z=2$ ទៀត។ ចំពោះ $z=1$ យើងមាន

$$a=\frac{b^2+1}{b-1}=b+1+\frac{2}{b-1}$$

ដូច្នេះ $b=2$ រឺ $b=3$ ។ ដូច្នេះ យើងទទួលបានចំលើយ២គឺ $(x,y)=(5,2)$ រឺ $(x,y)=(5,3)$ ។

បើ $z=2$ យើងសរសេរ

$$16a=\frac{16b^2+32}{4b-1}=4b+1+\frac{33}{4b-1}$$

ដូច្នេះ $b=1$ រឺ $b=3$ ។ យើងទទួលបានចំលើយ ២ទៀត គឺ $(x,y)=(4,2)$ រឺ $(x,y)=(4,6)$ ។

ចំលើយគឺ $(5,2),(5,3),(4,2),(4,6)$ ។

179.▲ក) តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល $x^2+y^2=z^2$ និង $\dfrac{xy}{2}$ ជាចំនួនការេ។ សន្មតថា

x,y,z ជាចំលើយតូចបំផុត ដូច្នេះ ពួកបឋមរវាងគ្នាពីរៗ។ តាង

$$x=u^2-v^2;\ y=2uv;\ \text{នោះ}\ z=u^2+v^2$$

ដែល u និង v ជាចំនួនវិជ្ជមានដាច់ខាត និង បឋមនឹងគ្នា ហើយមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា។ ដូច្នេះក្រលាផ្ទៃត្រីកោណទៅជា $uv(u-v)(u+v)$ ។ ដោយ u និង v មានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា នោះ $u+v$ និង $u-v$ សេសទាំង២ ដូច្នេះបឋមនឹងគ្នាដែរ។ ដូច្នេះ កត្តាទាំង៤សុទ្ធតែបឋមនឹងគ្នា២ៗ ហើយនិមួយៗជាចំនួនការេ។ មានចំនួនគត់ a,b និង ចំនួនគត់សេស c,d ដែល

$$u=a^2;v=b^2;u+v=c^2;u-v=d^2$$

យើងមាន $2b^2=c^2-d^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ ដូច្នេះ b ជាចំនួនគូ។ តាង $b=2b'$ នោះ

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right)=2b'^2$$

ដូច្នេះត្រូវតែមានយ៉ាងហោចមួយក្នុងចំនោម $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ ជាចំនួនគូ។ ដោយ c និង d សេសទាំង២ នោះ មានតែមួយប៉ុណ្ណោះក្នុងចំនោម $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ ដែលជាចំនួនគូ។

បើ ចំនួននោះ ជា $\frac{c+d}{2}$ នោះ

$$\left(\frac{c+d}{4}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right)=b'^2$$

ដោយ $\left(\frac{c+d}{4}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ បឋមនឹងគ្នា នោះ មាន r,s ដែល

$$c+d=4s^2;c-d=2r^2$$

យើងឃើញថា $a^2=r^4+4s^4$ ដូច្នេះ ត្រីធាតុ $\left(r^2,2s^2,a\right)$ ជាចំលើយមួយទៀត ដែល $a<z$ ។ ផ្ទុយពីសន្មតិ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

ខ) តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល

$$x^4-y^4=z^2$$

តាង $X=x^4-y^4,Y=2x^2y^2$ និង $Z=x^4+y^4$ ។ ដូច្នេះ X,Y និង Z ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណកែងមួយដែលមានក្រលាផ្ទៃជាចំនួនការេ។ តាមសំនួរក) ករណីនេះអាចទៅរួចលុះត្រាតែ $X=0$ នាំអោយ $x=y$ និង $z=0$ ។ តែនេះមិនមែនជាចំលើយដែលអាចយកបានទេ។ ដូច្នេះចំនោទគ្មានចំលើយ។

180.▲បើ d ជាតួចែករួមរបស់ x និង y នោះ d^2 ចែកដាច់ x^2+y^2 ដូច្នេះ ចែកដាច់ z^2 ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ z ហើយ d ជាតួចែករួមរបស់ x,y,z ។ តាមសម្មតិកម្ម $d=1$ ។ ដូច្នេះ x,y បឋមនឹងគ្នា។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន x,y,z បឋមនឹងគ្នា២ៗ។

បើ x និង y សេសទាំង២ នោះ យើងមាន $x^2 \equiv y^2 \equiv 1(\bmod 4)$ ដូច្នេះ $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2(\bmod 4)$ មិនអាច។ ដូច្នេះត្រូវតែមានមួយជាចំនួនគូ។ សន្មតថា x ជាចំនួនគូ។ យើងសរសេរជា $x = 2x'$ ។

សមីការទៅជា

$$4x'^2 = (z-y)(z+y)$$

កត្តាទាំង២ $z-y$ និង $z+y$ មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ដូច្នេះគូទាំង២ដូចគ្នា។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ d ជាតួចែករួមរបស់ $z-y$ និង $z+y$ នោះ d ចែកដាច់ផលបូកនិងផលសងនៃចំនួនទាំង២ មានន័យថា ចែកដាច់ $2z$ និង $2y$ ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់២ ព្រោះ y,z បឋមនឹងគ្នា។ មានន័យថា $d=1$ ឬ 2 ដូច្នេះ ចំនួនគត់ $\frac{z-y}{2}$ និង $\frac{z+y}{2}$ ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ ដោយផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំង២

$$\frac{z-y}{2} = m^2 \text{ និង } \frac{z+y}{2} = n^2$$

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា m,n ។ ដោយជំនួសចូលក្នុងសមីការ យើងទាញបាន $x^2 = 4m^2n^2$ នាំអោយ $x = 2mn$ (ព្រោះសន្មតថា x វិជ្ជមាន) ។

ជាបញ្ចប់ m និង n មានលក្ខណៈគូសេសខុសគ្នា ព្រោះបើសិនជាដូចគ្នា នោះ y,z នឹងជាចំនួនគូទាំង២។

181.▲សន្មតថា ត្រីធាតុបែបនោះមាន។ ក្នុងចំនោមចំលើយទាំងនោះ យើងយក (x,y,z) ដែល $d = PGCD(x,y,z) = 1$ រឺក៏ជាចំលើយដែលតូចជាងគេបង្អស់។ នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌអស់នេះ តាមទ្រឹស្តីបទ **ត្រីធាតុពីតាករ** នោះគេមានចំនួនគត់ m,n ដែលបឋមនឹងគ្នា ដែល

$$x^2 = 2mn; y^2 = m^2 - n^2; z = m^2 + n^2$$

ដូច្នេះ $m^2 = n^2 + y^2$ និង ចំនួនគត់ m,n,y មានតួចែករួមស្មើ១។ ម្យ៉ាងវិញទៀត y ជាចំនួនសេស (ព្រោះ x ជាចំនួនគូ) ហើយដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទដដែល គេមាន២ចំនួនបឋមនឹងគ្នា u,v ដែល

$$u = x'^2; v = y'^2; u^2 + v^2 = z'^2$$

យើងទាញបានថា $x'^4 + y'^4 = z'^2$ ដែល $x' < x; y' < y; z' < z$ ។ ដូច្នេះវាផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា x,y,z ជាចំលើយវិជ្ជមានដែលតូចជាងគេ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយគត់វិជ្ជមានទេ។

182.▲ចំណោទនេះសមមូលនឹង ការកំនត់គ្រប់ចំនុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន នៅលើរង្វង់មួយ ដែលមានកាំឯកតា។ នៅលើរង្វង់នេះ យើងយកចំនុច $A(1,0)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន។ យើងគូស បន្ទាត់ Δ មួយ(មិនឈរ)កាត់តាម A បន្ទាត់នេះកាត់រង្វង់ត្រង់ចំនុច B មួយទៀត។

តាមពិតទៅចំនុច B មានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន លុះត្រាតែ មេគុណប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់នេះជាចំនួនសនិទាន។ ព្រោះ បើ Δ មិនមែនជាបន្ទាត់ឈរទេ សមីការបន្ទាត់ Δ មានរាង $y=t(x-1)$ ។ ចំនុចប្រសព្វរវាង Δ ជាមួយរង្វង់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2+y^2=1$$

$$y=t(x-1)$$

ដូច្នេះ

$$x^2+t^2(x-1)^2=1$$

$$\left(1+t^2\right)x^2-2xt^2+\left(t^2-1\right)=0$$

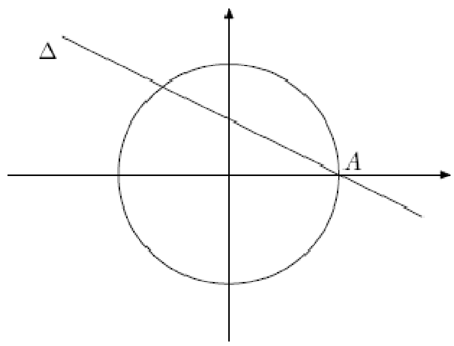
សមីការនេះមានរឺសមួយស្មើ $x=1$ ។ ផលបូករឺសទាំង២របស់សមីការ ស្មើ $\frac{2t^2}{1+t^2}$ ។ រឺសមួយទៀតមានតំលៃ

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

អរដោនេ y កំនត់ដោយ $y=t(x-1)=\frac{-2t}{t^2+1}$ ។ ចំនួនពីរនេះជាចំនួនសនិទានបើ t ជាចំនួនសនិទានដែរ។

ច្រាសមកវិញ យើងឃើញថា បើចំនុច A និង B មានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន នោះបន្ទាត់ (AB) ជាមេគុណប្រាប់ទិសជាចំនួនសនិទាន។ ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញថា គ្រប់ចំលើយសនិទាន ក្រៅពី $x=1, y=0$ កំនត់ដោយ

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1}; \qquad y=\frac{-2t}{t^2+1}$$



183.▲ យើងឃើញថា $x=1$ និង $y=0$ ជាចំលើយមួយ។ តាង t ជាចំនួនសនិទាន ដែល $y=t(x-1)$ ។ សមីការទៅជា

$$x^2+3t^2(x-1)^2=1$$

ចំលើយរបស់សមីការនេះគឺ $x=1$ និង $x=\frac{3t^2-1}{3t^2+1}$ ។ តំលៃ y ត្រូវគ្នា $y=-\frac{2t}{3t^2+1}$ ។ ជាបញ្ចប់ចំលើយរបស់សមីការគឺ

$$\left(\frac{3t^2-1}{3t^2+1},-\frac{2t}{3t^2+1}\right) \text{ និង } (1,0)$$

ចំពោះគ្រប់ t ជាចំនួនសនិទាន។

184.▲ យើងនឹងបង្ហាញថា សមីការនេះគ្មានរឹសទេ។ យើងដឹងថា $x-1<[x]\le x$ ។ ដូច្នេះ

$$x-1+2x-1+4x-1+...+32x-1<[x]+[2x]+$$

$$[4x]+[8x]+[16x]+[32x]\le x+2x+4x+...+32x$$

យើងទាញបាន $63x-6<12345\le 63x$ ។ ដូច្នេះ $195<x<196$ ។

យើងសរសេរ x នៅក្នុងគោល២

$x=195+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+...$ ដោយ $a_k=0$ រឺ 1។ ដូច្នេះ

$$[2x]=2.195+a_1$$

$$[4x]=4.195+2a_1+a_2$$

$$[8x]=8.195+4a_1+2a_2+a_3$$

$$[16x]=16.195+8a_1+4a_2+2a_3+a_4$$

$$[32x]=32.195+16a_1+8a_2+4a_3+2a_4+a_5$$

បូកសមភាពទាំងអស់នេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=63.195+31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=12345$$

ដូច្នេះ $31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=60$ ។ សមីការនេះមិនអាចមានចំលើយទេព្រោះ

$31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5\le 31+15+7+3+1=57<60$ ។

185.▲ ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា 2002^{2002} មិនមែនជាផលបូកនៃ គូបពកទេ។ យើងមាន

$2002\equiv 4(\bmod 9)$ ដូច្នេះ $2002^3\equiv 4^3\equiv 1(\bmod 9)$ ដូច្នេះ

$$2002^{2002}\equiv\left(2002^3\right)^{667}.2004\equiv 4(\bmod 9)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងមាន $x^3\equiv 0,\pm1(\bmod 9)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។ ដូច្នេះ $x_1^3+x_2^3+x_3^3\not\equiv 4(\bmod 9)$ ។

ដូច្នេះ 2002^{2002} មិនមែនជាផលបូកនៃ គូបពកទេ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា 2002^{2002} អាចជាផលបូកនៃគូប៤។ យើងមាន

$$2002=10^3+10^3+1^3+1^3$$

និង $$2002=667.3+1$$

ដូច្នេះ

$$2002^{2002}=2002.\left(2002^{667}\right)^3$$

$$=\left(10.2002^{667}\right)^3+\left(10.2002^{667}\right)^3+\left(2002^{667}\right)^3+\left(2002^{667}\right)^3$$

ដូច្នេះ $k=4$ ។

186.▲ $[a]=[b]$ លុះត្រាតែ $\exists k\in\mathbb{Z}$ ដែល $a,b\in[k,k+1)$ និងច្រាសមកវិញ ហើយករណីនេះកើតមាន

តែចំពោះ $|a-b|<1$ ប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ សមីការដែលអោយមានរឹស លុះត្រាតែ $\left|x^2-2x-2\right|<1$ ។ វិសមភាព

នេះមានចំលើយ

$$x\in\left(-1,\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right]\cup\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right),\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right)\right)$$

187.▲ យើងមាន $(2x-3)(2x-17)=4x^2-40x+51\le 4x^2-40[x]+51=0$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} \le x \le \frac{17}{2}$ និង $1 \le [x] \le 8$ ។ ដូច្នេះ

$$x = \frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$$

ដូច្នេះ ត្រូវតែ $\quad [x] = \frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$

សាក $[x] \in \{1,2,3,..,8\}$ ម្តងមួយៗ យើងឃើញថា មានតែ $[x] = 2,6,7,8$ ប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ ចំលើយរបស់ x គឺ $\frac{\sqrt{29}}{2};\frac{\sqrt{189}}{2};\frac{\sqrt{229}}{2};\frac{\sqrt{269}}{2}$ ។ ច្រាសមកវិញ យើងយកចំលើយទាំងនេះ ទៅផ្ទៀងផ្ទាត់សារឡើងវិញក្នុងសមីការ យើងនឹងឃើញថា វីសទាំងនេះជាចំលើយពិតប្រាកដ។

188.▲យើងមាន $x = [x] + \{x\}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ បូកអង្គនិងអង្គនៃសមីការ

$$2x + 2y + 2z = 568.9 \text{ រឺ } x + y + z = 284.45$$

ជំនួសសមីការក្រោយនេះចូលក្នុងសមីការទាំង៣ដែលអោយ

$$\{y\} + [z] = 84.45$$

$$[x] + \{z\} = 94.35$$

$$\{x\} + [y] = 105.65$$

$\Rightarrow \quad 84 = [84.45] = [\{y\} + [z]] = [z]$ ដូច្នេះ $[z] = 84$ និង $\{y\} = 0.45$ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $[y] = 105 \Rightarrow y = 105.45$ ។ ដូចគ្នា $x = 94.65$ និង $z = 84.35$ ។

189.▲សមីការដែលចំលើយរបស់វាជាចំនួនគត់ហៅថា**សមីការដ្យូផង់**។ យើងឃើញថា សមីការដ្យូផង់

$$ax + by = c$$

មានចំលើយជាចំនួនគត់ តែក្នុងករណី$(a,b)\,|\,c$ ប៉ុណ្ណោះ។ ប្រមាណវិធីរបស់អឺគ្លីដជាមធ្យោបាយដ៏មានប្រសិទ្ធិភាពមួយ ក្នុងការស្វែងរកចំលើយរបស់សមីការនេះ។

យើងមាន

$$1 = 6 - 1.5$$

$$5 = 23 - 3.6$$

$$6 = 29.1 - 23$$

ដូច្នេះ

$1=6-1.5$

$1=6-1.(23-3.6)$

$1=4.6-1.23$

$1=4.(29.1-23)-1.23$

$1=4.29-5.23$

ដូច្នេះចំលើយរបស់សមីការនេះ គឺ $x_0=-5, y_0=4$ ។ យើងឃើញថា

$x=-5+29t, y=4-23t, t\in\mathbb{Z}$

ក៏ជាចំលើយរបស់សមីការនេះដែរ។

190.▲ យើងមាន

$23(-5)+29(4)=1$

គុណអង្គសង្ខាងនៃសមីការនឹង 7 យើងទាញបាន

$23(-35)+29(28)=7$

ដូច្នេះ $x=-35+29t, y=28-23t, t\in\mathbb{Z}$ ។

191.▲ ដោយ $(3456,246)=2$ មានន័យថា អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង 2 តែអង្គខាងស្តាំចែកមិនដាច់នឹង២

ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយជាចំនួនគត់។

192.▲ យើងមាន $3456(-1)+246(15)=234$ ។

យើងទាញបាន $x=-1+123t, y=15-1728t, t\in\mathbb{Z}$ ។

193.▲ $m^5+3m^4n-5m^3n^2-15m^2n^3+4mn^4+12n^5$

$=(m-2n)(m-n)(m+n)(m+2n)(m+3n)$

បើ $n\neq 0$ នោះ កត្តាផលគុណខាងលើខុសគ្នាទាំងអស់។ ដូច្នេះយើងមានទាំងអស់៥កត្តា។

យើងមាន $33=(-11)(3)(1)(-1)$ មានន័យថា 33 អាចបំបែកបានជាផលគុណនៃយ៉ាងច្រើន៤ចំនួនគត់ផ្សេងគ្នា។ វាមិនអាចស្មើគ្នាទេ។

បើ $n=0$ កន្សោមខាងលើទៅជា m^5 ហើយវាក៏មិនអាចស្មើ៣៣ដែរ។

194.▲ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a_i, 1 \le i \le k$ មានចំនួន k ។ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x_i = a_i - a_1, 2 \le i \le k$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ហើយមានចំនួនសរុប $k-1$ ។ សំនុំ $\{a_i, x_i\}$ មានធាតុសរុបចំនួន $2k-1 > n$ បើ $k \ge \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ។ ធាតុនិមួយៗនៃសំនុំនេះ មានតំលៃធំមិនលើសពី n ទេ ដូច្នេះវាត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុ២ដែលមានតំលៃស្មើគ្នា។ ដោយ x_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ និង a_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ដែរ នោះ ធាតុ២ដែលស្មើគ្នានោះ ត្រូវតែជា a_j ណាមួយ និង x_r ណាមួយ។ ដូច្នេះ $x_r = a_r - a_1 = a_j \Rightarrow 1 + a_j = a_r$ ។

ស្វ៊ីត $a_1 = [n/2]+1, a_2 = [n/2]+2, ..., a_k = n$ ដែល $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ។ យើងមាន $2a_1 = 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ ។ បើ $n = 2m$ នោះ $2a_1 = 2m+2 > n = 2m$ មិនអាចមានតួណាដែល $1 + a_j = a_r$ ។ បើ $n = 2m+1$ នោះ $2a_1 = 2m+2 > 2m+1 \Rightarrow$ មិនអាចមានតួណាដែល $1 + a_j = a_r$ ។ ដូច្នេះករណី $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ សមីការគ្មានចំលើយ។ ដូច្នេះហើយវាត្រូវតែ $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ។

195.▲ បើ $x^2 = 2 + 5y^2$ នោះ $x^2 \equiv 2 \pmod 5$ ។ ២ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់ទេ ដូច្នេះ វាមិនអាចសមមូលនឹងចំនួនការេមួយ $\pmod 5$ ទេ។

196.▲ ចំនួនគូបសមមូលនឹង $0,1,6 \pmod 7$ ។ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ សមមូលនឹង $1,2,4 \pmod 7$ ។

ដូច្នេះ $2^y + 15 \equiv 2,3,5 \bmod 7$ ។

ដូច្នេះអង្គទាំង២មិនអាចស្មើគ្នាទេ។

197.▲ គ្រប់ចំនួនស្វ័យគុណ៤ទាំងអស់ សមមូលនឹង 0រឺ១ ពេលចែកនឹង១៦។ មានន័យថា

$n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{14}^4$ យ៉ាងច្រើនសមមូលនឹង១៤ តាម១៦។ តែ $1599 \equiv 15 \bmod 16$ ។ ដូច្នេះ សមីការមិនអាចមានចំលើយទេ។

198.▲ យើងមាន

$$(b-a)(b+a) = b^2 - a^2 = \left(b^2 + bc\right) - \left(a^2 + ad\right) = 2^m b - 2^k a$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងមាន $k > m$ ព្រោះ $a + d > b + c$ ពីព្រោះ $a(a+d-b-c) = (a-b)(a-c) > 0$ ។

ដូច្នេះ $(b-a)(b+a)$ ជាពហុគុណ នៃ 2^m ។ ដោយ b សេស នោះ $(b-a)+(b+a) = 2b$ មិនមែនជាពហុ

គុណនៃ ៤ទេ ដូច្នេះ $b-a$ និង $b+a$ មិនអាចជាពហុគុណនៃ ៤ទាំង២បានទេ។ យើងទាញបានថា មានមួយក្នុងចំនោមចំនួនពីរនេះ ចែកដាច់នឹង 2^{m-1} ។ តែ

$$0<b-a<b<\frac{b+c}{2}=2^{m-1}$$

ដូច្នេះ មានតែ $(a+b)$ ជាពហុគុណ នៃ 2^{m-1} ។ យើងមានវិសមភាពមួយផ្សេងទៀត

$$b+a<b+c=2^m$$

ដូច្នេះ $b+a=2^{m-1}$ ។

បើ d ជាតួចែករួមរបស់ a និង របស់ b នោះ d ត្រូវតែចែកដាច់ $a+b$ ដូច្នេះវាត្រូវតែជាចំនួនស្វ័យគុណគោល២។ ដោយ a និង b សុទ្ធតែជាចំនួនសេសទាំង២ នោះ $d=1$ មានន័យថា a និង b បឋមនឹងគ្នា។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងបង្ហាញថា a និង c បឋមនឹងគ្នា ដោយដឹងថា

$c-a=(c+b)-(b+a)=2^m-2^{m-1}=2^{m-1}$ ។

ជាបញ្ចប់ a ចែកដាច់ bc ហើយបឋមនឹង b និង នឹង c ។ ដូច្នេះ $a=1$ ។

199.▲បើ $p=2$ នោះ $2^2+3^2=13^1$ សំនើពិត។

បើ $p>2$ នោះ p ជាចំនួនបឋមសេស។ ចំពោះចំនួនសេស p យើងមាន

$$2^p+3^p=5\left(2^{p-1}-3.2^{p-2}+...+3^{p-1}\right)$$

$\Rightarrow 5$ ចែកដាច់ $2^p+3^p=a^n$

បើ $n\geq 2$ នោះ 25 ក៏ចែកដាច់ $2^p+3^p=a^n$ ដែរ។ ដូច្នេះ $\left(2^{p-1}-3.2^{p-2}+...+3^{p-1}\right)$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ ដោយ $3\equiv -2(\bmod 5)$ ដូច្នេះ $\left(2^{p-1}-3.2^{p-2}+...+3^{p-1}\right)\equiv p2^{p-1}(\bmod 5)$

$\Rightarrow$ 5 ចែកដាច់ p មានន័យថា $p=5$ ។ តែ $2^5+3^5=275=5^2.11$ មិនមែនជាចំនួនស្វ័យគុណទេ។

ដូច្នេះ សំនើពិត។

200.▲យើងតាង(m,n)ជាគូតំលៃ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។ បើ $m=1$ នោះមានតែ $(1,1)$ និង $(1,2)$ ប៉ុណ្ណោះ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

ឥលូវយើងសន្មតថា $(m>1,n)$ ជាគូតំលៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

ដោយ $n(n-m)=m^2\pm 1>0$ នោះត្រូវតែ $n>m$ ។

តាង $k=m+n$ ។ ដូច្នេះ $k>n>m$ ហើយ

$$1=\left(n^2-nm-m^2\right)^2 \quad =\left(n^2-n(k-n)-(k-n)^2\right)^2$$

$$=\left(n^2-kn+n^2-k^2+2kn-n^2\right)^2$$
$$=\left(n^2-k^2+kn\right)^2$$
$$=\left(k^2-kn-n^2\right)^2$$

ដូច្នេះ (n,k) ក៏ជាគូតំលៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ។ ដូច្នេះ យើងមានគូតំលៃ (m,n)=(1,2);(2,3);(3,5);(5,8);(8,13);(13,21);(21,34);(34,55);(55,89);

(89,144);(144,233);(233,377);(377,610);(610,987);(987,1597);

(គូបន្ទាប់មកទៀត គឺ (1597,2584) មិនយកព្រោះមានតំលៃធំជាង ១៩៨១)។ ហើយតំលៃធំបំផុតរបស់ m^2+n^2 គឺ 1597^2+987^2។

តើយើងធ្វើដូចម្តេច ទើបដឹងថាគ្មានគូតំលៃ (m,n) ផ្សេងទៀត ក្រៅពីគូតំលៃខាងលើនេះ។ សន្មតថាមានគូតំលៃ $(m>1,n>1)$ ផ្សេងទៀត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ។ ដូច្នេះ $n>m$។ យើងតាង $k=n-m$ យើងអាចបង្ហាញថា (k,m) ក៏ជាគូតំលៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ។ មានន័យថា បើមាន (m,n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះ $(n-m,m)$ ក៏ ផ្ទៀងផ្ទាត់ដែរ ដូច្នេះមានបណ្តាគូតំលៃ(m,n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ និងមានតំលៃកាន់តែតូចទៅៗ ហើយត្រូវចប់នៅត្រឹម គូ $(1,n)$។ តែគូតំលៃ $(1,n)$ មានតែ $(1,1)$ រឺ $(1,2)$។ ដូច្នេះ មានន័យថា មិនអាចមានគូចំលើយ ណាក្រៅអំពី គូចំលើយ (m,n) ដែលបានរៀបរាប់ខាងលើទេ។

201.▲តាង $x=12^m-5^n$ ជាតំលៃតូចបំផុតដែលយើងត្រូវកំនត់។ យើងមាន $x\equiv-5^n\pmod 6$ ដូច្នេះ x ចែកមិនដាច់នឹង២ផង និងនឹង៣ផង។ ដូចគ្នាដែរ x ចែកមិនដាច់នឹង៥។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $x=1$ រឺក៏ $x\ge 7=12-5$។ ករណី $x=1$ មិនអាចទៅកើតទេ ព្រោះ

$$12^m-5^n\equiv-1\not\equiv1(\bmod 4)$$

ដូច្នេះ $x=7$ (ពេល $m=1$ និង $n=1$)។

202.▲សន្មតផ្ទុយទៅវិញថា សមីការមានរឹសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ដូច្នេះ $(x-y)(x+y)=1\Rightarrow$ $x-y=-1$ និង $x+y=-1$ រឺក៏ $x-y=1$ និង $x+y=1$។

ករណីទី១យើងទាញបាន $x=-1,y=0$ មិនយកព្រោះ x,y ត្រូវតែជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ករណីទី២ យើងទាញបាន $x=1,y=0$ មិនយកព្រោះ x,y ត្រូវតែជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន$(x,y\ge1)$។

203.▲សន្មតថា សមីការមានចំលើយ វិជ្ជមាន ខុសពីសូន្យ ផ្សេងទៀត ហើយយើងតាង (a,b,c) ជាចំលើយដែលតូចជាងគេ។

$a^6 + 2b^6 = 4c^6 \quad \Rightarrow \quad a$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $a = 2a_1$ ។

$2^5 a_1^6 + b^6 = 2c^6 \quad \Rightarrow \quad b$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $b = 2b_1$ ។

$2^4 a_1^6 + 2^5 b^6 = c^6 \quad \Rightarrow \quad c$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $c = 2c_1$ ។

$a_1^6 + 2b^6 = 4c_1^6$ យើងឃើញថា (a_1, b_1, c_1) ក៏ជាចំលើយរបស់សមីការនេះដែរ ដែល $a_1 < a, b_1 < b, c_1 < c$ ។ ដូច្នេះ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ ដូច្នេះ សមីការមិនមានចំលើយ ក្រៅពី $a = b = c = 0$ ទេ។

204.205.

206.▲ផលសងស្វ័យគុណនៃ p និង q ជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះត្រូវមានមួយគូ មួយសេស។ ដោយ p និង q សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះត្រូវតែមានមួយស្មើ២។ ជាដំបូងយើងសន្មតថា $q = 2$ ។ បន្ទាប់មកទៀត p ជាចំនួនបឋមសេស ដែល

$$p^r \pm 1 = 2^s$$

បើ r ជាចំនួនសេស នោះ

$$p^r - 1 = (p-1)\left(p^{r-1} + p^{r-2} + \ldots + 1\right)$$

$$p^r + 1 = (p+1)\left(p^{r-1} - p^{r-2} + \ldots + 1\right)$$

ដូច្នេះ $p^r \pm 1$ ជាពហុគុណនៃ

$$p^{r-1} \mp p^{r-2} + p^{r-3} \mp \ldots \mp p + 1$$

ដែលជាចំនួនសេសធំជាង១ជាច់ខាត។ ដូច្នេះវាមិនអាចជា 2^s ទេ។ យើងទាញបានថា r ជាចំនួនគូ។

តាង $r = 2t$ ។ ដូច្នេះ p^{2t} ជាការេនៃចំនួនសេស ដូច្នេះ វាសមមូលនឹង១ តាម ៤។ ដូច្នេះ $p^r + 1 \equiv 2 \pmod 4$ ហើយដូច្នេះ $p^r + 1 = 2^s$ នាំអោយ $s = 1$ ។ តំលៃ s យើងមិនយក ព្រោះ $s \geq 2$ ។

នៅសល់ករណី $p^{2t} - 1 = 2^s$ មួយទៀត។ ផលគុណ $\left(p^t - 1\right)\left(p^t + 1\right)$ ជាស្វ័យគុណនៃ ២ ដូច្នេះ កត្តានិមួយៗត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ២ដែរ។ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ចំនួន២ ដែលខុសគ្នា២ឯកតា មិនមានអ្វីក្រៅតែពី២និង៤ទេ។

ដូច្នេះ $p = 3, \; t = 1$ និង $s = 3$ ដូច្នេះ $r = 2$ ។

ដូច្នេះសមីការមានចំលើយ

$$p = 3, q = 2, r = 2, s = 3$$

និង $\quad p=2, q=3, r=3, s=2$

207.▲ តាង $a_n+b_n=\alpha+nr$ និង $a_nb_n=\beta+ns$ ចំពោះចំនួនគត់ α,β,r និង s ។ r និង s ជាផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីត (a_n+b_n) និង (a_nb_n) រៀងគ្នា។ បើ $r=0$ នោះ a_n+b_n ជាស្វ៊ីតថេរ។

ចំពោះគ្រប់ n គេមាន a_n និង b_n ជាចំលើយរបស់សមីការ

$$X^2-(\alpha+nr)X+(\beta+ns)=0$$

ដូច្នេះ ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta_n=(\alpha+nr)^2-4(\beta+ns)$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ការេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ ។ យើងមានសមភាព

$$r^2\Delta_n=\left(nr^2+\alpha r-2s\right)^2+d$$

ដែល $d=-4s^2+4rs\alpha-4\beta r^2$ មិនអាស្រ័យនឹង n ។ ដូច្នេះបើ $r\neq 0$ ចំពោះ n ធំគ្រប់គ្រាន់ណាមួយ នោះយើងមានវិសមភាព

$$\left(nr^2+\alpha r-2s-1\right)^2<r^2\Delta_n<\left(nr^2+\alpha r-2s+1\right)^2$$

តែដោយ $r^2\Delta_n$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ការេ ចំពោះគ្រប់ n (ទោះធំគ្រប់គ្រាន់រឺមិនគ្រប់គ្រាន់) នោះ

$$r^2\Delta_n=\left(nr^2+\alpha r-2s\right)^2$$

ដូច្នេះ $d=0$ ។ ដូច្នេះសមីការខាងលើ មានរឹស ស្មើនឹង $c=\frac{s}{r}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ n យើងមាន $a_n=c$ រឺ $b_n=c$ ។

208.▲ សន្មតថា $f(a/b)=0$ ដែល a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ នោះ

$$0=b^n f(a/b)=a_0b^n+a_1b^{n-1}a+\dots \quad +a_{n-1}ba^{n-1}+a_na^n \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ អង្គខាងស្តាំត្រូវតែចែកដាច់នឹង a និង នឹង b ។

ដោយ a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ដូច្នេះ a ត្រូវតែចែកដាច់ a_0 និង b ត្រូវតែចែកដាច់ a_n ។ ដោយ a_0, a_n សុទ្ធតែជាចំនួនសេស នោះ a និង b ត្រូវតែជាចំនួនសេសដែរ។ ដូច្នេះ

$$a_0b^n+a_1b^{n-1}a+\dots+a_{n-1}ba^{n-1}+a_na^n \qquad \equiv a_0+a_1+\dots+a_n \bmod 2$$

ដោយ $f(1)=a_0+a_1+\dots+a_n$ ជាចំនួនសេស នោះ

$$a_0+a_1+\dots+a_n\equiv 1 \bmod 2$$

ដូច្នេះ

$a_0b^n + a_1b^{n-1}a + ... + a_{n-1}ba^{n-1} + a_na^n \equiv 1 \bmod 2$ តែផ្ទុយពី (*) រឺផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ នាំអោយ a/b មិនអាចជារឺសទេ។ នាំអោយសមីការគ្មានរឺសសនិទាន។

209.▲ យើងមាន $7 = -7(1)(-1)$

សន្មតថា $p(x_k) - 7 = 0$ ចំពោះតំលៃខុសៗគ្នា នៃ $x_k, 1 \le k \le 4$ ។ នោះ

$$p(x) - 7 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)q(x)$$

ដែលក្នុងនោះ ពហុធា q មានមេគុណជាចំនួនគត់។ សន្មតថា មានចំនួនគត់ m ដែល $p(m) = 14$ ។ នោះ

$$7 = p(m) - 7 = (m - a_1)(m - a_2)(m - a_3)(m - a_4)q(m)$$

ដោយកត្តា $(m - x_k)$ មានតំលៃខុសគ្នាទាំងអស់ នោះ យើងបានបំបែក7 ជាផលគុណនៃយ៉ាងហោចណាស់៤ ចំនួនគត់ខុសគ្នាដែរ។ វាមិនអាច ព្រោះ7 ជាចំនួនបឋម អាចបំបែកបាន តែ២កត្តាប៉ុណ្ណោះ គឺ 7.1 ។