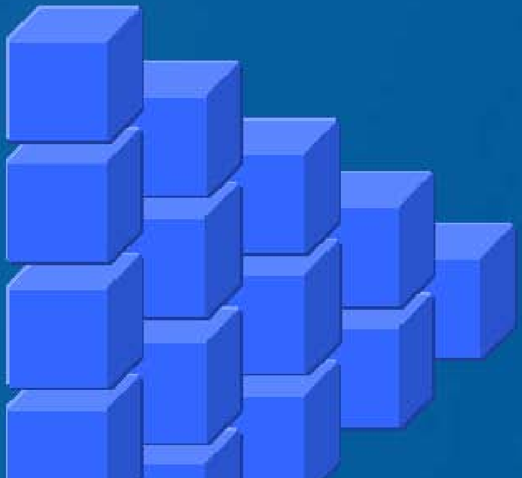
រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គន្លឹះ ធរណីមាត្រ

បន្ទាត់ ប្លង់ និង ស្វ៊ែក្នុងលំហ

១១

រួមមាន



- មេរៀនសង្ខេប
- របៀបដោះស្រាយ
- ឧទាហរណ៍គំរូ
- លំហាត់អនុវត្តន៍

រក្សាសិទ្ធិ

ជំពូកទី១

មេរៀនសង្ខេប

១-វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក/ និយមន័យ

អង្កត់មានទិសដៅ **AB** នៅក្នុងលំហហៅថាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហដែលមាន **A** ជាគល់និង **B** ជាចុង។

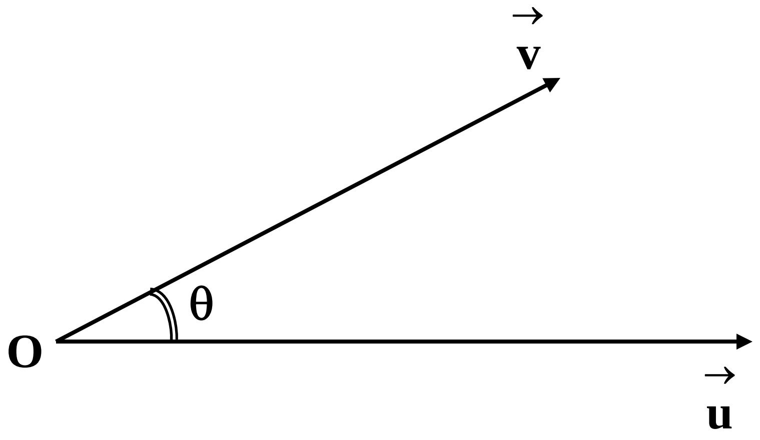
គេកំនត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{AB}$ ។

ខ/ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ចំពោះគ្រប់ចំនុច **P** មានត្រីធាតុ (a,b,c) តែមួយគត់ដែល $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{OP}=a.\vec{i}+b.\vec{j}+c.\vec{k}$ ។ ត្រីធាតុ (a,b,c) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំនុច **P** ដែលគេសរសេរ $P(a,b,c)$ ។

២-ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក/ និយមន័យ

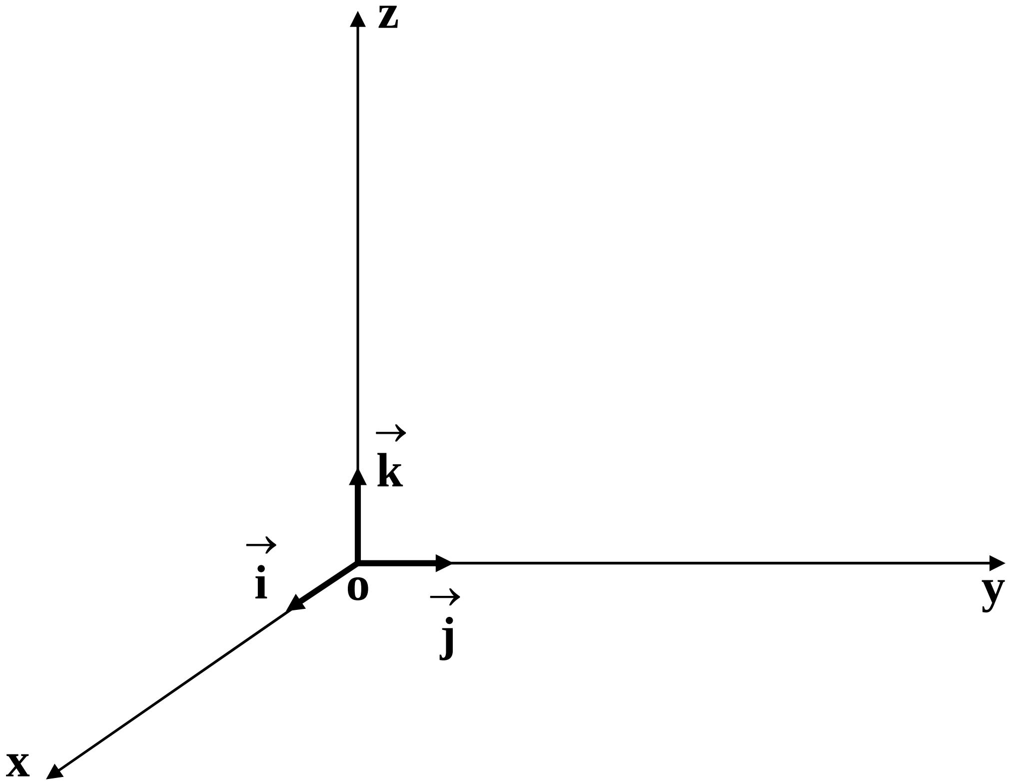


- ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាចំនួនពិត កំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta$ ។

  (θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$)

- បើ $\vec{u} = 0$ ឬ $\vec{v} = 0$ នោះ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ។

ខ/គោល និង តម្រុយអរត្តូណរម៉ាល់



គេហៅគោលអរត្តូណរម៉ាល់នៃវ៉ិចទ័រ គឺគ្រប់ត្រីធាតុ

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែល $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

និង $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ ។

គ/ ទ្រឹស្តីបទ

ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហាផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2\,,y_2\,,z_2)$ គឺជាចំនួនពិតកំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ ។

ឃ/ ក្ដូរលែ

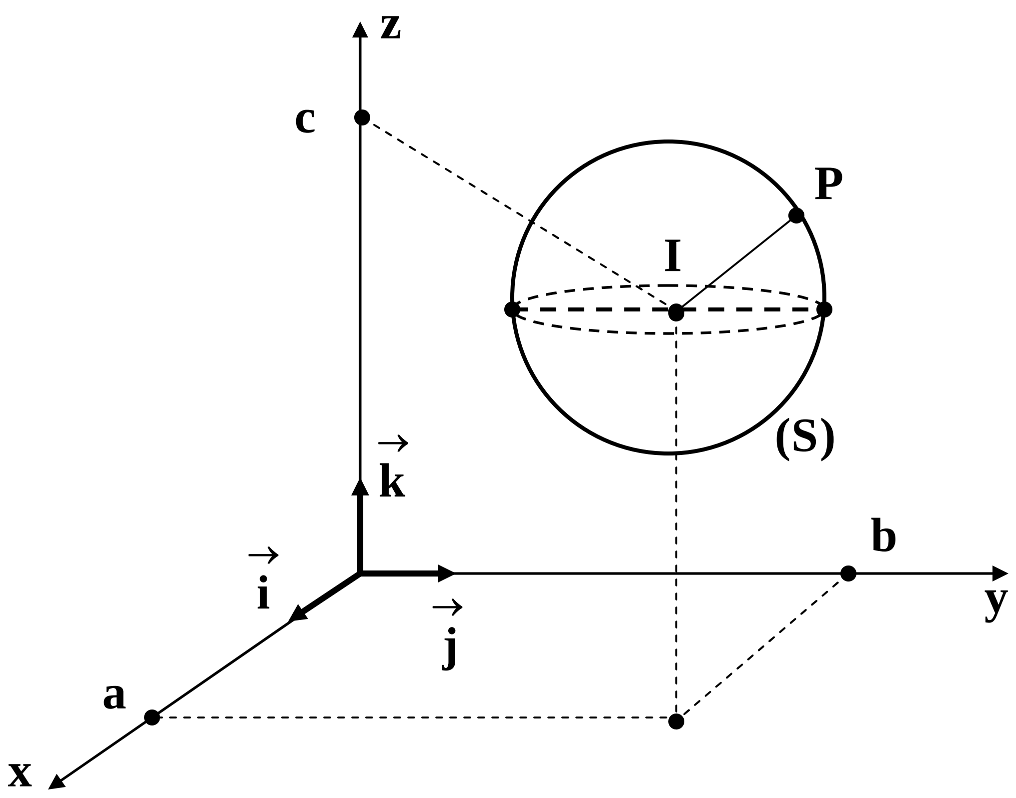
-ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2\,,y_2\,,z_2)$ អរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតតែ $\vec{u}.\vec{v}=0$ បានន័យថា $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ ។

-ស្កាលែ និង ណាមនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(a,b,c)$ កំនត់ដោយ $(\vec{u})^2=a^2+b^2+c^2$ និង $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ។

-មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2\,,y_2\,,z_2)$ កំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

ឬ $\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}.\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$ ។

៣-សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ

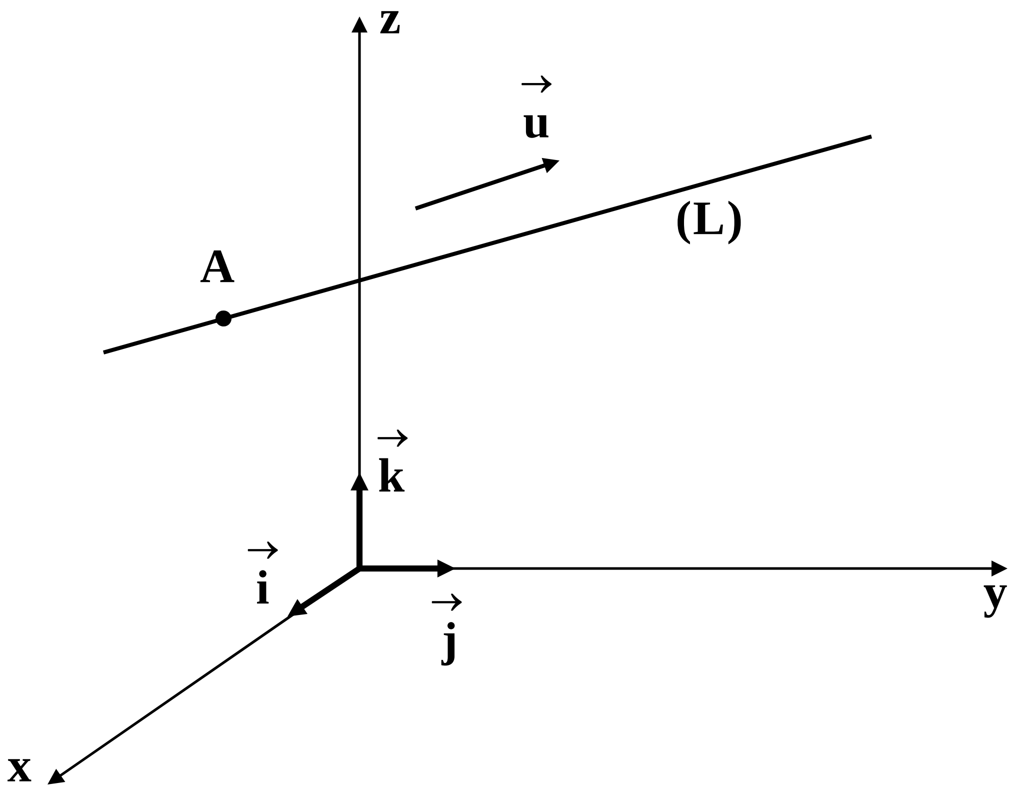


និយមន័យ

សំណុំនៃចំនុច $P(x, y, z)$ ដែលមានចម្ងាយថេរស្មើ R ពីចំនុចនឹង $I(a; b; c)$ ហៅថាស្វ៊ែផ្ចិត I កាំ R។ សមីការរបស់ស្វ៊ែនេះគឺ

$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ ។

៨-សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ



សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច $A(x_A , y_A , z_A)$ ហើយមានវិុចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(a , b , c)$ កំនត់ដោយ

$$(L):\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \quad ; \ t \in IR \end{cases}$$

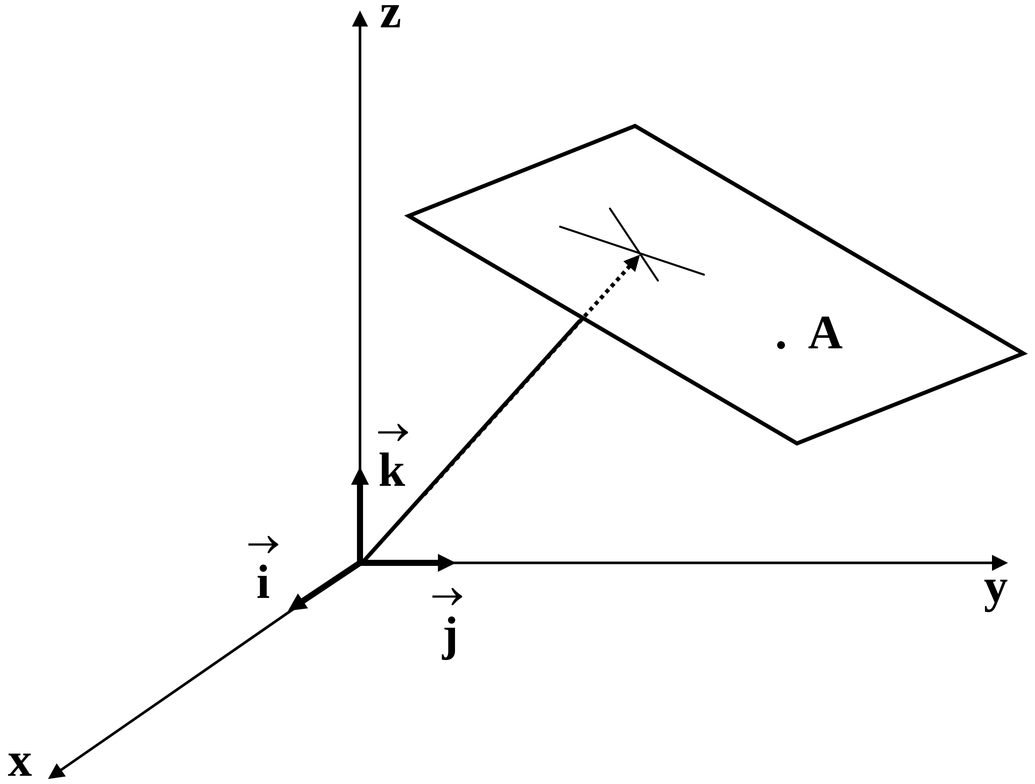
(ហៅថាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត)

$$(L): \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

(ហៅថាសមីការឆ្លុះ)

៥-សមីការប្លង់ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់

ក/សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយនិងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មួយ

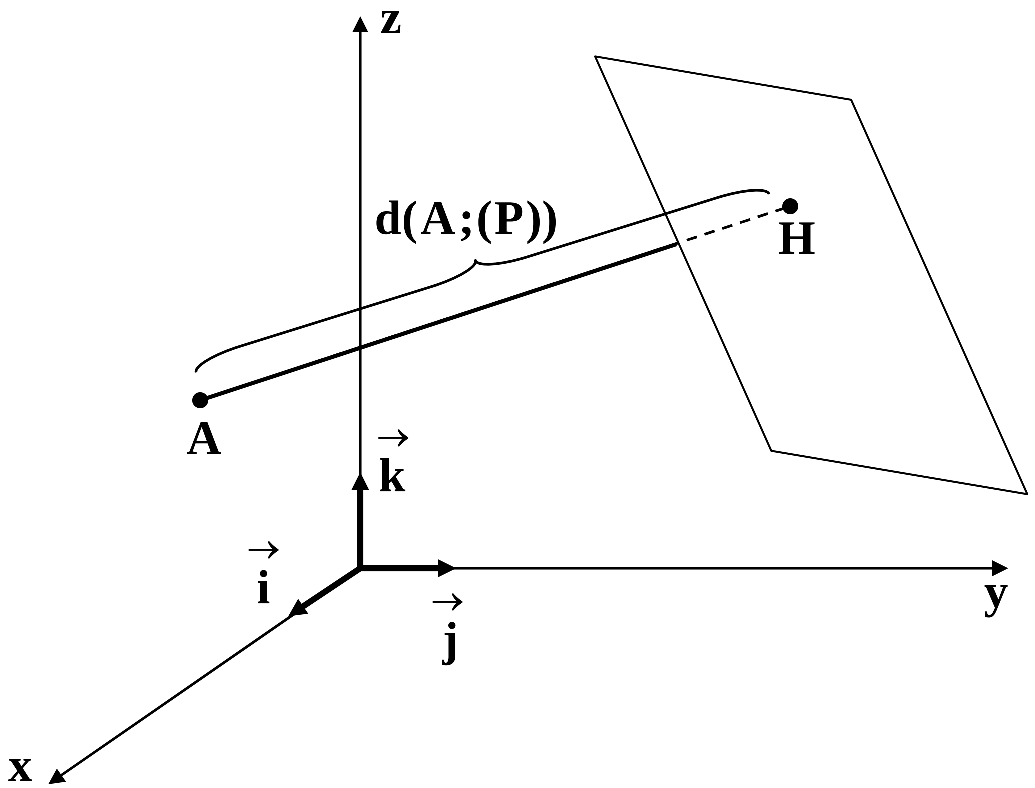


សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុច $A(x_A , y_A , z_A)$ ហើយមាន

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(a; b ; c)$ កំនត់ដោយ

$$(P) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$ ។

ខ/ចម្ងាយពីចំនុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ

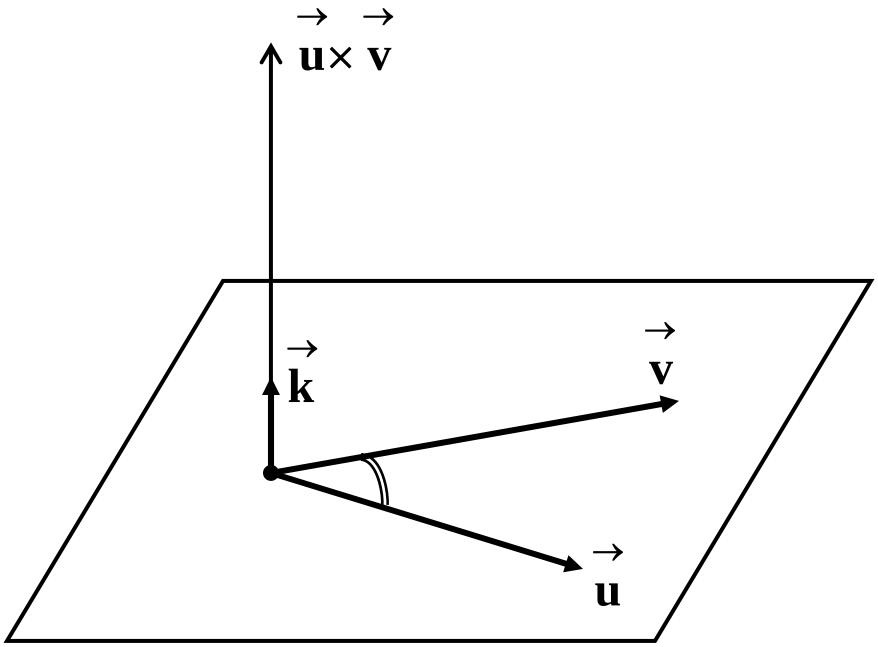


ចម្ងាយពីចំណុច $A(x_A\ ;y_A\ ;z_A)$ ទៅប្លង់ (P) ដែលមានសមីការ $ax+by+cz+d=0$ កំនត់ដោយ

$$d(A\ ;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ។

៦-ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក/និយមន័យ



បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រពីរនៅក្នុងលំហ ។

ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រមួយដែល

កំណត់តាងដោយ $\vec{u}\times\vec{v}$ ឬ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ កំនត់ដោយ

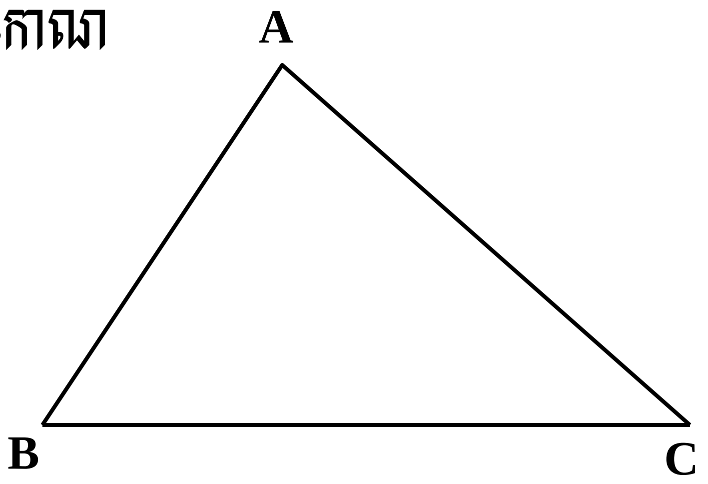
$$\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sin\theta\,.\vec{k}$$

និង $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sin\theta$

ដែល θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

៧-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ និង ប្រលេឡូក្រាម

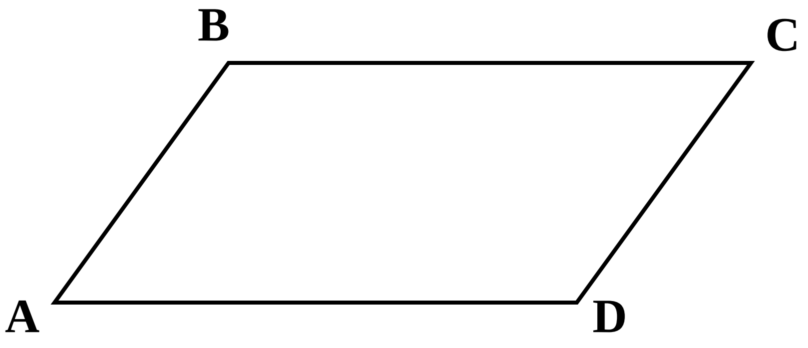
ក/ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ



ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ **ABC** កំនត់ដោយ

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|$$

ខ/ ផ្ទៃក្រឡា ប្រលេឡូក្រាម



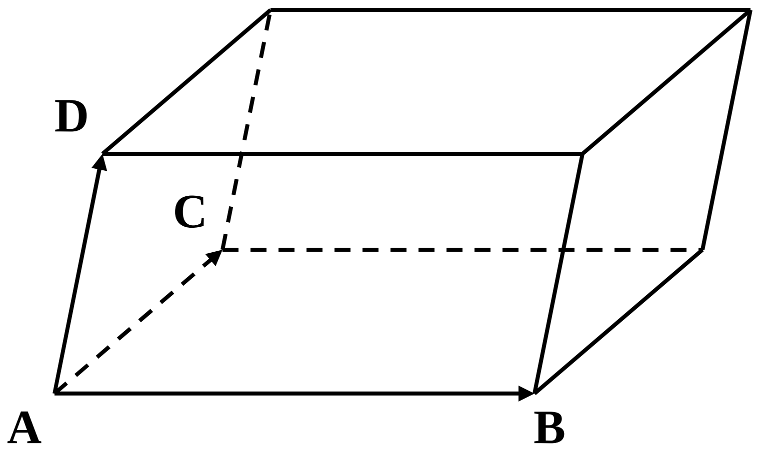
ក្រឡាផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាម **ABCD** កំនត់ដោយ

$$S_{ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}|$$

៨-មាឌប្រលេពីប៉ែត និង មាឌតេត្រាអ៊ែត

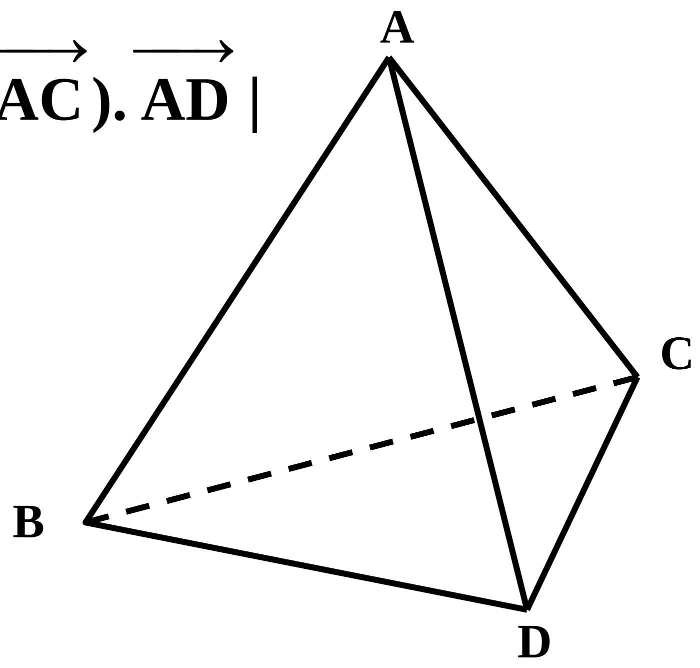
ក/មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត កំនត់ដោយ

$$V = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|$$

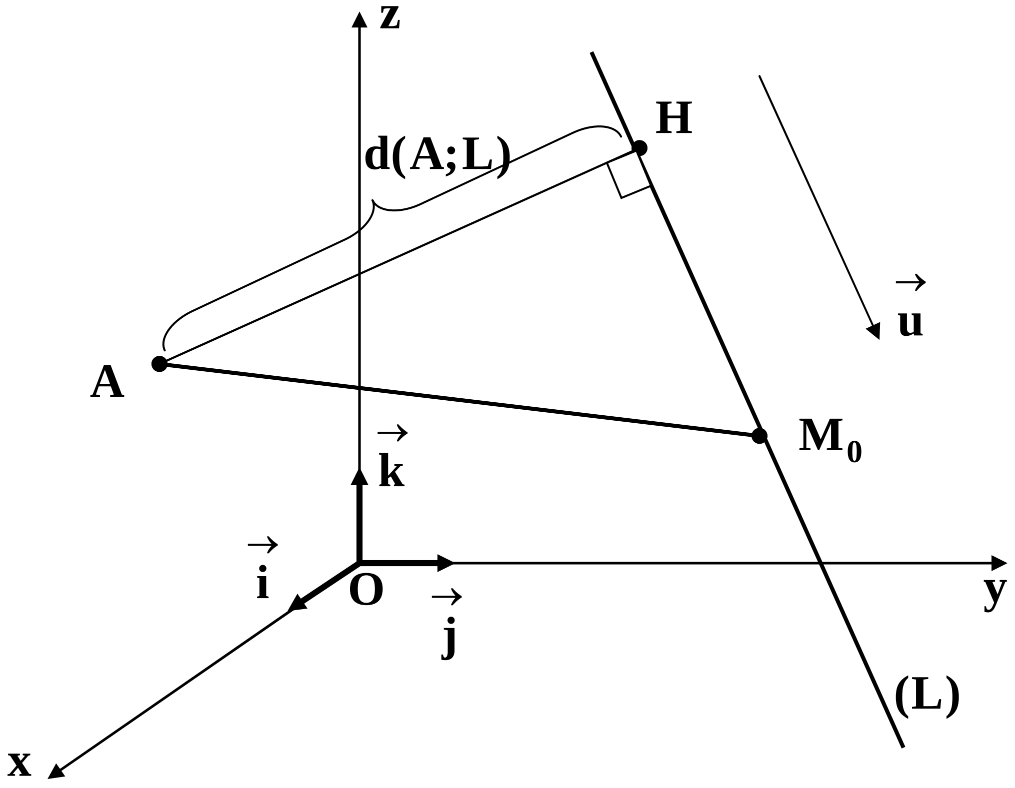


ខ/មាឌរបស់តេត្រាអ៊ែត **ABCD** កំនត់ដោយ

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|$$



៩-ចម្ងាយពីចំនុចមួយទៅបន្ទាត់ក្នុងលំហ



ទ្រឹស្តីបទ ចម្ងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L) កំនត់ដោយ

$$d(A;(L))=\frac{|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$ ដែល $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

របស់បន្ទាត់ (L) និង $M_0\in(L)$ ។

ជំពូកទី២

របៀបដោះស្រាយលំហាត់តាមផលគុណស្កាលែ

១-វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ និង វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែ

ក/ វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

ឧបមាថាក្នុងតម្រុយអតូនរម៉ាល់គេមានវ៉ិចទ័រ ពីរគឺ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ ។

គេបាន $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

ខ/ វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែ

ឧបមាថាក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់គេមានវ៉ិចទ័រ ពីរគឺ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ ។

គេបាន $\vec{u}//\vec{v}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{u} = (2\,;-3\,;6\,)$ និង $\vec{v} = (3\,;4\,;1)$

ចូរបង្ហាញថា $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរត្តូកូណាល់គ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\vec{u} \perp \vec{v}$

តាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,\vec{v} &= (2)(3) + (-3)(4) + (6)(1)\\ &= 6 - 12 + 6\\ &= 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរត្តូកូណាល់គ្នា ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យបីចំនុច $A(2,-1\,,1\,)\,;\,B(1,1\,,3\,)$ និង $C(4-2\,,3)$

ចូរបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញថា

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-1\,;2\,;2)$ និង $\overrightarrow{AC}=(2\,;\,-1\,;2)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-2-2+4=0$

គេទាញ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ នាំឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

ហើយ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$

និង $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$

គេទាញបាន $AB=AC$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ

$\vec{u}=(m\,;m-5\,;m+4)$ និង $\vec{v}=(3\,;m+2\,;m-1)$

កំនត់ m ដើម្បីឲ្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរត្វូកូណាល់គ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ m

ដើម្បីឲ្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3m + (m-5)(m+2) + (m+4)(m-1) = 0$$

$$3m + m^2 - 3m - 10 + m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 14 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(-14)$$

$$\Delta = 9 + 112 = 121 = 11^2$$

គេទាញឫស $m_1 = \frac{-3+11}{4} = 2$; $m_2 = \frac{-3-11}{4} = -\frac{7}{2}$

ដូចនេះ $m_1 = 2$; $m_2 = -\frac{7}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យបីចំនុច

$A(x, y, x-1)$; $B(1, 1, 3)$ និង $C(4-2, 3)$

កំនត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

កំពូល A ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ x និង y

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (1-x, 1-y, 4-x)$; $\overrightarrow{AC} = (4-x, -2-y, 4-x)$

ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A

លុះត្រាតែ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ និង $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$

គេមាន $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(4-x) + (1-y)(-2-y) + (4-x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 4 - 5x + x^2 - 2 + y + y^2 + 16 - 8x + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 13x + y + 18 = 0 \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + (4-x)^2}$

$= \sqrt{18 - 10x - 2y + 2x^2 + y^2}$

ហើយ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4-x)^2 + (-2-y)^2 + (4-x)^2}$

$= \sqrt{36 - 16x + 4y + 2x^2 + y^2}$

គេមាន $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{18 - 10x - 2y + 2x^2 + y^2} = \sqrt{36 - 16x + 4y + 2x^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow 18 - 10x - 2y + 2x^2 + y^2 = 36 - 16x + 4y + 2x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 18 - 6x + 6y = 0$

$\Leftrightarrow y = x - 3 \quad (2)$

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន

$2x^2+(x-3)^2-13x+(x-3)+18=0$

$2x^2+x^2-6x+9-13x+x-3+18=0$

$3x^2-18x+24=0$

$x^2-6x+8=0 \Rightarrow x_1=2 \vee x_2=4$

ចំពោះ $x=2$ តាម (2) គេបាន $y=2-3=-1$

ចំពោះ $x=4$ តាម (2) គេបាន $y=4-3=1$

ដូចនេះ $(x=2\,;y=-1)$ ឬ $(x=4\,;y=1)$ ។

ឧទាហរណ៍៨

គេឲ្យចំនុច $A(0;-3;-4)$; $B(2,1,8)$; $C(2;4;5)$

និង $D(4;-2,-3)$ ។ M និង N ជាពីរចំនុចស្ថិតនៅលើ

បន្ទាត់រៀងគ្នា (AB) និង (CD) ។

កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច M និង N ដើម្បីឲ្យអង្កត់MN

ខ្លីបំផុត រួចកំនត់ប្រវែងខ្លីបំផុតនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច M និង N

តាង $M(x_1;y_1;z_1)$ និង $N(x_2;y_1;z_2)$

គេមាន $\overrightarrow{AB}(2\,;4\,;12\,)$; $\overrightarrow{CD}(2;-6;-8)$

$\overrightarrow{AM}(x_1\,;y_1+3\,;z_1+4)$ និង $\overrightarrow{CN}(x_2-2\,;y_2-4\,;z_2-5\,)$

ដោយ $M\in(AB)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\,//\,\overrightarrow{AB}$

គេទាញ $\frac{x_1}{2}=\frac{y_1+3}{4}=\frac{z_1+4}{12}=p\Rightarrow\begin{cases}x_1=2p\\y_1=4p-3\\z_1=12p-4\end{cases}$ (i)

ដូចគ្នាដែរ $N\in(CD)\Rightarrow\overrightarrow{CN}\,//\,\overrightarrow{CD}$

គេទាញ $\frac{x_2-2}{2}=\frac{y_2-4}{-6}=\frac{z_2-5}{-8}=q\Rightarrow\begin{cases}x_2=2q+2\\y_2=-6q+4\\z_2=-8q+5\end{cases}$ (ii)

កំប៉ូសង់ស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ គឺ

$\overrightarrow{MN}=(2q-2p+2\,;-6q-4p+7\,;-8q-12p+9)$

ដើម្បីឲ្យអង្កត់ MN ខ្លីបំផុត រួចកំនត់ប្រវែងខ្លីបំផុតលុះត្រា

តែ $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{CD}$

គេទាញ $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0$ និង $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=-22p-58q+80=0\Rightarrow 11p+59q-40=0\,(1)$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 62p + 48q - 55 = 0 \ (2)$

តាមសមីការ (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 11p + 59q - 40 = 0 \\ 62p + 48q - 55 = 0 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $p = q = \frac{1}{2}$ ។

យកតម្លៃ $p = \frac{1}{2}$ និង $q = \frac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង (i) និង (ii)

គេបាន $M(1\,;-1\,;2\,)$ និង $N(3\,;1\,;1\,)$ ។

កំនត់ប្រវែងខ្លីបំផុតរបស់ អង្កត់ MN

គេមាន $\overrightarrow{MN} = (2\,;2\,;-1)$

គេបាន $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

ដូចនេះប្រវែងខ្លីបំផុតរបស់ អង្កត់ MN គឺ $MN = 3$ ។

ឧទាហរណ៍៨

គេឲ្យបីចំនុចចំនុច $A(2;4;1)$; $B(3\ ;\ 0;\ 2\ )$; $C(3\ ;\ 3;5)$

ក-បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស

ខ-គេឲ្យចំនុច $S(x;y;x+y)$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិត។

កំនត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $SA=SB=SC$

គ-បង្ហាញថា SAB ; SAC និង SBC សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ចំពោះតម្លៃ x និង y ដែលបានរកឃើញខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស

គេមាន $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$$=\sqrt{(3-2)^2+(0-4)^2+(2-1)^2}$$

$$=\sqrt{1+16+1}=3\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(3-4)^2+(5-1)^2}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(3-3)^2+(3-0)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$$

ដោយ $AB=AC=BC=3\sqrt{2}$

ដូចនេះ **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

ខ-កំនត់ **x** និង **y** ដើម្បីឲ្យ $SA = SB = SC$

គេមាន $SA = \sqrt{(2-x)^2 + (4-y)^2 + (1-x-y)^2}$

$$SB = \sqrt{(3-x)^2 + y^2 + (2-x-y)^2}$$

$$SC = \sqrt{(3-x)^2 + (3-y)^2 + (5-x-y)^2}$$

ចំពោះ $SA = SB$ គេបាន

$$\sqrt{(2-x)^2 + (4-y)^2 + (1-x-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + y^2 + (2-x-y)^2}$$

$$(2-x)^2 + (4-y)^2 + (1-x-y)^2 = (3-x)^2 + y^2 + (2-x-y)^2$$

$$(2-x)^2 - (3-x)^2 + (4-y)^2 - y^2 + (1-x-y)^2 - (2-x-y)^2 = 0$$

$$-(5-2x) + 4(4-2y) - (3-2x-2y) = 0$$

$$-5 + 2x + 16 - 8y - 3 + 2x + 2y = 0$$

$$4x - 6y + 8 = 0$$

$$2x - 3y + 4 = 0 \quad (1)$$

ចំពោះ $SB = SC$ គេបាន

$$\sqrt{(3-x)^2 + y^2 + (2-x-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (3-y)^2 + (5-x-y)^2}$$

$$(3-x)^2 + y^2 + (2-x-y)^2 = (3-x)^2 + (3-y)^2 + (5-x-y)^2$$

$$y^2 - (3-y)^2 + (2-x-y)^2 - (5-x-y)^2 = 0$$

$$3(2y-3) - 3(7-2x-2y) = 0$$

$$2y - 3 - 7 + 2x + 2y = 0$$

$$2x + 4y - 10 = 0 \quad (2)$$

តាម(1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 2x-3y+4=0 & (1) \\ 2x+4y-10=0 & (2) \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $x=1\,;\; y=2$ ។

គ-បង្ហាញថា SAB ; SAC និង SBC សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A

ចំពោះ $x=1\,;\; y=2$ គេបាន $S(1\,;2\,;3)$

មាន $\overrightarrow{SA}=(1\,;2\,;-2)\,;\ \overrightarrow{SB}=(2\,;-2\,;-1)$

និង $\overrightarrow{SC}=(2;1;2)$

គេបាន $\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{SB}=2-4+2=0 \Rightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{SB}$

$$\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SC}=4-2-2=0 \Rightarrow \overrightarrow{SB}\perp\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{SC}=2+2-4=0 \Rightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{SC}$$

ហើយដោយ $SA=SB=SC$ នោះ SAB ; SAC និង SBC សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

២-សំណុំចំណុចក្នុងលំហ

ក/សមីការប្លង់

សំណុំចំនុច $Q(x , y , z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $ax+by+cz+d=0$ គឺជាប្លង់ (P) មាន $\vec{n}=(a;b;c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់។

(a;b;c ជាបីចំនួនពិតមិនសូន្យព្រមគ្នា) ។

ខ/ សមីការស្វ៊ែ

-សំណុំចំនុច $Q(x ; y ; z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ គឺជាស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $I(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2})$ និងកាំ $R=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d}$

ដែល $\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d>0$ ។

-សំណុំចំនុច Q ដែលមានមានចម្ងាយថេរស្មើ R ពីចំនុចនឹងមួយ I គឺជាស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត I និងកាំស្មើ R ។

ឧទាហរណ៍១

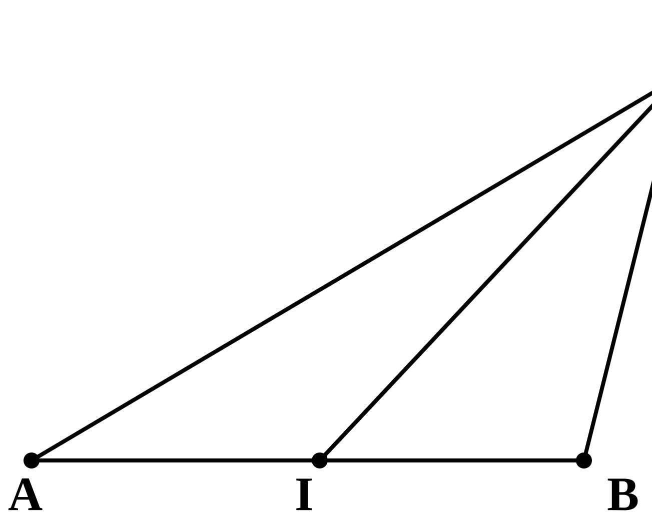
ក្នុងលំហគេឲ្យចំនុចនឹងពីរ **A** និង **B** ដែល $AB = 6\ cm$

កំនត់សំណុំចំនុច **P** ដែល $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = 16$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សំណុំចំនុច **P**

យក **I** ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$



គេមាន $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{PI} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

ហើយ $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{PI} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

គេបាន $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PI} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2}).(\overrightarrow{PI} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2})$

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PI}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{4}$$

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = PI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

ដោយ $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = 16$ និង $AB = 6cm$

គេបាន $16 = PI^2 - \frac{6^2}{4} \Rightarrow PI = 5cm$

A និង **B** ជាចំនុចនឹង នោះ **I** ក៏ជាចំនុចនឹងដែរ

ហើយដោយ $PI = 5cm$ ថេរ នោះសំណុំចំនុច **P** គឺជា

ស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត **I** និងកាំ $R = PI = 5\ cm$ ។

ឧទាហរណ៍២

ក្នុងតម្រុយអរត្វូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបីចំនុច

$A(1\,;-1\,;0\,)\,;\ B(2\,;0\,;3\,)$ និង $C(0\,;2\,;4)$

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y;z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់

ទំនង $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MC^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y;z)$

គេមាន $\overrightarrow{MA}=(1-x;-1-y;-z)\,;\overrightarrow{MB}=(2-x\,;-y;3-z)$

គេបាន $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(1-x)(2-x)-y(-1-y)-z(3-z)$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2-3x+x^2+y+y^2-3z+z^2$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=x^2+y^2+z^2-3x+y-3z+2$$

ម្យ៉ាងទៀត $MC^2=(0-x)^2+(2-y)^2+(4-z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2-4y-8z+20$$

ដោយ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MC^2$ គេទាញបាន

$$x^2+y^2+z^2-3x+y-3z+2=x^2+y^2+z^2-4y-8z+20$$

$$-3x+5y+5z-18=0$$

ដូចនេះសំណុំចំនុច $M(x,y,z)$ គឺជាប្លង់ (P) ដែលមានសមីការ $-3x+5y+5z-18=0$ និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(-3\,;5\,;5\,)$ ។

ឧទាហរណ៍៣

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបីចំនុច $A(0\,;2\,;0\,)\,;\ B(1\,;0\,;3\,)$ និង $C(0\,;0\,;-4)$

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y\,;z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\frac{7}{3}$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y\,;z)$

គេមាន $\overrightarrow{MA}=(-x\,;2-y\,;-z)\ ;\ \overrightarrow{MB}=(1-x\,;-y;3-z)$

និង $\overrightarrow{MC}=(-x\,;-y\,;-4-z)$

គេមាន $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=x^2+y^2+z^2-x-2y-3z\ \ (1)$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=x^2+y^2+z^2-2y+4z \quad (2)$$

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=x^2+y^2+z^2-x+z-12 \quad (3)$$

បូកសមីការ (1) , (2) និង (3) គេបាន

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=3(x^2+y^2+z^2)-2x-4y-2z-12$$

ដោយសម្មតិកម្ម $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\frac{7}{3}$

គេបាន $3(x^2+y^2+z^2)-2x-4y-2z-12=\frac{7}{3}$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}z-\frac{43}{9}=0$$

$$(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{2}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2=\frac{49}{9}$$

ដូចនេះសំណុំចំនុច $M(x,y,z)$ គឺជាស្វ៊ែផ្ចិត $I(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3})$

និងកាំ $R=\frac{7}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍៨

ក្នុងតម្រុយអរត្តូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យពីរចំនុច $A(1;2;3)$ និង $B(3;0;-1)$

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y;z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $MA^2-MB^2=16$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y;z)$

គេមាន $MA^2=(1-x)^2+(2-y)^2+(3-z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14$$

ហើយ $MB^2=(3-x)^2+(0-y)^2+(-1-z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2-6x+2z+10$$

គេបាន $MA^2-MB^2=4x-4y-8z+4=16$

នាំឲ្យ $x-y-2z-6=0$

ដូចនេះសំណុំចំនុច M គឺជាប្លង់ $(P):x-y-2z-6=0$

ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,-1,-2)$ ។

ឧទាហរណ៍៨

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យពីរចំនុច $A(1;2;-3)$ និង $B(3;0;1)$

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y;z)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $MA^2+MB^2=4$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សំណុំចំនុច $M(x;y;z)$

គេមាន $MA^2=(1-x)^2+(2-y)^2+(-3-z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+14$$

ហើយ $MB^2=(3-x)^2+(0-y)^2+(1-z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2-6x-2z+10$$

គេបាន $MA^2+MB^2=2(x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+12)=20$

គេទាញ $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+2=0$

ឬ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$ ។ដូចនេះសំណុំចំនុចM គឺជាស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(2;1;-1)$ និងកាំ $R=2$ ។

ជំពូកទី៣

របៀបគណនាកូអរដោណេចំនុចប្រសព្វរបស់ បន្ទាត់ ប្លង់ និង ស្វ៊ែក្នុងលំហ

១-កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និង ប្លង់

ឧបមាថាគេមានបន្ទាត់(L) និងប្លង់(P)មានសមីការ

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \text{ និង } \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

បើបន្ទាត់ (L)ប្រសព្វជាមួយប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច A មួយ នោះដើម្បីកំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច A គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម

-តាងចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$

-ដោយ $A\in(L)\Rightarrow \frac{x_A-x_0}{a}=\frac{y_A-y_0}{b}=\frac{z_A-z_0}{c}=t$

គេទាញ $x_A=x_0+at\ ;\ y_A=y_0+bt\ ;\ z_A=z_0+ct$ (1)

-ដោយ $A \in (P) \Rightarrow \alpha x_A + \beta y_A + \gamma z_A + \delta = 0 \ (2)$

-យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង(2) រួចដោះស្រាយរក t បន្ទាប់មកយកតម្លៃដែលរកឃើញជំនួសក្នុង(1)វិញ គេអាចរកឃើញ $(x_A ; y_A ; z_A)$ ។

ឧទាហរណ៍

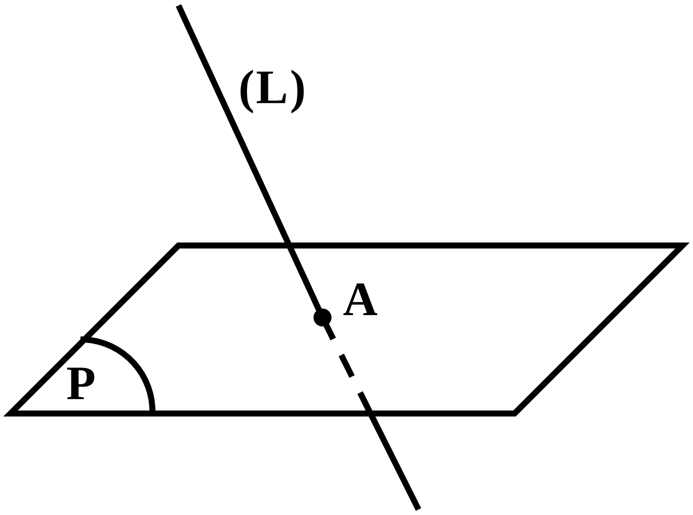
គេឲ្យបន្ទាត់(L) មានសមីការ $(L): \frac{x-5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+5}{4}$

និងប្លង់ (P) មានសមីការ $(P): x - 2y + 4z - 9 = 0$ ។

គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L)និង(P) ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A



តាងចំនុច $A(x_A\ ;y_A\ ;\ z_A)$

ដោយ $A\in(L)\Rightarrow\frac{x_A-5}{-2}=\frac{y_A+4}{3}=\frac{z_A+5}{4}=t$

គេទាញបាន $\begin{cases}x_A=-2t+5\\y_A=3t-4\quad(1)\\z_A=4t-5\end{cases}$

ដោយ $A\in(P)\Rightarrow x_A-2y_A+4z_A-9=0\ (2)$

យកសមីការ(1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$(-2t+5)-2(3t-4)+4(4t-5)-9=0$$

$$-2t+5-6t+8+16t-20-9=0$$

$$8t-16=0$$

$$t\ =\ 2$$

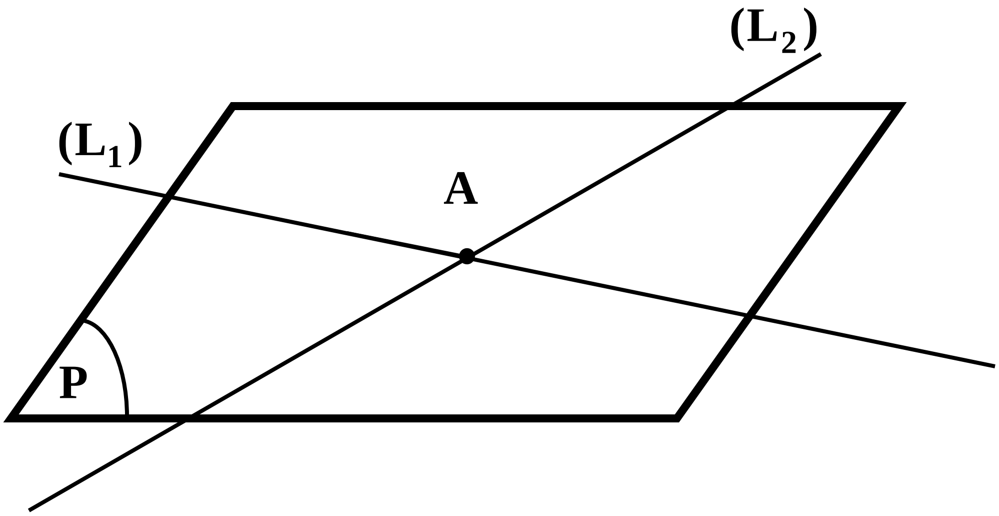
យកតម្លៃ $t=2$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$\begin{cases}x_A=-2(2)+5=1\\y_A=3(2)-4=2\\z_A=4(2)-5=3\end{cases}$$

ដូចនេះ $A(1\ ;\ 2\ ;3\ )$ ជាចំនុចប្រសព្វដែលត្រូវរក ។

២-កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និង បន្ទាត់

ក្នុងលំហាបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នាលុះត្រាតែបន្ទាត់ពីរនោះ មិនស្របគ្នាហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។



ឧបមាថាគេមានបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) មានសមីការ

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ និង } \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

បើសិនជាបន្ទាត់ពីរនេះប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច A នោះ

ដើម្បីគណនាកូអរដោនេចំនុច A គេត្រូវ

-តាងចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$

-ដោយ $A\in(L_1)\Rightarrow \frac{x_A-x_1}{a_1}=\frac{y_A-y_1}{b_1}=\frac{z_A-z_1}{c_1}=t_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = x_1 + a_1 t_1 \\ y_A = y_1 + b_1 t_1 \quad (1) \\ z_A = z_1 + c_1 t_1 \end{cases}$$

-ដោយ $A \in (L_2) \Rightarrow \frac{x_A - x_2}{a_2} = \frac{y_A - y_2}{b_2} = \frac{z_A - z_2}{c_2} = t_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = x_2 + a_2 t_2 \\ y_A = y_2 + b_2 t_2 \quad (2) \\ z_A = z_2 + c_2 t_2 \end{cases}$$

-ផ្ទឹមសមីការ (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + a_2 t_2 \\ y_1 + b_1 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + c_1 t_1 = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} a_1 t_1 - a_2 t_2 = x_2 - x_1 \\ b_1 t_1 - b_2 t_2 = y_2 - y_1 \\ c_1 t_1 - c_2 t_2 = z_2 - z_1 \end{cases}$$

-ត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធខាងលើនេះ រក $t_1 ; t_2$

-យកតម្លៃ $t_1 ; t_2$ ដែលបានរកឃើញជំនួសក្នុង(1)ឬ(2)

គេទទួលបាន $(x_A ; y_A ; z_A)$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបន្ទាត់(L_1) និង (L_2) មានសមីការរៀងគ្នា

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+5}{4} \text{ និង } \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{-1}$$

រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L_1)និង(L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A

តាងចំនុច $A(x_A ; y_A ; z_A)$

ដោយ $A \in (L_1) \Rightarrow \frac{x_A - 5}{-2} = \frac{y_A + 4}{3} = \frac{z_A + 5}{4} = t_1$

គេទាញ $\begin{cases} x_A = -2t_1 + 5 \\ y_A = 3t_1 - 4 \\ z_A = 4t_1 - 5 \end{cases} \quad (1)$

ដោយ $A \in (L_2) \Rightarrow \frac{x_A + 1}{2} = \frac{y_A - 5}{-3} = \frac{z_A - 4}{-1} = t_2$

គេទាញ $\begin{cases} x_A = 2t_2 - 1 \\ y_A = -3t_2 + 5 \\ z_A = -t_2 + 4 \end{cases} \quad (2)$

ផ្ទឹមសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$$\begin{cases} -2t_1 + 5 = 2t_2 - 1 \\ 3t_1 - 4 = -3t_2 + 5 \\ 4t_1 - 5 = -t_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 + t_2 = 3 \\ 4t_1 + t_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ 4t_1 + t_2 = 9 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $t_1 = 2 ; t_2 = 1$

យកតម្លៃ $t_1 = 2$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $A(1 ; 2 ; 3)$ ។

៣-កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និង ស្វ៊ែ

ឧបមាថាគេមានស្វ៊ែ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

និងបន្ទាត់ $(L):\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ ។

ដើម្បីកំនត់កូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរវាងរវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយនឹងស្វ៊ែ (S) គេត្រូវ

-តាង $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}=t$

គេទាញ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \\ z=z_0+\gamma t \end{cases} \quad (1)$

-យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែ (S) រួចដោះស្រាយរក t បន្ទាប់មកយកតម្លៃ t ដែលបានរកឃើញទៅជំនួសក្នុងសមីការ(1)នោះគេនឹងអាចរកឃើញកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនោះ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបន្ទាត់(L) និង ស្វ៊ែ(S) មានសមីការរៀងគ្នា

$\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{5}$ និង $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A និង B រវាង (L) និង (S) ។

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A និង B

តាង $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{5}=t \Rightarrow \begin{cases} x=t+3 \\ y=2t+3 \\ z=5t+9 \end{cases} \quad (1)$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែ(S)គេបាន

$(t+2)^2+(2t+4)^2+(5t+7)^2=9$

$30t^2+90t+60=0 \Rightarrow t_1=-1\,;\,t_2=-2$

យកតម្លៃ $t_1=-1\,;\,t_2=-2$ ជំនួសក្នុង (1)គេបាន

$A(2\,;1\,;4)$ និង $B(1\,;-1\,;-1)$ ។

៤-បន្ទាត់ប៉ះស្វ៊ែ

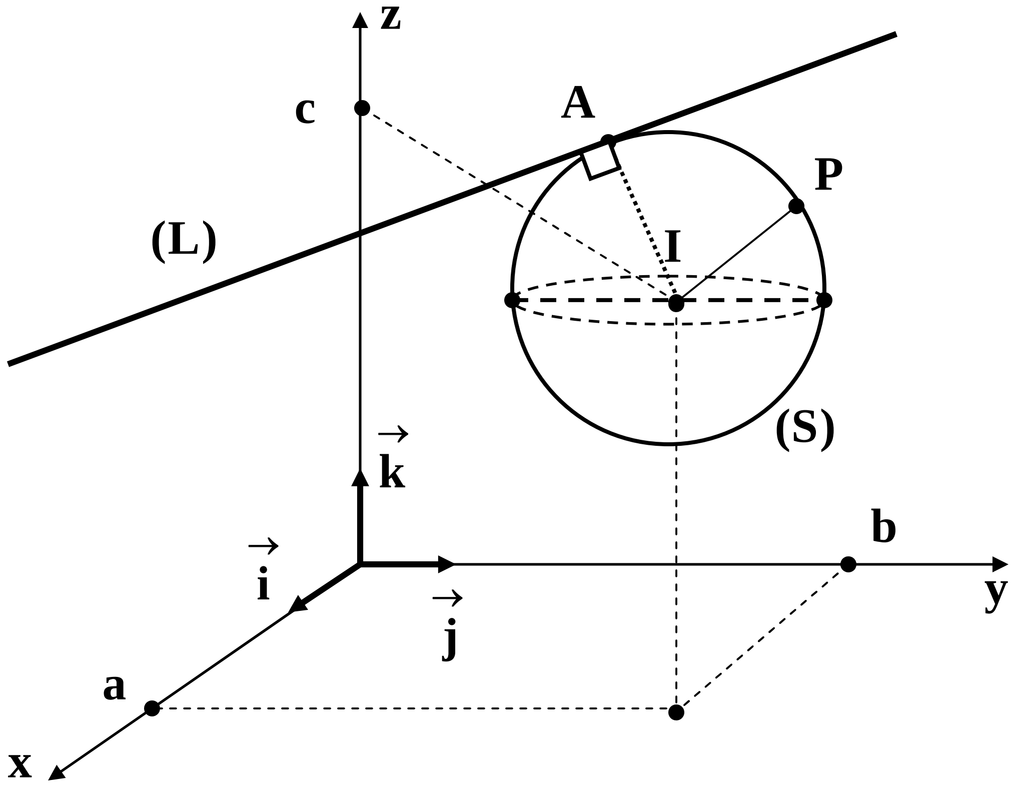
ឧបមាថាគេមានស្វ៊ែ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

និងបន្ទាត់ $(L):\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ ។

-ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ R

-បន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) លុះត្រាតែ $d(I;(L))=R$

-ដើម្បីគណនាកូអរដោនេចំនុចប៉ះគឺគេរកដូចកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វដែរ។



ឧទាហរណ៍ គេឲ្យបន្ទាត់$(L): \frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}$

និងស្វ៊ែ $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់(L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំនុច Aមួយ

រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះ A ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបន្ទាត់(L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ

បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច $M_0(1\,;4\,;3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ

ប្រាប់ទិស $\vec{u}(-2;3\,;2\,)$ ។

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(1\,;-1\,;2\,)$ និងកាំ $R=3$

ចម្ងាយពីចំនុច I ទៅបន្ទាត់ (L) គឺ $d(I;(L))=\frac{|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$

ដោយ $\overrightarrow{IM_0}=(0\,;5\,;1\,)$

គេបាន $\overrightarrow{IM_0}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}=7\vec{i}-2\vec{j}+10\vec{k}$

គេទាញ $d(I;(L))=\frac{\sqrt{7^2+(-2)^2+10^2}}{\sqrt{(-2)^2+3^2+2^2}}=\sqrt{\frac{153}{17}}=3$

ដោយ $d(I;(L))=R=3$

ដូចនេះបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំនុច A មួយ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះ A ខាងលើ

តាង $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}x=-2t+1\\y=3t+4\\z=2t+3\end{cases}\quad(1)$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែ (S) គេបាន

$(-2t)^2+(3t+5)^2+(2t+1)^2=9$

$4t^2+9t^2+30t+25+4t^2+4t+1-9=0$

$17t^2+34t+17=0$

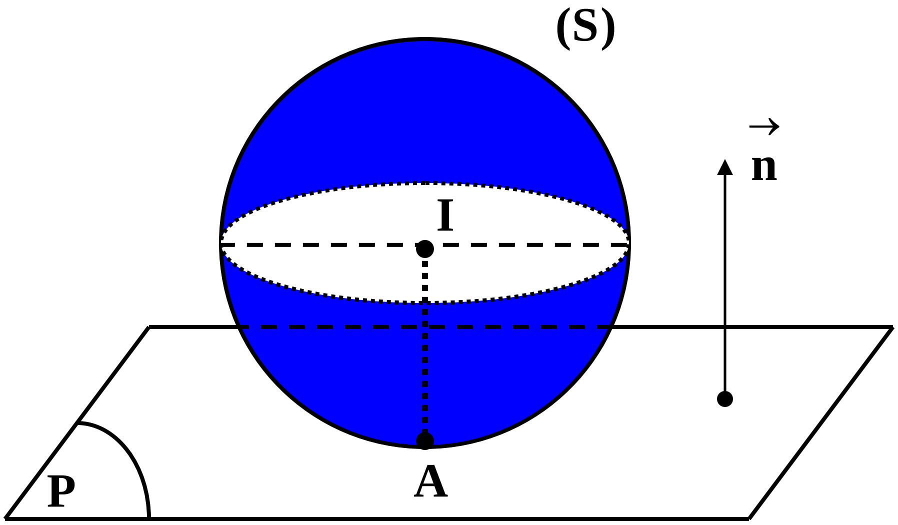
$17(t+1)^2=0\Rightarrow t=-1$

យក $t=-1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $A(3;1;1)$ ។

៥-ប្លង់ប៉ះស្វ៊ែ

ឧបមាថាគេមានស្វ៊ែ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

និងប្លង់ $(P):\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ ។



-ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ R

-ប្លង់ (P)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) លុះត្រាតែ $d(I;(P))=R$

ដើម្បីគណនាកូអរដោនេចំនុចប៉ះគេត្រូវ

-តាង $A(x_A;y_A;z_A)$ប៉ះដែលត្រូវរក

-គេបាន $\overrightarrow{IA} // \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{IA}=t.\vec{n}$

-គេមាន $\overrightarrow{IA}=(x_A-a\,;y_A-b\,;z_A-c\,)$ និង $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\overrightarrow{IA}=t\,\vec{n}\Rightarrow\begin{cases}x_A-a=\alpha t\\ y_A-b=\beta t\\ z_A-c=\gamma t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=a+\alpha t\\ y_A=b+\beta t\\ z_A=c+\gamma t\end{cases}\ (1)$$

-ដោយ $A\in(P)\Rightarrow\alpha x_A+\beta y_A+\gamma z_A+\delta=0\ \ (2)$

-យក (1) ជំនួសក្នុង (2) រួចដោះស្រាយរក t

បន្ទាប់មកយកតម្លៃរបស់ t ជំនួសក្នុង (1) ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យប្លង់ $(P): x+2y+2z-12=0$

និងស្វ៊ែ $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

ចូរបង្ហាញថាប្លង់(P)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំនុច Aមួយ

រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះ A ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

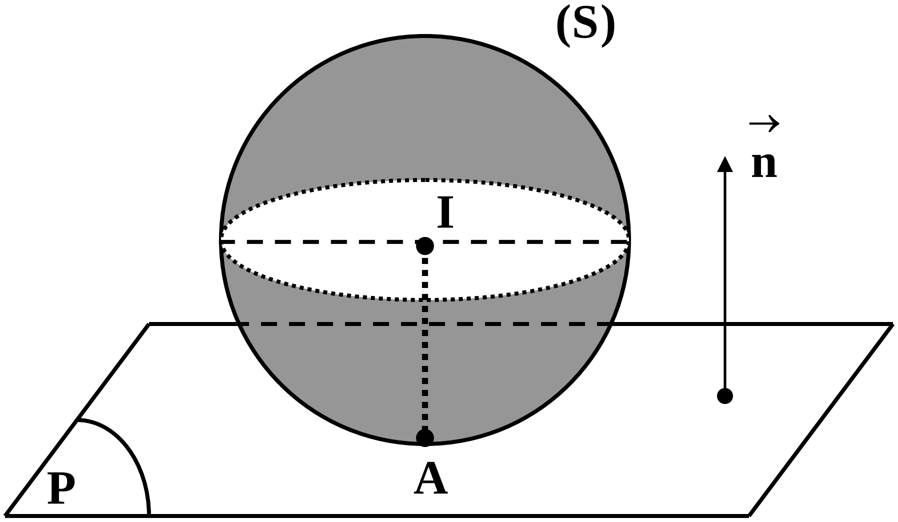
បង្ហាញថាប្លង់(P)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(1\,;-1\,;2\,)$ និងកាំ $R=3$

គេបាន $d(I;(P))=\dfrac{|1-2+4-12|}{\sqrt{1+4+4}}=3=R$

ដូចនេះ ប្លង់(P)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំនុច Aមួយ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះ A ខាងលើ



តាង $A(x_A;y_A;z_A)$ ជាចំនុចប៉ះរវាង (P) និង (S)

គេមាន $\overrightarrow{IA}=(x_A-1\,;y_A+1\,;z_A-2)$ និង $\vec{n}=(1,2,2)$

$\overrightarrow{IA}\,//\,\vec{n}\Rightarrow\overrightarrow{IA}=t\,\vec{n}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A-1=t\\y_A+1=2t\\z_A-2=2t\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A=t+1\\y_A=2t-1\\z_A=2t+2\end{cases}\quad(1)$$

ដោយ $A\in(P)\Rightarrow x_A+2y_A+2z_A-12=0\quad(2)$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុង(2)គេបាន

$$t+1+2(2t-1)+2(2t+2)-12=0$$

$$t+1+4t-2+4t+4-12=0$$

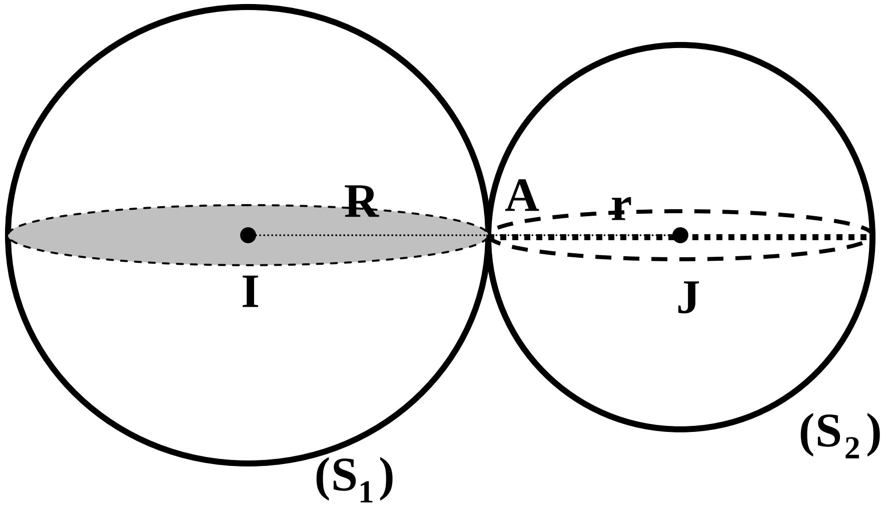
$$9t-9=0$$

$$t=1$$

យក $t=1$ ជំនួសក្នុង(1)គេបាន $A(2\,;1\,;\,4)$ ។

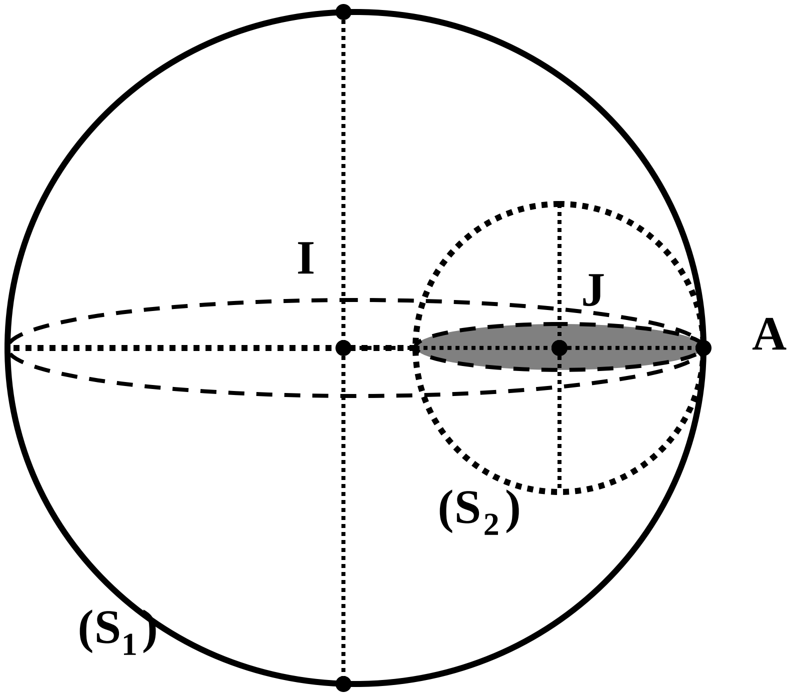
៦-ស្វ៊ែពីរប៉ះគ្នា

ក/ស្វ៊ែពីរប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ចំនុចមួយ



ឧបមាថាគេមានស្វ៊ែពីរ (S_1) និង (S_2) មានផ្ចិត I និង J ហើយកាំ R និង r ។ស្វ៊ែ (S_1) និង (S_2) ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ លុះត្រាតែ $d(IJ)=R+r$ ។

ខ/ ស្វ៊ែពីរប៉ះគ្នាខាងក្នុងត្រង់ចំនុចមួយ

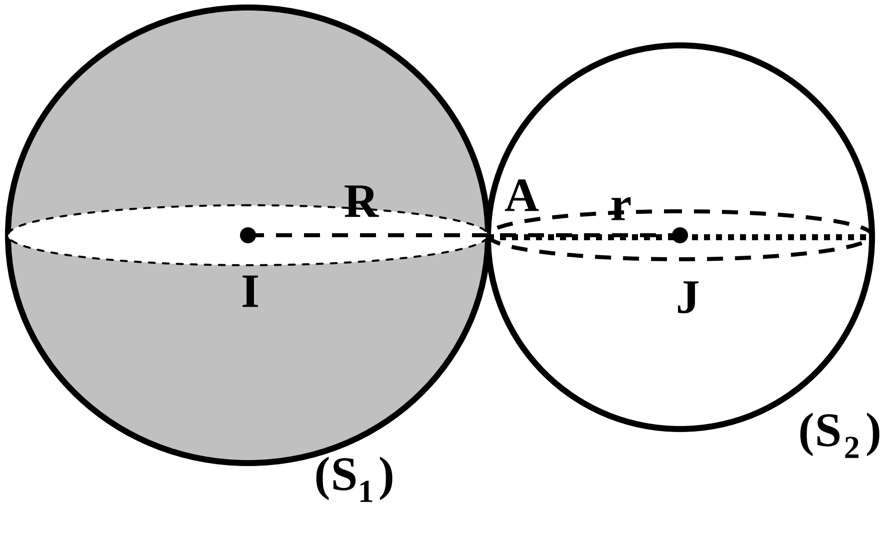


ឧបមាថាគេមានស្វ៊ែពីរ (S_1) និង (S_2) មានផ្ចិត I និង J ហើយកាំ R និង r ។ ស្វ៊ែ (S_1) និង (S_2) ប៉ះគ្នាខាងក្នុង លុះត្រាតែ $d(IJ) = R - r$ ដែល $r < R$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យស្វ៊ែ $(S_1): (x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=36$ និង $(S_2): (x-6)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=9$ បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S_1) និង (S_2) ប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ចំនុច A មួយ, រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះ A ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S_1) និង (S_2) ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ



ស្វ៊ែ (S_1) និង (S_2) មានផ្ចិតរៀងគ្នា $I(-1;1;2)$ និង $J(6;5;-2)$ និងមានកាំរៀងគ្នា $R=6$ និង $r=3$ ។

មាន $d(IJ)=\sqrt{(6+1)^2+(5-1)^2+(-2-2)^2}=9=R+r$

ដូចនេះ(S_1)និង (S_2)ប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ចំនុច Aមួយ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះ A ខាងលើ

តាង $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ គេបាន $\overrightarrow{IA}=(-1-x_A;1-y_A;2-z_A)$

និង $\overrightarrow{IJ}=(7\,;4\,;-4)$ ។

មាន $\overrightarrow{IA}/\!/\overrightarrow{IJ}\Rightarrow\overrightarrow{IA}=t\,\overrightarrow{IJ}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-1-x_A=7t\\1-y_A=4t\\2-z_A=-4t\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A=-1-7t\\y_A=1-4t\\z_A=2+4t\end{cases}\quad(1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $A\in(S_1)$ នោះកូអរដោនេ Aផ្ទៀងផ្ទាត់(S_1)

គេបាន $(x_A+1)^2+(y_A-1)^2+(z_A-2)^2=36\ (2)$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុង(2)គេបាន

$$(-7t)^2+(-4t)^2+(4t)^2=36$$

$$81t^2=36$$

$$t=\pm\frac{2}{3}$$

ដោយស្វ៊ែពីរនេះប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ **A** នោះចំនុច **A**

ត្រូវតែស្ថិតនៅក្នុង[IJ] នោះ $\overrightarrow{IA}$ និង $\overrightarrow{IJ}$ មានទិសដៅ

ដូចគ្នា ហេតុនេះ $t > 0$ ព្រោះ $\overrightarrow{IA} = t\,\overrightarrow{IJ}$

ដូចនេះគេត្រូវយក $t = \frac{2}{3}$ ចំនែក $t = -\frac{2}{3}$ (មិនយក)

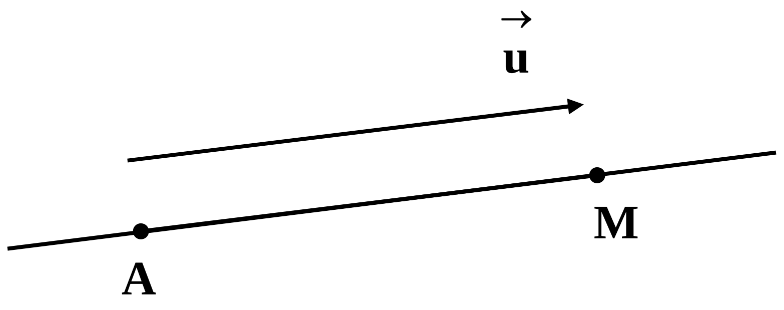
យក $t = \frac{2}{3}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $A(-\frac{14}{3};-\frac{5}{3};\frac{14}{3})$ ។

✍✍✍✍✍✍✍✍

ជំពូកទី៨

របៀបសរសេរសមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

១-សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំនុចមួយហើយស្គាល់វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស



ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ គេមានចំនុច

$A(x_A, y_A, z_A)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(a,b,c)$

សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច A មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$\vec{u}$ កំនត់ដោយ $(L): \dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$ ។

ឧទាហរណ៍

រកសមីការបន្ទាត់ **(L)** កាត់តាមចំនុច $A(-2\,;1\,;-3)$

ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(3\,;-2\,;-1)$

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការបន្ទាត់ **(L)**

តាមរូបមន្ត $(L):\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$

ដោយ $A(-2\,;1\,;-3)$ និង $\vec{u}=(3\,;-2\,;-1)$

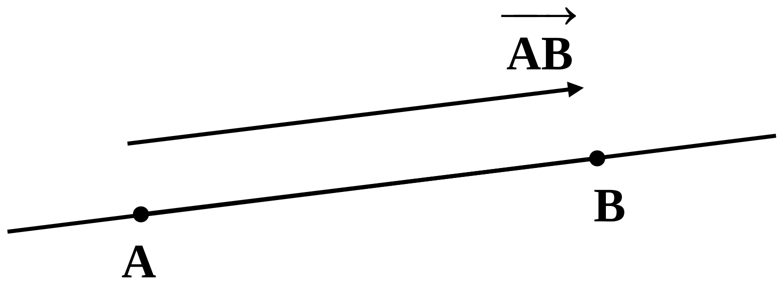
ដូចនេះ $(L):\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{-1}$ ។

២-សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុចក្នុងលំហ

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ គេមានពីរចំនុច $A(x_A\,,y_A\,,z_A)$ និង $B(x_B\,,y_B\,,z_B\,)$ ។

ចូរកំនត់សមីការបន្ទាត់ **(AB)** ?

របៀបដោះស្រាយ



ដើម្បីសរសេរសមីការបន្ទាត់ **(AB)** គេត្រូវអនុវត្តន៍តាមជំហ៊ានខាងក្រោម

- រកវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ **(AB)** គឺ

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,; y_B - y_A\,; z_B - z_A\,)$$

- ប្រើរូបមន្ត

$$(AB): \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

ឧទាហរណ៍

រកសមីការបន្ទាត់ **(AB)**កាត់តាមចំនុច $A(-2\,;1\,;-3)$ និង $B(3\,;-2\,;-1\,)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការបន្ទាត់ **(AB)**

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) គឺ

$\overrightarrow{AB} = (5\,,-3\,,2)$

តាមរូបមន្ត $(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$

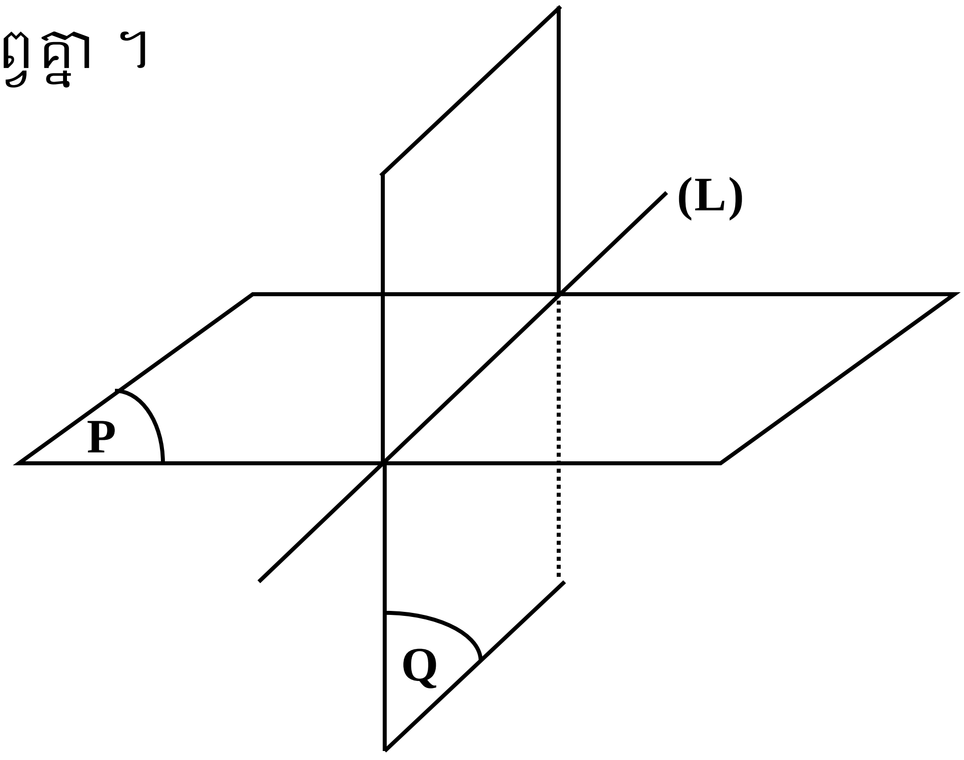
ដូចនេះ $(AB): \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{2}$

៣-សមីការបន្ទាត់កំនត់ពីរប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា

ឧបមាថាគេមានប្លង់ពីរ (P) និង (Q) មានសមីការ

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ និង $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

កំនត់សមីការបន្ទាត់កំនត់ដោយប្លង់ទាំងពីរខាងលើប្រសព្វគ្នា ។



បើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ និង $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នានោះទេ ប្លង់ (P) និង (Q) ប្រសព្វគ្នាបានបន្ទាត់ (L) មួយ ។ ដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់ (L) គេត្រូវ

- យក $z=t$ ជំនួសក្នុងសមីការ (P_1) និង (P_2)
- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1t+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2t+d_2=0 \end{cases}$
- រកទំនាក់ទំនងគ្មាន t រវាង $x;y;z$ នោះគេទទួលបានសមីការឆ្លុះរបស់បន្ទាត់ (L) ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យប្លង់ពីរ

$(P): x+2y+5z-2=0$ និង $(Q): 2x-2y+z-1=0$

ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) កំនត់ដោយប្លង់ទាំងពីរខាងលើប្រសព្វគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការបន្ទាត់

យក $z=t$ ដែល $t\in IR$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x + 2y + 5t - 2 = 0 & (1) \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$3x + 6t - 3 = 0 \Rightarrow x = -2t + 1$

តាម (1) គេបាន $y = \dfrac{2 - 5t - x}{2} = \dfrac{2 - 5t + 2t - 1}{2} = \dfrac{-3t + 1}{2}$

គេបាន $x = 2t + 1\ ;\ y = -\dfrac{3}{2}t + 1\ ;\ z = t$ ដែល $t \in IR$

ដោយបំបាត់ t រវាង $x\ ;y\ ;z$ គេបានសមីការ

$(L)\ :\ \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 1}{-\dfrac{3}{2}} = z$ ។

៨-សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំនុចមួយហើយកែងទៅនឹងប្លង់មួយ

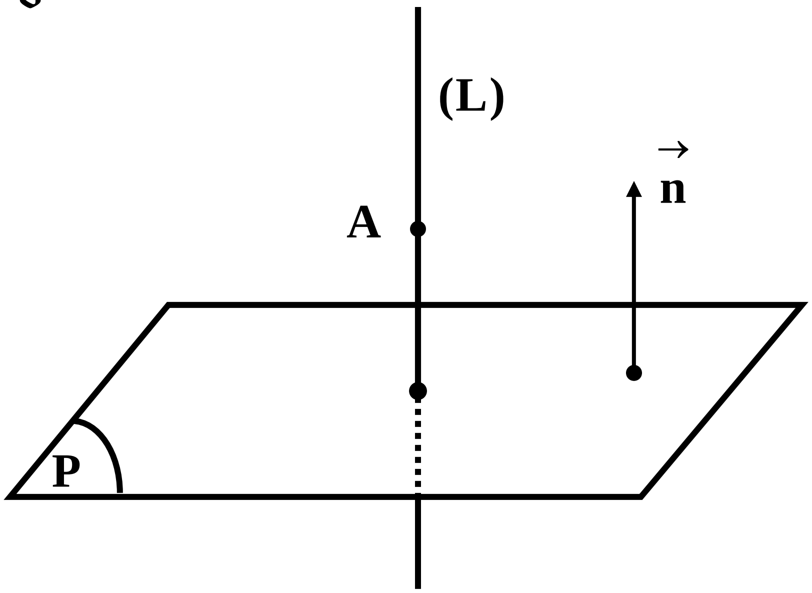
សន្មតថាគេមានប្លង់ $(P) : ax + by + cz + d = 0$

និងចំនុច $A(x_A\ ;\ y_B\ ;\ z_A)$ ។

រកសមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$

ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

របៀបដោះស្រាយ



- ដោយបន្ទាត់ $(L)\perp(P)$ នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់(L) ។

បើ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់(L) នោះគេបាន $\vec{u}=(a,b,c)$ ។

- ប្រើរូបមន្ត

$$(L):\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យប្លង់មានសមីការ $(P): 2x+2y-z+1=0$

និងចំនុច $A(4;1;2)$ ។

ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់(L)កាត់តាមចំនុច A ហើយ

កែងនឹងប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការបន្ទាត់(L)

ប្លង់$(P): 2x+2y-z+1=0$មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=(2\,,\,2,-1)$

តាង $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់(L) ។

ដោយ $(L)\perp(P)$ នោះ $\vec{u}=\vec{n}=(2\,,\,2,-1)$

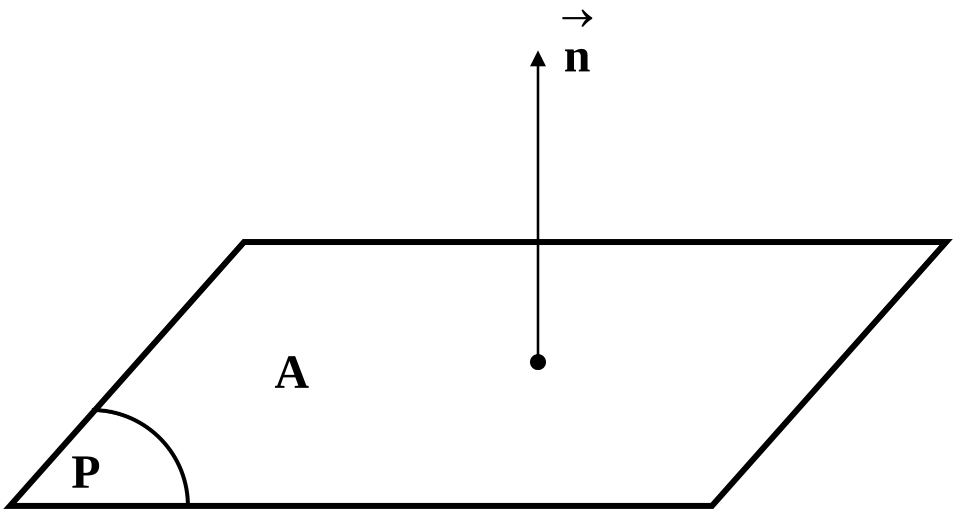
តាមរូបមន្ត $(L): \dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$

ដូចនេះ $(L): \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ ។

ជំពូកទី៥

របៀបសរសេរសមីការប្លង់ក្នុងលំហ

១-សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយនិងស្គាល់វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់



គេឲ្យចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a;b;c)$

សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុច A កំនត់រកតាមរូបមន្ត

$(P):a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំនុច $A(1;2;3)$

ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2;-3;6)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការប្លង់ (P)

តាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

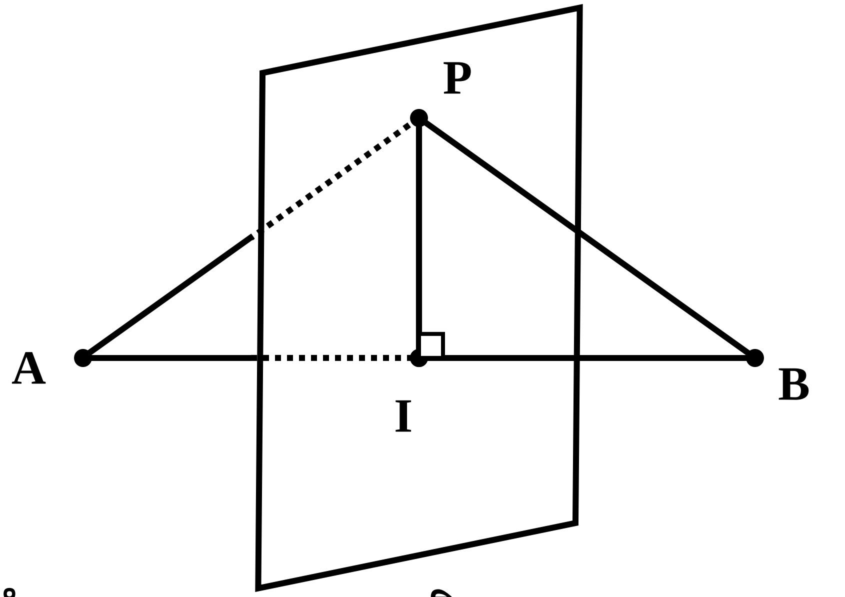
ដោយ $A(1;2;3)$ និង $\vec{n}=(2;-3;6)$

គេបាន $(P): 2(x-1)-3(y-2)+6(z-3)=0$

$$(P): 2x-2-3y+6+6z-18=0$$

ដូចនេះ $(P): 2x-3y+6z-14=0$

២- សមីការប្លង់មេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់មួយ



គេឲ្យចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$ និង $B(x_B;y_B;z_B)$ ។

សំណុំនៃចំនុច $P(x;y;z)$ ដែលស្ថិតនៅស្មើចម្ងាយពីចំនុច A និងB គឺជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ [AB]

ដើម្បីកំនត់សមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ [AB]គេត្រូវអនុវត្តន៍តាមជំហ៊ានខាងក្រោម

-តាង I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ [AB] រួចកំនត់កូអរដោនេរបស់ I តាមរូបមន្ត $I(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2})$

-តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ដែល $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$

-ប្រើរូបមន្ត $(P): a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យចំនុច $A(1;2;3)$ និង $B(-3;4;1)$

ចូរកំនត់សមីការប្លង់មេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់ $[AB]$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការប្លង់មេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់ $[AB]$

តាង I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$

គេបាន $I(\frac{1-3}{2};\frac{2+4}{2};\frac{3+1}{2})$ ឬ $I(-1;3;2)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លងមេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់

$[AB]$ នោះគេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-4,2,-2)$ ។

តាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$

$$-4(x+1)+2(y-3)-2(z-2)=0$$

$$-4x-4+2y-6-2z+4=0$$

$$-4x+2y-2z-6=0$$

$$-2x+y-z-3=0$$

ដូចនេះ $(P): 2x-y+z+3=0$ ។

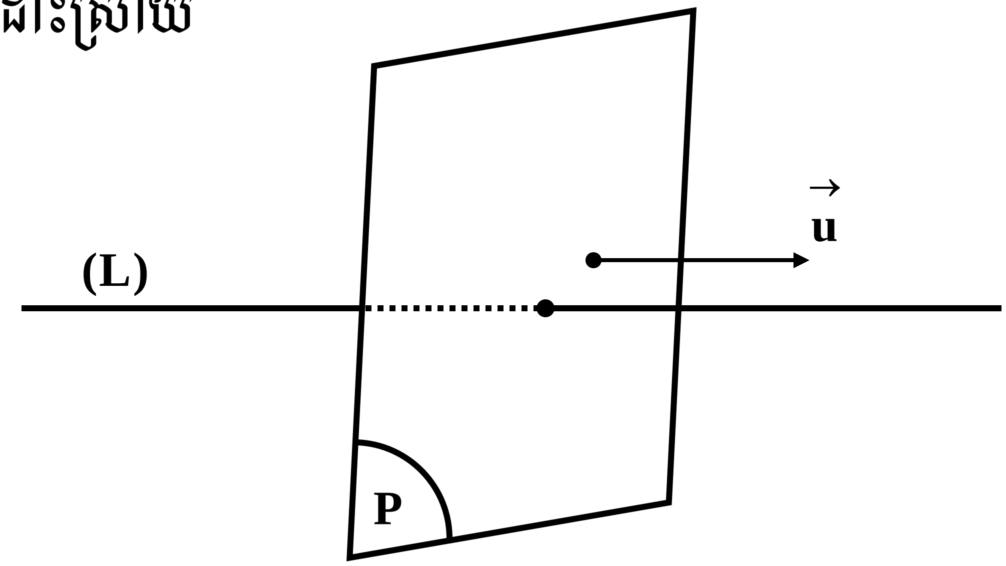
៣-សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយហើយកែងនឹងបន្ទាត់មួយ

គេឲ្យបន្ទាត់ $(L):\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$

និងចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$ ។

កំនត់សមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាម A ហើយកែងនឹង (L)

របៀបដោះស្រាយ



ដោយ $(P)\perp(L)$ នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (P) ។

គេបាន $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_L}=(a;b;c)$ ។ដោយប្លង់ (P) កាត់តាម A

នោះប្លង់ (P) គឺ $(P):a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{6}$

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំនុច A(1; 2 ;3)

ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (L) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការប្លង់(P)

ដោយ $(P) \perp (L)$ នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(L)គឺជា

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (P) ។

គេបាន $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{u_L} = (2;-3;6)$ ។

ដោយប្លង់(P)កាត់តាម A(1;2;3) នោះប្លង់(P) គឺ

$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

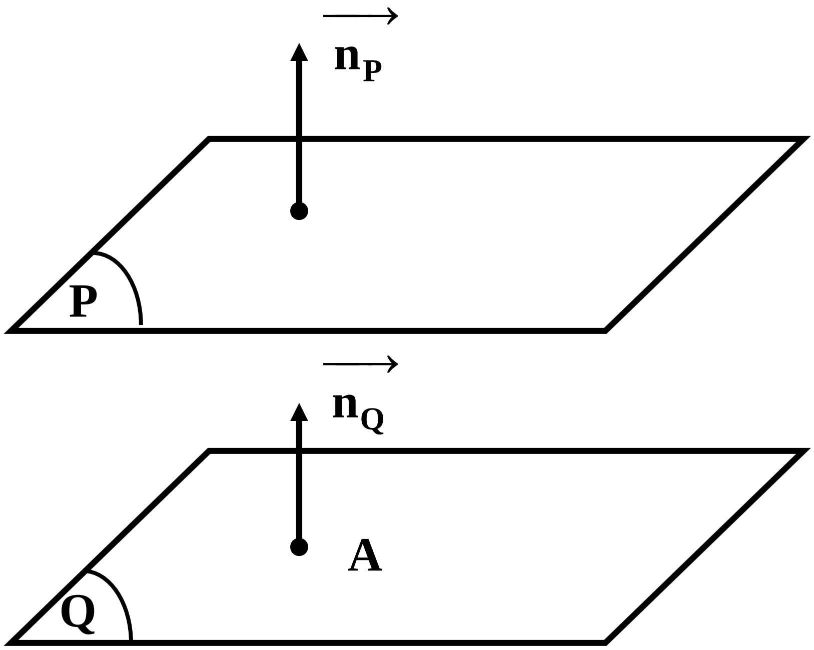
$(P): 2(x-1) - 3(y-2) + 6(z-3) = 0$

$(P): 2x - 2 - 3y + 6 + 6z - 18 = 0$

$(P): 2x - 3y + 6z - 14 = 0$

ដូចនេះ $(P): 2x - 3y + 6z - 14 = 0$ ។

៨- សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយហើយស្របនឹងប្លង់មួយទៀត



គេឲ្យប្លង់ $(P): ax+by+cz+d=0$

និងចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$ ។

កំនត់សមីការនៃប្លង់ (Q) កាត់តាម A ហើយស្របនឹង (P)

របៀបដោះស្រាយ

ដោយ $(Q)//(P)$ នោះគេអាចយក $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{n_P}=(a;b;c)$

ដោយប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច A នោះសមីការវាអាច

សរសេរតាមរូបមន្ត $(Q): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យប្លង់ $(P): 2x - 2y + z - 8 = 0$

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច $A(1; 2; 3)$

ហើយស្របនឹងប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការប្លង់(Q)

តាង $\overrightarrow{n_P}$ និង $\overrightarrow{n_Q}$ រៀងគ្នាជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់

(P) និង (Q) ។

ដោយ$(Q)//(P)$ នោះ $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{n_P} = (2; -2; 1)$

ម្យ៉ាងទៀត $A \in (Q)$ តាមរូបមន្តគេបាន

$(Q): 2(x-1) - 2(y-2) + 1.(z-3) = 0$

$(Q): 2x - 2 - 2y + 4 + z - 3 = 0$

$(Q): 2x - 2y + z - 1 = 0$

ដូចនេះ $(Q): 2x - 2y + z - 1 = 0$ ។

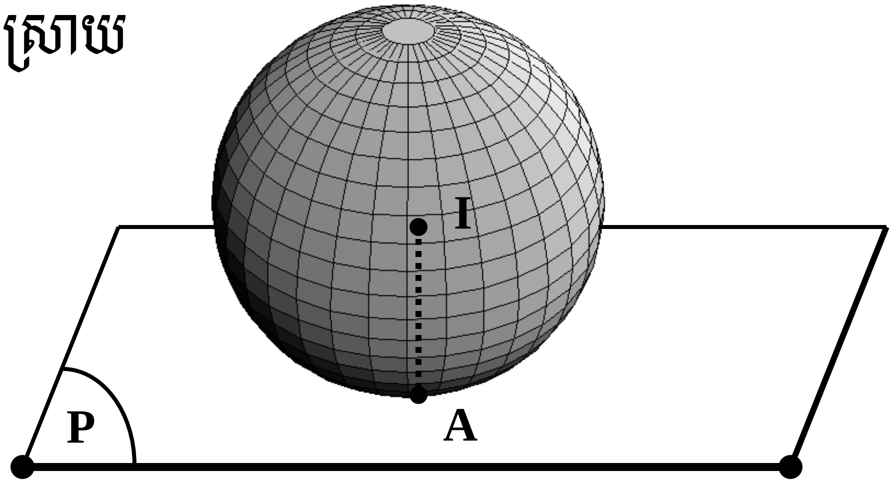
៥- សមីការប្លង់ប៉ះនឹងស្វ៊ែត្រង់ចំនុចមួយ

គេឲ្យស្វ៊ែ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

និងចំនុច $A\in(S)$ ដែល $A(x_A;y_A;z_A)$ ។

កំនត់សមីការប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំនុច A ។

របៀបដោះស្រាយ



ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(a;b;c)$

ដោយប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំនុច A នោះវ៉ិចទ័រ

ដែលភ្ជាប់ពីផ្ចិត I ទៅចំនុចប៉ះ A គឺជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

របស់ប្លង់ (P) គឺ $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{IA}=(x_A-a;y_A-b;z_A-c)$ ។

ដោយ $A\in(P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ

$$(P):(x_A-a)(x-x_A)+(y_A-b)(y-y_A)+(z_A-c)(z-z_A)=0$$

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យស្វ៊ែ $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$

បង្ហាញថាចំនុច $A(1;-3;3)\in(S)$ រួចសរសេរសមីការ

ប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំនុច A ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការប្លង់ (P)

យកកូអរដោនេ $A(1\,;-3\,;3)$ ទៅផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (S)

គេបាន $(1-2)^2+(-3+1)^2+(3-1)^2=9$

$1+4+4=9$ ពិត

ដូចនេះ $A\in(S)$,

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(2;-1;1)$

ដោយប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំនុច A នោះវ៉ិចទ័រ

ដែលភ្ជាប់ពីផ្ចិត I ទៅចំនុចប៉ះ A គឺជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

របស់ប្លង់ (P) គឺ $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{IA}=(-1\,;-2\,;\,2\,)$ ។

ដោយ $A\in(P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ

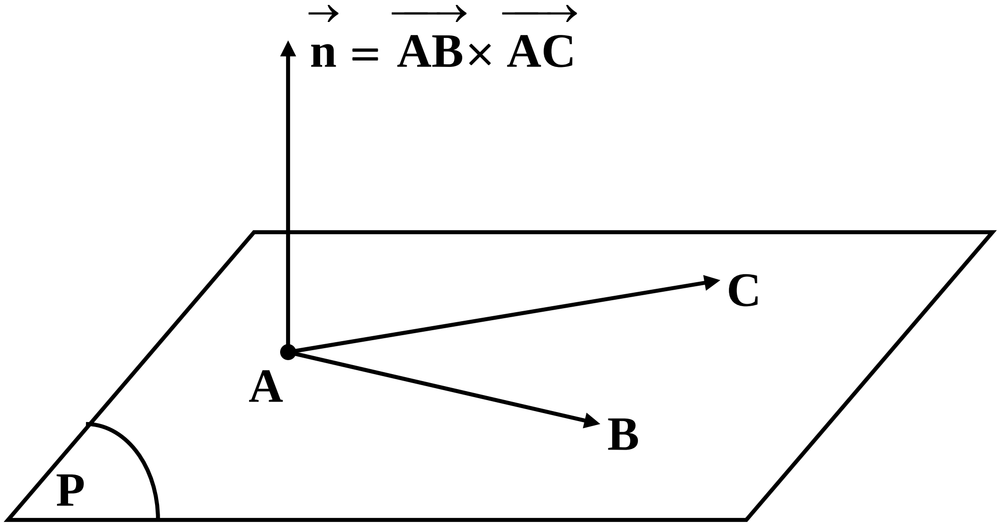
$(P): -1(x-1)-2(y+3)+2(z-3)=0$

$(P): -x+1-2y-6+2z-6=0$

$(P): -x-2y+2z-11=0$

ដូចនេះ $(P): x+2y-2z+11=0$ ។

៦- សមីការប្លង់កាត់តាមបីចំនុចមិនរត់ត្រង់គ្នា



លំហមានតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ គេមានបីចំនុច $A(x_A;y_A;z_A);B(x_B;y_B;z_B)$ និង $C(x_C;y_C;z_C)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

និង $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A\end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(a;b;c)$

បើត្រីធាតុ (a;b;c) មិនសូន្យព្រមគ្នានោះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq O$

នាំឲ្យបីចំនុច A ; B ; C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

ដូចនេះតាមបីចំនុចមិនរត់ត្រង់គ្នានេះគេអាចកំនត់បាន

សមីការប្លង់(ABC)មួយដែលមានវិុចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(a\,;\,b\,;\,c)$ ។ សមីការនេះអាចសរសេរ

$(ABC):\quad a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបីចំនុច $A(-1\,,-1\,,0\,)\,;B(0;-3\,;1)\,;\,C(3\,;-1\,;-2)$

ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ?

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ របស់ប្លង់ (ABC)

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (1\,;-2\,;1)$ និង $\overrightarrow{AC} = (4\,;0\,;-2)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4\,;6\,;8)$

សមីការប្លង់នេះអាចសរសេរ

$$(ABC):\quad a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$4(x+1) + 6(y+1) + 8(z-0) = 0$$

$$4x + 4 + 6y + 6 + 8z = 0$$

$$4x + 6y + 8z + 10 = 0$$

$$2x + 3y + 4z + 5 = 0$$

ដូចនេះ $(ABC):\ 2x + 3y + 4z + 5 = 0$ ។

៧- សមីការប្លង់កាត់តាមបន្ទាត់មួយហើយស្របនឹងបន្ទាត់មួយទៀត

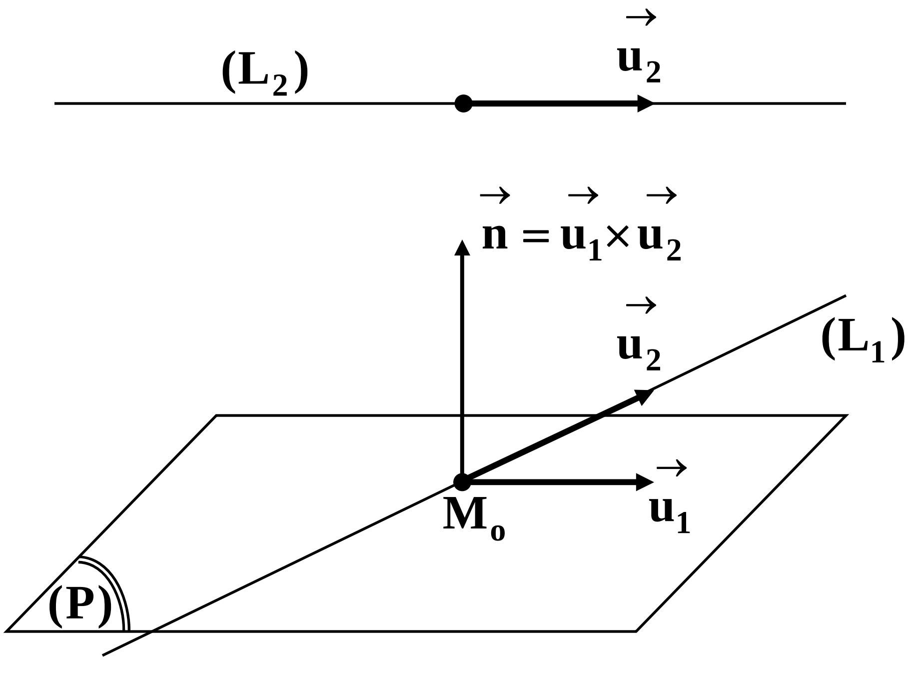
គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) មានសមីការរៀងគ្នា

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ និង } \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម(L_1)ហើយស្រប

នឹងបន្ទាត់ (L_2) ។

របៀបដោះស្រាយ



- បន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា

$$\vec{u_1}=(a_1,b_1,c_1) \text{ និង } \vec{u_2}=(a_2\,,b_2\,,c_2)$$

-តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P)កាត់តាម(L_1) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L_2) ។

គេបាន $\vec{n}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=(a\,;b\,;c)$ ។

-យក $M_0\in(L_1)$ ដែល $M_0(x_1;y_1;z_2)$

-គេបាន $M_0\in(P)$ ។ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ $(P):a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) មានសមីការរៀងគ្នា

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ និង $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{2}$

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម(L_1)ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

បន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា

$\vec{u}_1 = (2\,;-2\,;-1)$ និង $\vec{u}_2 = (-1\,;-2\,;2)$

-តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L_2) ។

គេបាន $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

គេទាញ $\vec{n} = (-6\,;-3\,;-6)$ ។

-យក $M_0 \in (L_1)$ ដែល $M_0(1;-1;3)$

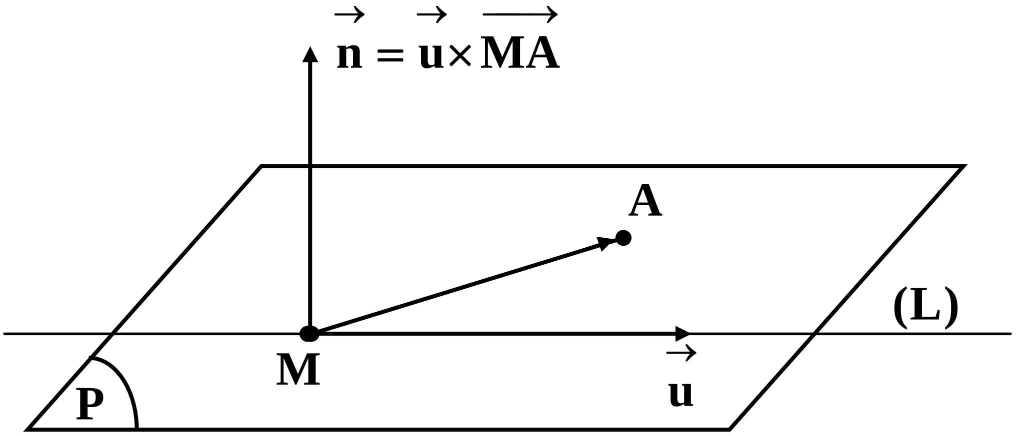
-គេបាន $M_0 \in (P)$ ។ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ $(P): a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

$$(P): -6(x-1)-3(y+1)-6(z-3)=0$$

$$(P): -6x-3y-6z+21=0$$

ដូចនេះ $(P): 2x+y+2z-7=0$ ។

៨-សមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់មួយ និងចំនុចមួយមិនស្ថិតនៅលើ បន្ទាត់នោះ



គេឲ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ និងចំនុច $A(x_A ; y_A ; z_A)$ ដែល $A \notin (L)$ ។

កំនត់សមីការប្លង់(P) កំនត់ដោយបន្ទាត់(L)និង A,

របៀបដោះស្រាយ

-បន្ទាត់ (L) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a;b;c)$

-យក $M \in (L)$ ដែល $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$

គេបាន $\overrightarrow{AM} = (x_0 - x_A ; y_0 - y_A ; z_0 - z_A)$

- តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P) កំនត់ដោយ បន្ទាត់(L)និងចំនុច A ។

គេបាន $\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ x_0-x_A & y_0-y_A & z_0-z_A\end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=(\alpha\,;\beta\,;\gamma\,)$ ។

- ដោយ $A\in(P)$ ដូចនេះសមីការរបស់ប្លង់ (P)អាច សរសេរ $(P):\alpha(x-x_A)+\beta(y-y_A)+\gamma(z-z_A)=0$ ។

ឧទាហរណ៏

គេឲ្យបន្ទាត់ $(L):\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{6}$ និងចំនុច $A(4;4\,;\,5\,)$ ។ កំនត់សមីការប្លង់(P) កំនត់ដោយ បន្ទាត់(L)និងចំនុច A។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការប្លង់(P)

បន្ទាត់ (L) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(2;-3;6)$

យក $M \in (L)$ ដែល $M(1\,;-2;\,3)$

គេបាន $\overrightarrow{AM} = (-3\,;-6\,;-2\,)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P) កំនត់ដោយ

បន្ទាត់(L)និងចំនុច A ។

គេបាន $\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ -3 & -6 & -2 \end{vmatrix}$

នាំឲ្យ $\vec{n} = (42\,;-14;-21\,)$ ។

ដោយ $A \in (P)$ ដូចនេះសមីការរបស់ប្លង់ (P)អាច

សរសេរ $(P): 42(x-4) - 14(y-4) - 21(z-5) = 0$

$$6(x-4) - 2(y-4) - 3(z-5) = 0$$

$$6x - 24 - 2y + 8 - 3z + 15 = 0$$

$$6x - 2y - 3z - 1 = 0$$

ដូចនេះ $(P): 6x - 2y - 3z - 1 = 0$ ។

៩-សមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នា

គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) មានសមីការរៀងគ្នា

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ និង } \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

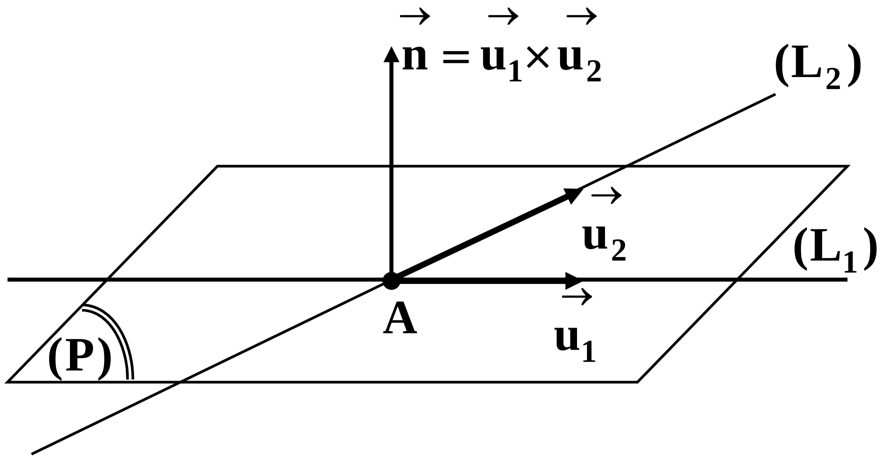
សន្មតថាបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច

មួយ $A(x_A;y_A;z_A)$ ។

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (P) កំនត់ដោយ (L_1) និង (L_2)

ប្រសព្វគ្នា ។

របៀបដោះស្រាយ



- បន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា

$$\vec{u_1}=(a_1,b_1,c_1) \text{ និង } \vec{u_2}=(a_2 , b_2 , c_2)$$

-តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P)

គេបាន $\vec{n}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=(a\,;b\,;c)$ ។

-គេបាន $A\in(P)$ ។ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាច

សរសេរ $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបន្ទាត់(L_1) និង (L_2) មានសមីការរៀងគ្នា

$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+5}{4}$ និង $\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-4}{-1}$

រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L_1)និង(L_2)

រួចសរសេរសមីការប្លង់(P) កំនត់ដោយ(L_1)និង(L_2)

ប្រសព្វគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A

តាងចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$

ដោយ $A \in (L_1) \Rightarrow \frac{x_A - 5}{-2} = \frac{y_A + 4}{3} = \frac{z_A + 5}{4} = t_1$

គេទាញ $\begin{cases} x_A = -2t_1 + 5 \\ y_A = 3t_1 - 4 \quad (1) \\ z_A = 4t_1 - 5 \end{cases}$

ដោយ $A \in (L_2) \Rightarrow \frac{x_A + 1}{2} = \frac{y_A - 5}{-3} = \frac{z_A - 4}{-1} = t_2$

គេទាញ $\begin{cases} x_A = 2t_2 - 1 \\ y_A = -3t_2 + 5 \quad (2) \\ z_A = -t_2 + 4 \end{cases}$

ផ្ទឹមសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$$\begin{cases} -2t_1 + 5 = 2t_2 - 1 \\ 3t_1 - 4 = -3t_2 + 5 \\ 4t_1 - 5 = -t_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 + t_2 = 3 \\ 4t_1 + t_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ 4t_1 + t_2 = 9 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $t_1 = 2 ; t_2 = 1$

យកតម្លៃ $t_1 = 2$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $A(1 ; 2 ; 3)$ ។

សរសេរសមីការប្លង់(P)

-បន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា

$\vec{u_1}=(-2,3,4)$ និង $\vec{u_2}=(2,-3,-1)$

-តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P)

គេបាន $\vec{n}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 4\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}$

គេទាញ $\vec{n}=(9\,;6\,;0)$ ។

សមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ

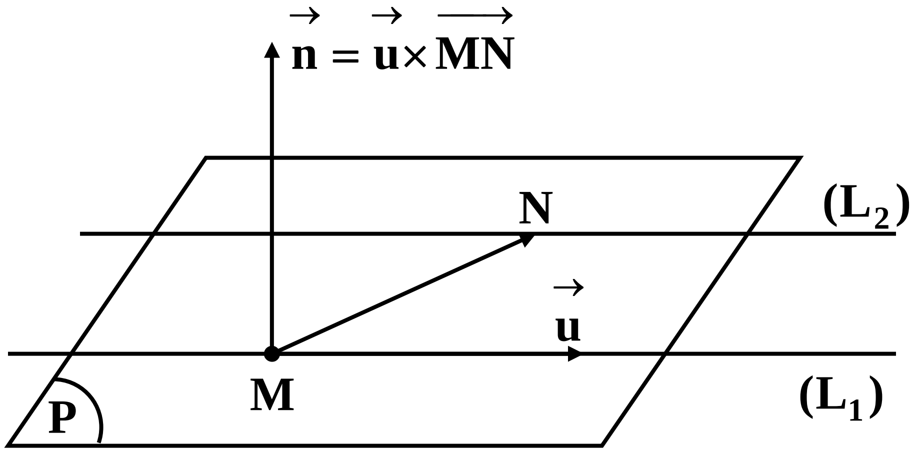
$(P):9(x-1)+6(y-2)+0(z-3)=0$

$(P):9x+6y-21=0$

$(P):3x+2y-7=0$

ដូចនេះ $(P):3x+2y-7=0$ ។

១០-សមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា



គេឲ្យបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា (L_1) & (L_2) ដែលមានសមីការ

$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ និង $\frac{x - x_2}{a} = \frac{y - y_2}{b} = \frac{z - z_2}{c}$

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (P) កំនត់ដោយបន្ទាត់ ស្របគ្នា (L_1) & (L_2) ខាងលើនេះ ។

របៀបដោះស្រាយ

-វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ស្របគ្នា (L_1) & (L_2) គឺ

$\vec{u} = (a\,;b\,;c)$ ។

-យក $M \in (L_1)$ និង $N \in (L_2)$ ដែល $M(x_1; y_1; z_1)$

និង $N(x_2;y_2;z_2)$ ។

-គេមាន $\overrightarrow{MN}=(x_2-x_1\,;y_2-y_1\,;z_2-z_1\,)$

- តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

គេបាន $\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{MN}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ ។

-ដោយ $M\in(P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ

$$(P):\ \alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)=0$$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា $(L_1)\,\&\,(L_2)$ ដែលមានសមីការ

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{6}$ និង $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{6}$

ចូរកំនត់សមីការប្លង់ (P) កំនត់ដោយបន្ទាត់ ស្របគ្នា $(L_1)\,\&\,(L_2)$ ខាងលើនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការប្លង់ (P)

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ស្របគ្នា (L_1) & (L_2) គឺ

$\vec{u} = (2\,;3\,;6)$ ។

-យក $M \in (L_1)$ និង $N \in (L_2)$ ដែល $M(-1;1;2)$

និង $N(2;-5;4)$ ។

-គេមាន $\overrightarrow{MN} = (-3\,;6\,;-2)$

- តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

គេបាន $\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

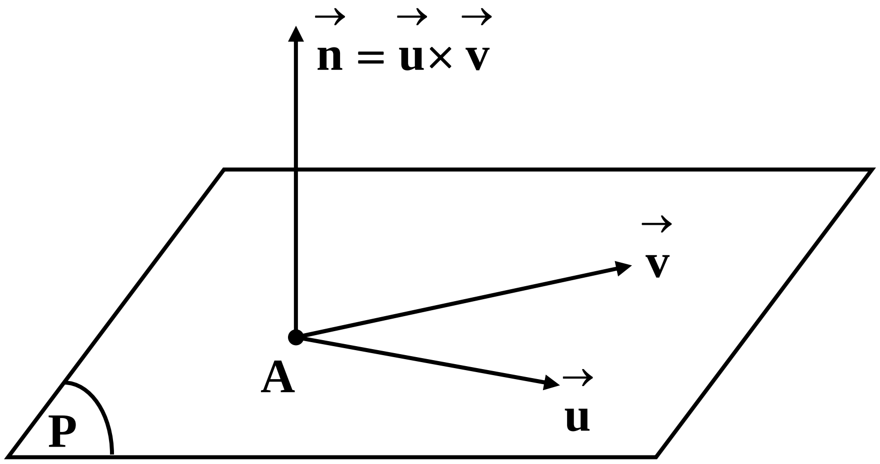
ឬ $\vec{n} = (-42\,;-14\,;21)$ ។

-ដោយ $M \in (P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ

$$(P):\ -42(x+1) - 14(y-1) + 21(z-2) = 0$$

ឬ $(P): 6x + 2y - 3z + 10 = 0$ ។

១១-សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយហើយស្គាល់វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសពីរ



គេមានវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ និង $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

ជាវ៉ិចទ័រមិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។

កំនត់សមីការប្លង់កាត់តាម $A(x_A; y_A; z_A)$ ហើយមាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

របៀបដោះស្រាយ

- តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

គេបាន $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ ។

-ដោយ $A\in(P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់(P) អាចសរសេរ

$(P):\ \alpha(x-x_A)+\beta(y-y_A)+\gamma(z-z_A)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

គេមានវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{u}=(1,-2,2)$ និង $\vec{v}=(2\,,2,1)$

ជាវ៉ិចទ័រមិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។

កំនត់សមីការប្លង់កាត់តាម $A(-2\,;3\,;4)$ ហើយមាន

វ៉ិចទរ័ប្រាប់ទិស $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P)

គេបាន $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$

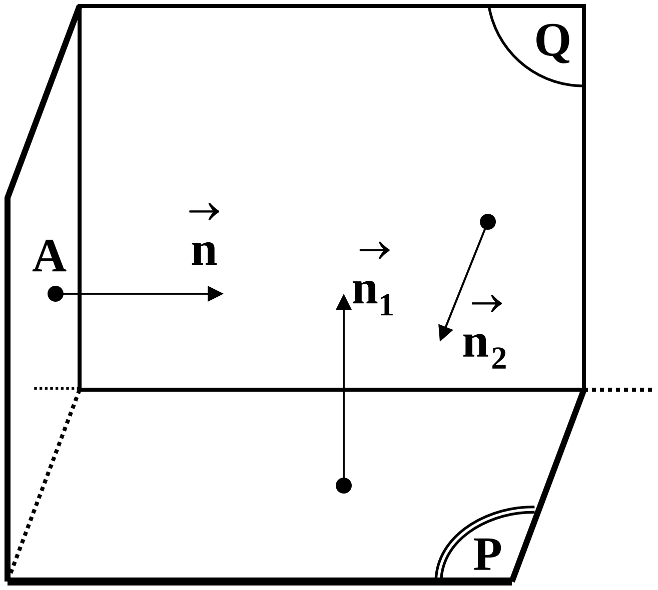
ឬ $\vec{n}=(-6\,;3\,;6)$ ។

ដោយ $A\in(P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់(P) អាចសរសេរ

$$(P):\ \alpha(x-x_A)+\beta(y-y_A)+\gamma(z-z_A)=0$$
$$-6(x+2)+3(y-3)+6(z-4)=0$$
$$-2(x+2)+(y-3)+2(z-4)=0$$
$$-2x-4+y-3+2z-8=0$$
$$-2x+y+2z-15=0$$

ដូចនេះ $(P): 2x-y-2z+15=0$ ។

១២-សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយហើយកែងទៅនឹងប្លង់ពីរ



គេមានប្លង់ពីរ (P) និង (Q) មានសមីការរៀងគ្នា

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ និង $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

រកសមីការប្លង់ (R) កាត់តាម $A(x_A, y_A, z_A)$ ហើយកែង រួមទៅនឹងប្លង់(P) និង (Q) ខាងលើ ។

របៀបដោះស្រាយ

- ប្លង់ (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា

$\overrightarrow{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$ និង $\overrightarrow{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$

- តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(R)

ដោយ (R) ជាប្លង់កែងរួមទៅនឹងប្លង់(P) និង(Q)

ខាងលើ នោះគេបាន $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=(\alpha;\beta;\gamma)$ ។

-ដោយ $A\in(P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់(P) អាចសរសេរ

$(P):\ \alpha(x-x_A)+\beta(y-y_A)+\gamma(z-z_A)=0$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានប្លង់ $(P): x-2y+2z-6=0$

និងប្លង់ $(Q): 2x+2y+z-8=0$ ។

រកសមីការប្លង់ (R) កាត់តាម $A(-2,3,4)$ ហើយកែង

រួមទៅនឹងប្លង់(P) និង (Q) ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការប្លង់ **(R)**

ប្លង់ **(P)** និង **(Q)** មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា

$\overrightarrow{n_1} = (1;-2;2)$ និង $\overrightarrow{n_2} = (2;2;1)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ **(R)**

គេបាន $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

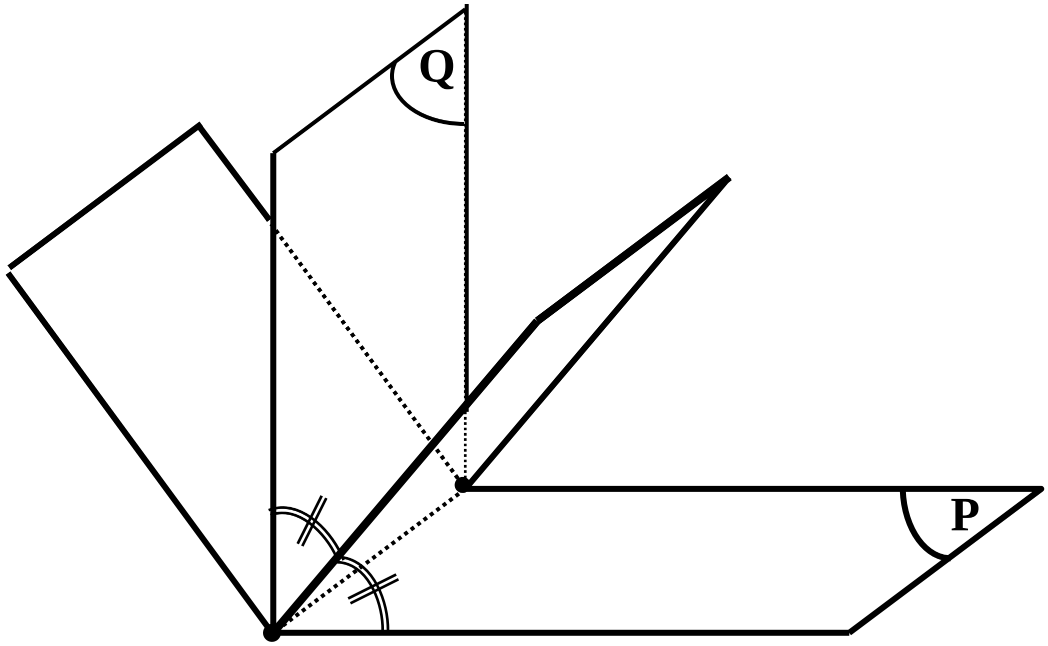
ឬ $\vec{n} = (-6\,;3\,;6)$ ។

ដោយ $A \in (P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់ **(P)** អាចសរសេរ

$$(P):\ \alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) = 0$$
$$-6(x+2) + 3(y-3) + 6(z-4) = 0$$
$$-2(x+2) + (y-3) + 2(z-4) = 0$$
$$-2x - 4 + y - 3 + 2z - 8 = 0$$
$$-2x + y + 2z - 15 = 0$$

ដូចនេះ $(P): 2x - y - 2z + 15 = 0$ ។

១៣-សមីការប្លង់ពុះមុំផ្គុំដោយប្លង់ពីរ



គេមានប្លង់ពីរ (P) និង (Q) មានសមីការរៀងគ្នា

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ និង $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

រកសមីការប្លង់ (R) ដែលជាប្លង់ពុះមុំផ្គុំដោយប្លង់ទាំងពីរ(P) និង (Q) ។

របៀបដោះស្រាយ

-តាង $M(x;y;z) \in (R)$

-ដោយ(R)ជាប្លង់ពុះមុំផ្គុំដោយប្លង់ (P) និង (Q)

នោះគេបាន $d(M;(P))=d(M;(Q))$

ឬ $\frac{|a_1x+b_1y+c_1z+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2z+d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$ (*)

-តាមរយៈសមីការ (*) គេអាចទាញបានសមីការប្លង់ពីរគឺ (R_1) និង (R_2) ដែលជាប្លង់ពុះមុំក្នុងនិងមុំក្រៅនៃមុំផ្គុំដោយ ប្លង់ (P) និង (Q) ។

ឧទាហរណ៍ គេមានប្លង់ពីរ $(P): x+2y+2z-1=0$

និង $(Q):\ 7x+4y+4z+3=0$ ។

រកសមីការប្លង់ (R) ដែលជាប្លង់ពុះមុំផ្គុំដោយប្លង់ទាំងពីរ(P) និង (Q) ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $M(x;y;z)\in(R)$

ដោយ(R)ជាប្លង់ពុះមុំផ្គុំដោយប្លង់ (P) និង (Q)

នោះគេបាន $d(M;(P))=d(M;(Q))$

ឬ $\frac{|x+2y+2z-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|7x+4y+4z+3|}{\sqrt{7^2+4^2+4^2}}$

ឬ $\frac{|x+2y+2z-1|}{3}=\frac{|7x+4y+4z+3|}{9}$

ឬ $3|x+2y+2z-1|=|7x+4y+4z+3|$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l}3(x+2y+2z-1)=(7x+4y+4z+3)\\3(x+2y+2z-1)=-(7x+4y+4z+3)\end{array}\right.$

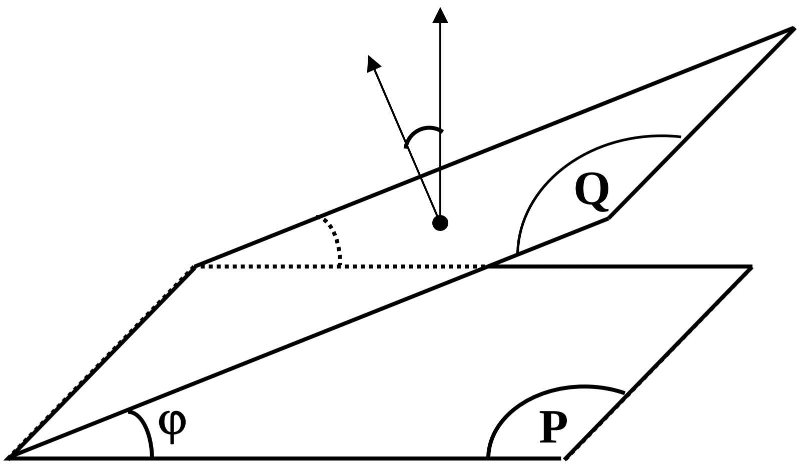
$$\left[\begin{array}{l}4x-2y-2z+6=0\\10x+10y+10z=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x-y-z+3=0\\x+y+z=0\end{array}\right.$$

ដូចនេះ $(R_1):2x-y-z+3=0$

និង $(R_2):x+y+z=0$ ។

១៨-សមីការប្លង់កាត់តាមពីរចំនុចហើយផ្គុំបានមុំមួយជាមួយប្លង់មួយ



គេឲ្យប្លង់ $(P): \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ និងពីរចំនុច

$A(x_A\,; y_A\,;z_A)$ និង $B(x_B\,;y_B\,; z_B)$ ។

រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមពីរចំនុច A និង B

ហើយផ្គុំបានមុំ φ ជាមួយនឹងប្លង់ (P) ។

របៀបដោះស្រាយ

-តាង $(Q): ax+by+cz+d=0$

-ដោយ(Q) កាត់តាមពីរចំនុច A និង B នោះគេបាន

$$\begin{cases} ax_A+by_A+cz_A+d=0 \ \ (1) \\ ax_B+by_B+cz_B+d=0 \ \ (2) \end{cases}$$

-តាង $\overrightarrow{n_1}$ និង $\overrightarrow{n_2}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ **(P)** និង **(Q)** គេបាន $\overrightarrow{n_1} = (\alpha, \beta, \gamma)$ និង $\overrightarrow{n_2} = (a, b, c)$

-ដោយ φ ជាមុំរវាងប្លង់ **(P)** និង **(Q)** នោះគេបាន

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1}.\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3)$$

-តាម (1) , (2) និង (3)គេបង្កើតបានជាប្រព័ន្ធសមីការមួយដែលអាចដោះស្រាយរកលេខមេគុណ **a; b;c** ជាអនុគមន៍នៃ **d** រួចជំនួសតម្លៃទាំងនោះក្នុងសមីការ**(P)** ហើយសម្រួល **d** ចោលគេនឹងទទួលបានសមីការនៃប្លង់ដែលត្រូវរកនោះ ។

ឧទាហរណ៍

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេឱ្យពីរចំនុច $A(0,-2,0)$ និង $B(1,-2,1)$ ។

(P) ជាប្លង់មានសមីការ $2x+2y+z+4=0$ ។

សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច A និង B ហើយផ្គុំជាមួយ

ប្លង់ (P) បានមុំស្រួចមួយមានតម្លៃ $\theta=\frac{\pi}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការប្លង់ (Q)

តាង $(Q): ax+by+cz+d=0$ ជាសមីការដែលត្រូវរក ។

ដោយប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច A និង B នោះកូអរដោនេចំនុច A

និង B ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការប្លង់ (Q) ។

គេបាន $\begin{cases} a(0)+b(-2)+c(0)+d=0 \\ a(1)+b(-2)+c(1)+d=0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} -2b+d=0 \\ a-2b+c+d=0 \end{cases}$

នាំឲ្យគេទាបាន $b=-\frac{d}{2}$ (1) និង $a=-c$ (2)

ម្យ៉ាងទៀតបើយើងតាង θ ជាមុំផ្គុំដោយប្លង់ (P) និង (Q)

នោះគេបាន :

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_P . \vec{n}_Q}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}$$ ដោយ $\vec{n}_P(2,2,1)$ និង $\vec{n}_Q(a,b,c)$

ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) និង (Q) គេបាន

$$\cos\theta = \frac{2a+2b+c}{\sqrt{2^2+2^2+1}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{2a+2b+c}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ដោយ $\theta = \frac{\pi}{4}$ (បំរាប់)

គេទាញ $$\frac{2a+2b+c}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

នាំឱ្យ $2(2a+2b+c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2)$ (3)

យកសមីការ (1) និង (2) ជួសក្នុង (3) គេបាន :

$$2(-2c+d+c)^2 = 9(c^2+\frac{d^2}{4}+c^2)$$

$$2(-c+d)^2 = 9(2c^2+\frac{d^2}{4})$$

$$2(c^2-2cd+d^2) = 18c^2+\frac{9}{4}d^2$$

$$2c^2 - 4cd + 2d^2 - 18c^2 - \frac{9}{4}d^2 = 0$$

$$-16c^2 - 4cd - \frac{d^2}{4} = 0$$

$$16c^2 + 4cd + \frac{d^2}{4} = 0$$

$$\left(4c + \frac{d}{2}\right)^2 = 0$$ នាំឱ្យ $c = -\frac{d}{8}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញ $b = \frac{d}{2}$ និង $a = \frac{d}{8}$ ។

យកតម្លៃ $a = \frac{d}{8}$,$b = \frac{d}{2}$ និង $c = -\frac{d}{8}$ ជួសក្នុងសមីការប្លង់ (Q)

គេបាន $(Q): \frac{d}{8}x + \frac{d}{2}y - \frac{d}{8}z + d = 0$

ឬ $(Q): x + 4y - z + 8 = 0$ ។

ដូចនេះសមីការប្លង់ (Q) ដែលត្រូវរកគឺ $(Q): x + 4y - z + 8 = 0$ ។

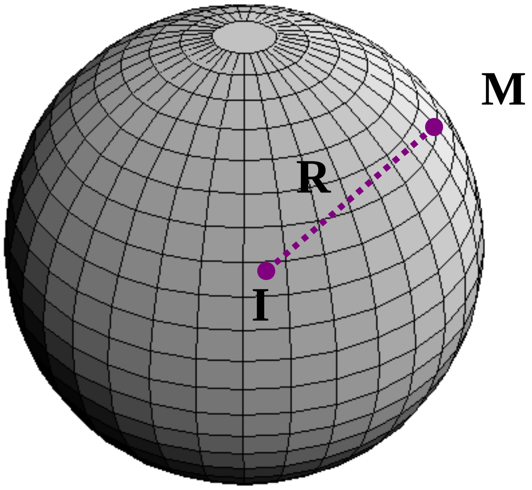
✍ ✍ ✍ ✍ ✍

ជំពូកទី៦

របៀបសរសេរសមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ

១-សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់ផ្ចិត និង រង្វាស់កាំ

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ចូរសរសេរសមីការរបស់ស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត $I(a, b, c)$ និងកាំរង្វាស់ R ។



តាង $M(x;y;z)\in(S)$ គេបាន $|\overrightarrow{IM}|^2=R^2$

ដោយ $\overrightarrow{IM}=(x-a\,;y-b\,;z-c\,)$

ដូចនេះ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ជាសមីការ

នៃស្វ៊ែ ដែលមានផ្ចិត $I(a,b\,,c\,)$ និងកាំរង្វាស់ R ។

ឧទាហរណ៍

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត $I(1;2;3\,)$

និងកាំ $R=4$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S)

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

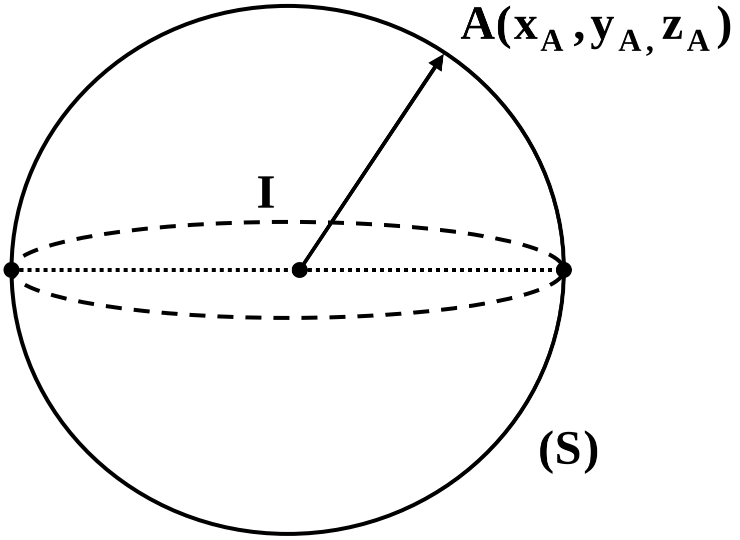
គេបាន $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9-16=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$$

ដូចនេះ $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ ។

២-សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់ផ្ចិតហើយកាត់តាមចំនុចមួយ



គេឲ្យចំនុច $I(a, b, c)$ និង $A(x_A, y_A, z_A)$ ។
ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត I ហើយ
កាត់តាមចំនុច A ។

របៀបដោះស្រាយ

-តាង R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែ (S) គេបាន $R = |\overrightarrow{IA}|$

ដោយ $\overrightarrow{IA} = (x_A - a; y_A - b; z_A - c)$

នោះ $R = |\overrightarrow{IA}| = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 + (z_A - c)^2}$

-ប្រើរូបមន្ត $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

ឧទាហរណ៍

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត $I(1;2;3)$
ហើយកាត់តាមចំនុច $A(-5;-1;1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S)

តាង R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែ (S) គេបាន $R=|\overrightarrow{IA}|$

ដោយ $\overrightarrow{IA}=(-6\,;-3\,;-2)$

គេបាន $R=|\overrightarrow{IA}|=\sqrt{36+9+4}=7$

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

គេបាន $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=49$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9-49=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-35=0$$

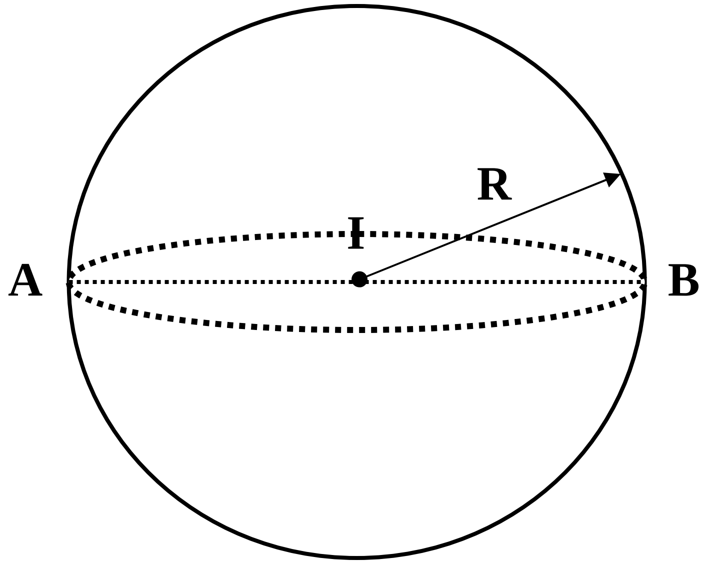
ដូចនេះ $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-35=0$

៣-សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់ចំនុចចុងទាំងពីរនៃអង្កត់ផ្ចិត

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់គេឲ្យពីរចំនុច

$A(x_A;y_A;z_A)$ និង $B(x_B;y_B;z_B)$ ។

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ(S) មានអង្កត់ផ្ចិត$[AB]$



-តាង I ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S) នោះ I ជាចំនុចកណ្តាល នៃអង្កត់ $[AB]$ ។

គេបាន $I(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2})$

-តាង R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែនោះ $R=\frac{AB}{2}$

-ប្រើរូបមន្ត $(S):(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$,

ឧទាហរណ៍

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $A(1;2;3)$ និង $B(3;6;-1)$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S)

តាង I ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S) នោះ I ជាចំនុចកណ្តាល នៃអង្កត់ [AB] ។

គេបាន $I(2;4;1)$

តាង R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែនោះ $R=\frac{AB}{2}$

$$R=\frac{\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2+(-1-3)^2}}{2}=3$$

តាមរូបមន្ត $(S):(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$

គេបាន $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$

$$x^2-4x+4+y^2-8y+16+z^2-2z+1-9=0$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-8y-2z+12=0$$

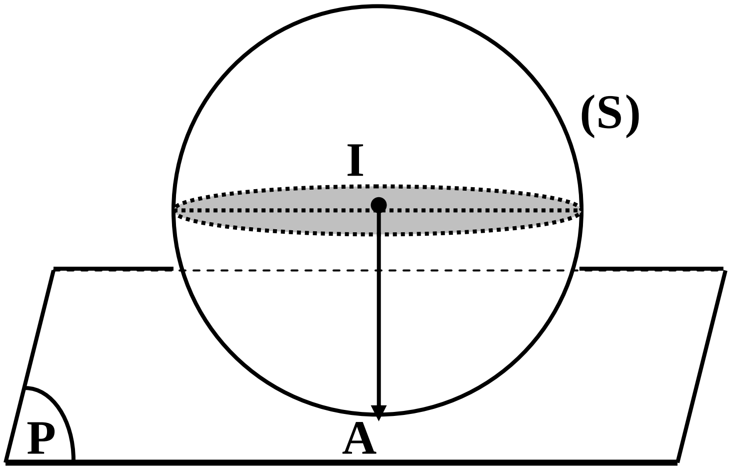
ដូចនេះ $(S):x^2+y^2+z^2-4x-8y-2z+12=0$ ។

៨-សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់ផ្ចិតហើយប៉ះនឹងប្លង់មួយ

គេឲ្យប្លង់ $(P): ax + by + cz + d = 0$ ។

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(x_I, y_I, z_I)$

ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ។



-តាង R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែ (S) ។

ដោយស្វ៊ែនេះ ប៉ះនឹងប្លង់ (P) នោះ $R = d(I;P)$

ឬ $R = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

-ប្រើរូបមន្ត $(S): (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$

ឧទាហរណ៍

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត I(1;2;3)

ហើយប៉ះនឹងប្លង់ $(P): x+2y+2z+4=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S)

តាង R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែ (S) ។

ដោយស្វ៊ែនេះ ប៉ះនឹងប្លង់ (P) នោះ $R = d(I;P)$

ឬ $R = \dfrac{|x_I + 2y_I + 2z_I + 4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$

$= \dfrac{|1+4+6+4|}{\sqrt{9}} = 5$

តាមរូបមន្ត $(S): (x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2$

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$

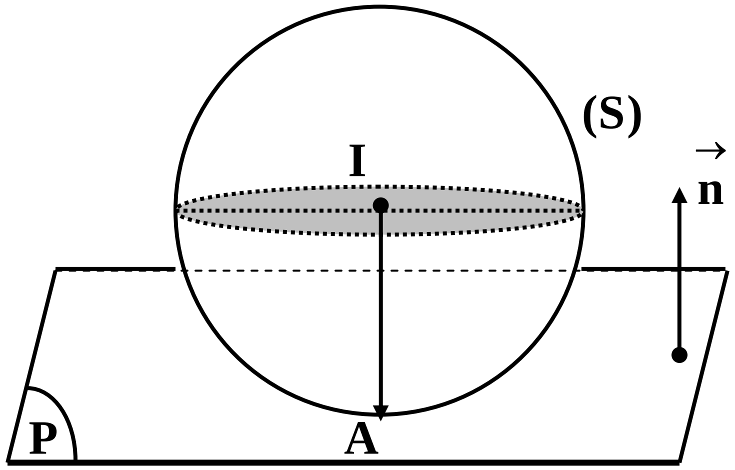
ដូចនេះ $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ ។

៥-សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់កាំហើយប៉ះទៅនឹងប្លង់ត្រង់ចំនុចមួយ

គេឲ្យប្លង់ $(P): ax+by+cz+d=0$ ។

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) មាន R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែ

ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច $A(x_A;y_A;z_A)$



-តាង ផ្ចិត $I(x_I ,y_I ,z_I)$ របស់ស្វ៊ែ (S)

គេបាន $\overrightarrow{IA}=(x_A-x_I\,;y_A-y_I;z_A-z_I\,)$

-ដោយស្វ៊ែនេះ ប៉ះនឹងប្លង់ (P) គេបាន $\overrightarrow{IA}//\vec{n}$

នោះ $\overrightarrow{IA}=t\,\vec{n}\Rightarrow|\overrightarrow{IA}|=|t|.|\vec{n}|=R\Rightarrow t=\pm\dfrac{R}{|\vec{n}|}$

-ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{IA} = t.\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x_A - x_I = at \\ y_A - y_I = bt \\ z_A - z_I = ct \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = x_A - at \\ y_I = y_A - bt \\ z_I = z_A - ct \end{cases} \quad (1)$$

-យកតម្លៃ $t = \pm \frac{R}{|\vec{n}|}$ ជំនួសក្នុង (1)គេអាចរកឃើញ

កូអរដោនេផ្ចិត I របស់ស្វ៊ែ (S) ។

-ប្រើរូបមន្ត $(S): (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$

ឧទាហរណ៍

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានកាំ $R = 3$

ហើយប៉ះនឹងប្លង់ $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$

ត្រង់ចំនុច $A(-1\,;1\,;-2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S)

តាង $I(a;b;c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S)

គេបាន $\overrightarrow{AI} = (a+1\,;b-1\,;c+2\,)$ ។

ដោយស្វ៊ែនេះ ប៉ះនឹងប្លង់ (P) គេបាន $\overrightarrow{IA} // \vec{n}$

នោះ $\overrightarrow{IA} = t\,\vec{n} \Rightarrow |\overrightarrow{IA}| = |t|.|\vec{n}| = R \Rightarrow t = \pm \dfrac{R}{|\vec{n}|}$

ដោយ $R = 3$ និង $|\vec{n}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

ដូចនេះ $t = \pm 1$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AI} = t.\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} a+1 = t \\ b-1 = 2t \\ c+2 = 2t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = t-1 \\ b = 2t+1 \quad (1) \\ c = 2t-2 \end{cases}$$

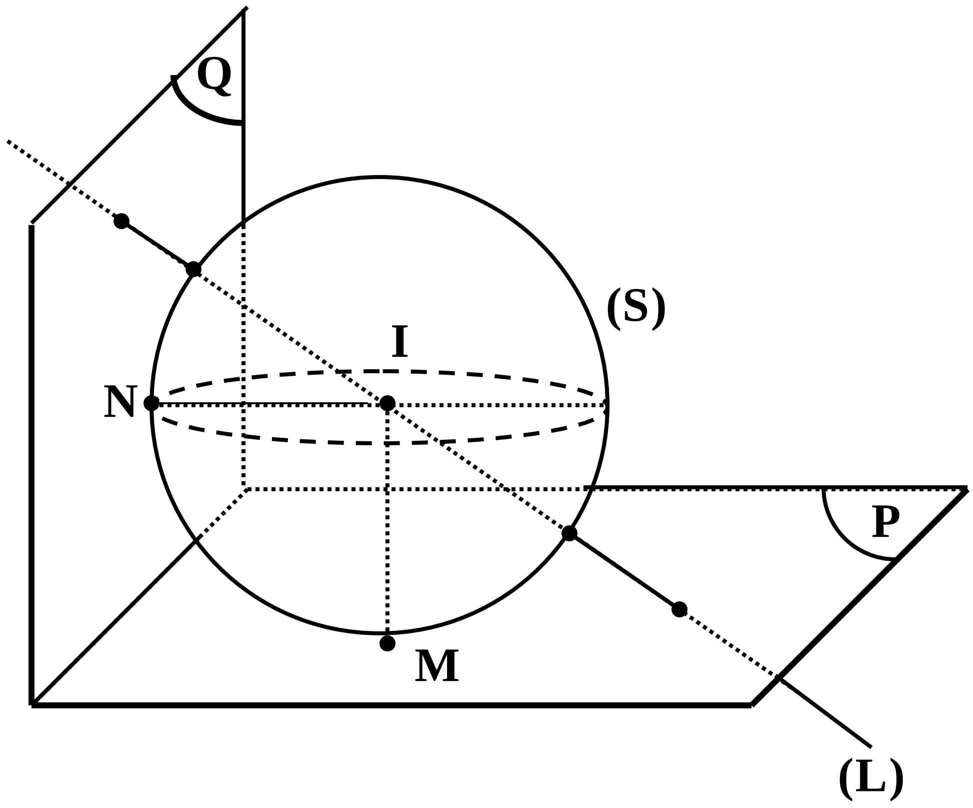
ចំពោះ $t = 1$ តាម (1) គេបាន $I_1(0;3;0)$

ដូចនេះសមីការស្វ៊ែ $(S_1): x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$

ចំពោះ $t = -1$ តាម (1) គេបាន $I_2(-2;-1;-4)$

ដូចនេះសមីការស្វ៊ែ $(S_2): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 9$

៦-សមីការស្វ៊ែមានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់មួយហើយប៉ះទៅនឹងប្លង់ពីរ



គេឲ្យប្លង់ពីរ $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

និង $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ហើយ (L) ជាបន្ទាត់

មានសមីការ $(L): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ ។

ចូរកំនត់សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិតនៅលើ(L)

ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (P) និង (Q) ។

របៀបដោះស្រាយ

-តាង $I(x_I\,;\,y_I\,;\,z_I)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S)

-ដោយ $I\in(L)\Rightarrow\dfrac{x_I-x_0}{a}=\dfrac{y_I-y_0}{b}=\dfrac{z_I-z_0}{c}=t$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_I=x_0+at\\ y_I=y_0+bt\\ z_I=z_0+ct\end{cases}\qquad(1)$$

-ដោយ (S) ប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (P) និង (Q)

នោះគេបាន $d(I;P)=d(I;Q)\quad(2)$

-តាមសមភាព (2) គេអាចបង្កើតសមីការដែលអាចដោះស្រាយរកឃើញ t រួចយកតម្លៃរបស់ t នោះជំនួសក្នុង (1) គេអាចរកឃើញកូអរដោណេផ្ចិត I

-កំនត់រង្វាស់កាំតាមសមភាព $R=d(I;P)=d(I;Q)$

-ប្រើរូបមន្ត $(S):(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យប្លង់ពីរ $(P): x+2y+2z-2=0$

និង $(Q): 2x-2y+z+8=0$ ហើយ (L) ជាបន្ទាត់

មានសមីការ $(L): \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ ។

ចូរកំនត់សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិតនៅលើ(L)

ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការស្វ៊ែ (S)

តាង $I(a\,;b\,;c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S)

$$I\in(L)\Rightarrow \frac{a-3}{-2}=\frac{b+1}{3}=c-2=t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-2t+3\\ b=3t-1\\ c=t+2\end{cases}\qquad (1)$$

ចម្ងាយពីផ្ចិត I ទៅប្លង់ (P) និង (Q) គឺ

$$d(I;P)=\frac{|-2t+3+6t-2+2t+4-2|}{\sqrt{1+4+4}}=|2t+1|$$

$$d(IQ)=\frac{|-4t+6-6t+2+t+2+8|}{\sqrt{4+4+1}}=|-3t+6|$$

ដើម្បីឲ្យស្វ៊ែ (S) ប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (P) និង (Q)

លុះត្រាតែ $d(I;P)=d(I;Q)$

ឬ $|2t+1|=|-3t+6|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2t+1=-3t+6\\2t+1=3t-6\end{array}\right.$

គេទាញ $t_1=1$; $t_2=7$ ។

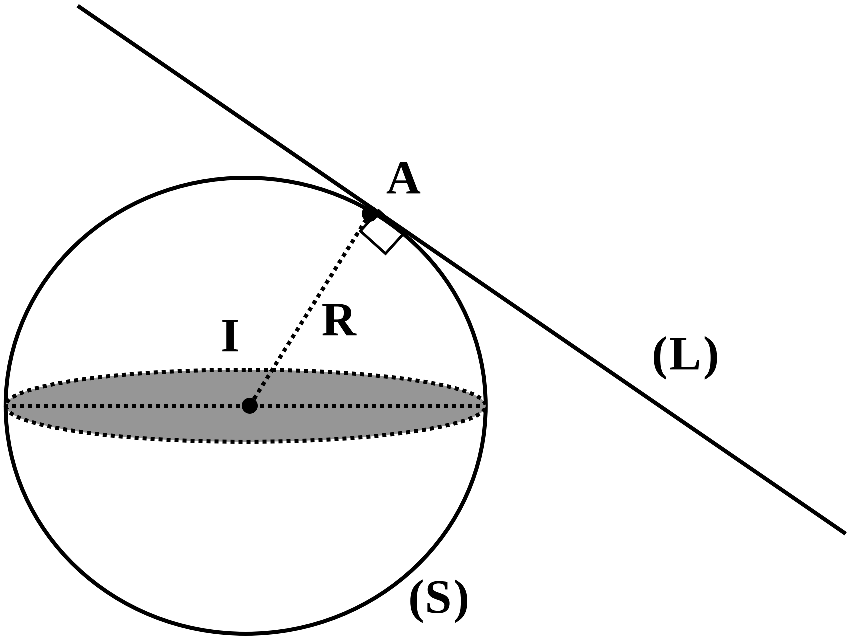
-ចំពោះ $t=1$ គេបាន $I_1(1\ ;\ 2\ ;3)$ និង $R=|2(1)+1|=3$

ដូចនេះ $(S_1):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ ។

-ចំពោះ $t=7$ គេបាន $I_2(-11;20;9)$ និង $R=15$

ដូចនេះ $(S_2):(x+11)^2+(y-20)^2+(z-9)^2=225$

៧-សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់ផ្ចិតហើយប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់មួយ



គេឲ្យបន្ទាត់ $(L):\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_o}{c}$ ។

រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $I(x_I,y_I,z_I)$ ហើយប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ (L) ។

របៀបដោះស្រាយ

-រកកាំរបស់ស្វ៊ែ $R=d(I;L)$

-ប្រើរូបមន្ត $(S):(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}$

ចូររកសមីការស្វ៊ែ(S) មានផ្ចិត $I(1;-1;2)$ ហើយ

ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ (L) ,

ដំណោះស្រាយ

កំនត់សមីការស្វ៊ែ (S)

បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច $M_0(1;4;3)$

ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(-2;3;2)$ ។

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(1;-1;2)$ ។

ចម្ងាយពីចំនុច I ទៅបន្ទាត់ (L) គឺ

$$d(I;(L))=\frac{|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

ដោយ $\overrightarrow{IM_0}=(0;5;1)$

គេបាន $\overrightarrow{IM_0}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}=7\vec{i}-2\vec{j}+10\vec{k}$

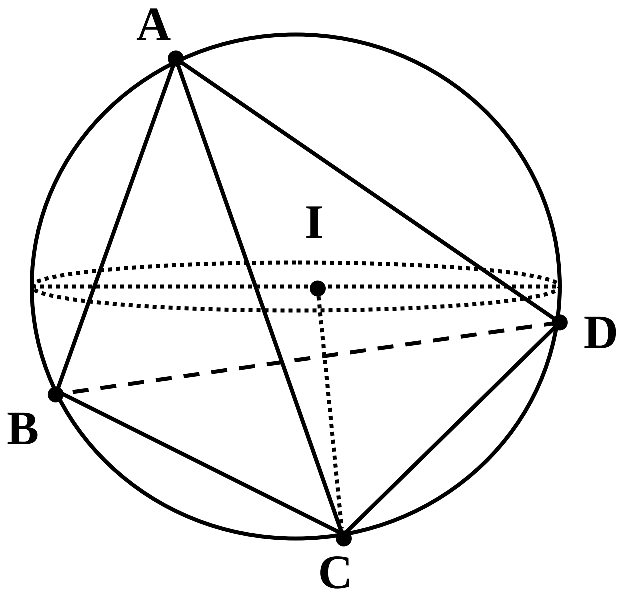
គេទាញ $d(I;(L))=\dfrac{\sqrt{7^2+(-2)^2+10^2}}{\sqrt{(-2)^2+3^2+2^2}}=\sqrt{\dfrac{153}{17}}=3$

ដោយស្វ៊ែ(S) ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ (L) នោះគេបាន

$R=d(I;(L))=3$ (កាំរបស់ស្វ៊ែ)

ដូចនេះ $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ ។

៨-សមីការស្វ៊ែកាត់តាមបួនចំនុចមិនកូប្លាន៉ែ



ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរត្តូណរម៉ាល់គេមានបួន
ចំនុច $A(x_A;y_A;z_A);B(x_B;y_B;z_B);C(x_C;y_C;z_C)$
និង $D(x_D;y_D;z_D)$ មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។
ចូរកំនត់សមីការស្វ៊ែកាត់តាមបួនចំនុចខាងលើនេះ ?

របៀបដោះស្រាយ

-ត្រូវតាងសមីការទូទៅរបស់ស្វ៊ែដូចខាងក្រោម

$$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

-ដោយស្វ៊ែ **(S)** កាត់តាមបួនចំនុច **A ; B ; C ; D** នោះកូអរ-ដោនេរបស់ចំនុច **A ; B ; C ; D** ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ **(S)**

-យកកូអរដោណេ **A ; B ; C ; D** ជំនួសក្នុងសមីការ **(S)** រួចគេបានប្រព័ន្ធសមីការដែលអាចដោះស្រាយរកឃើញតម្លៃរបស់ **a; b ; c ; d** ។

-យកតម្លៃ **a; b ; c ; d** ជំនួសក្នុងសមីការ **(S)** គេទទួលបានសមីការស្វ៊ែដែលត្រូវរក ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យបួនចំនុច $A(0,1,0)$; $B(2,1,0)$; $C(3,0,4)$ និង $D(1,-1,-1)$ ។

ចូរសរសេរសមីការស្វ៊ែកាត់តាមបួនចំនុច A, B, C, D

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការស្វ៊ែ

តាង $(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

ដោយស្វ៊ែ (S) កាត់តាមបួនចំនុច $A ; B ; C ; D$ នោះកូអរ-ដោនេរបស់ចំនុច $A ; B ; C ; D$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (S) ។

គេបាន $\begin{cases} 1 + b + d = 0 \\ 5 + 2a + b + d = 0 \\ 25 + 3a + 4c + d = 0 \\ 3 + a - b - c + d = 0 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $a = -2$, $b = 2$, $c = -4$, $d = -3$

ដូចនេះ $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$

ឬ $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ ។

ជំពូកទី៧

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំនុច $M_0(1,9,4)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{U} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ ។

ក.ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L)ដែលកាត់តាមចំនុច M_0 ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{U}$ ។

ខ. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំនុច O លើបន្ទាត់(L) ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចH រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច O ទៅបន្ទាត់ (L)ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L)

តាមរូបមន្តគេបាន:$(L): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ នាំឱ្យ $(L): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 9 + 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in IR$

ខ.គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច $\mathbf{H}$

តាង $\mathbf{H(x_H, y_H, z_H)}$ ដោយ $\mathbf{H \in (L)}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} \mathbf{x_H = 1 + 3t} \\ \mathbf{y_H = 9 + 6t} \\ \mathbf{z_H = 4 - 2t} \end{cases} \quad \mathbf{(1)}$

ដោយ $\mathbf{(OH) \perp (L)}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{\mathbf{OH}} \perp \vec{\mathbf{U}}$ សមមូល $\overrightarrow{\mathbf{OH}} \cdot \vec{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$

ដោយ $\overrightarrow{\mathbf{OH}} = \mathbf{(1 + 3t\ ,\ 9 + 6t\ \ ,\ 4 - 2t)}$ និង $\vec{\mathbf{U}} = \mathbf{3}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{6}\,\vec{\mathbf{j}} - \mathbf{2}\,\vec{\mathbf{k}}$ ។

គេបានប $\mathbf{3(1 + 3t) + 6(9 + 6t) - 2(4 - 2t) = 0}$ នាំឱ្យ $\mathbf{t = -1}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{H(-2,3,6)}}$ ។

ចំងាយពីគល់ O ទៅ $\mathbf{(L)}$ គឺ $\mathbf{d(O,(L)) = |\overrightarrow{OH}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7}$ ។

លំហាត់ទី២

ក្នុងតំរុយអរតូណម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យពីរចំនុច $A(-1,4,1)$ និង $B(5,-2,4)$ ។

ក- ចូរសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB) ។

ខ-គេគូសបន្ទាត់ (OH) កែងទៅនឹងបន្ទាត់ (AB) ត្រង់ចំនុច H

គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H រួចសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់(OH) ។

ដំណោះស្រាយ

ក- សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB)

គេមាន $(AB):\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$

ដូចនេះ $\boxed{(AB):\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z-1}{3}}$

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H និងសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់(OH)

តាង $H(x_H,y_H,z_H)$ ដោយ $H\in(L)$ នោះគេបាន:

$$\frac{x_H+1}{6}=\frac{y_H-4}{-6}=\frac{z_H-1}{3}=t \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases}x_H=6t-1\\ y_H=-6t+4\\ z_H=3t+1\end{cases}$$

ដោយ $(OH)\perp(AB) \Rightarrow \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=0$

តែ $\overrightarrow{OH} = (6t-1,-6t+4,3t+1)$ និង $\overrightarrow{AB} = (6,-6,3)$

គេបាន $6(6t-1)-6(-6y+4)+3(3t+1)=0$ នាំឱ្យ $t=\frac{1}{3}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{H(1\ ,\ 2\ ,\ 2) \text{ និង } (OH): x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៣

ក្នុងតំរុយអរតូណម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំនុច $A(5,5,-4)$

និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(-2,-3,6)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីកាប្លង់នៃ (P) កាត់តាមចំនុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។

ខ. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំនុច O លើប្លង់(P) ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចH រួចទាញរក ចំងាយពីចំនុច O ទៅប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសមីកាប្លង់នៃ (P)

តាមរូបមន្តគេបាន $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$(P): -2(x-5)-3(y-5)+6(z+4)=0$$

ដូចនេះ $\boxed{(P): -2x-3y+6z+49=0}$ ។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច**H**

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$

ដោយ $H \in (P)$ នោះ $-2x_H - 3y_H + 6z_H + 49 = 0 \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{OH} \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{OH} \,//\, \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = t.\vec{n}$

គេបាន $\begin{cases} x_H = -2t \\ y_H = -3t \quad (2) \\ z_H = 6t \end{cases} \Leftrightarrow -2(-2t) - 3(-3t) + 6(6t) + 49 = 0 \Rightarrow t = -1$

ដូចនេះ $\boxed{H(2,3,-6)}$ ។

គណនាចំងាយពីចំនុច **O** ទៅប្លង់ (P)

គេបាន $d(O,(p)) = \|\overrightarrow{OH}\|$

នាំឱ្យ $d(O,(p)) = \sqrt{x_H^{\ 2} + y_H^{\ 2} + z_H^{\ 2}} = \sqrt{4+9+36} = 7$ ។

លំហាត់ទី៤

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (P) មានសមីការៈ

$$(L):\frac{x+3}{2}=\frac{y+7}{5}=\frac{z+1}{3}$$ និង $(P): 2x-3y+4z-9=0$ ។

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (P) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីកាប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L') កែងនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច A ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (P)

គេមាន $\begin{cases}(L):\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z-1}{3}\\(P): 2x-3y+4z-9=0\end{cases}$

តាង $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z+1}{3}=t$ នាំឱ្យ $\begin{cases}x=2t-3\\y=5t-7\\z=3t-1\end{cases}\quad(1)$

យក (1)ជួសក្នុង (P) គេបានៈ

$$2(2t-3)-3(5t-7)+4(3t-1)-9=0\Rightarrow t=2$$

ដូចនេះ $\boxed{A(1,3,4)}$ ។

ខ-សរសេរសមីកាប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L') កែងនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច A

ដោយ (L') កែងនឹងប្លង់ (P) នោះ $\vec{n}=(2,-3,4)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L')

តាមរូបមន្តគេបាន : $(L'):\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-3t \\ z=4+4t \quad ,t\in IR \end{cases}$

លំហាត់ទី៩

ក្នុងតំរុយអរត្តូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបន្ទាត់ (L) គូសចេញពីចំនុច $M_0(3,1,-3)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{U}(2,-1,-6)$ ។

ក-ចូរសរសេរសំណុំសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ។

ខ-ពីចំនុច $A(-4,1,2)$ គូសបន្ទាត់ (AH) កែងទៅនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំនុច H ។

ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L) ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសំណុំសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L)

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម $M_0(3,1,-3)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{U}=(2,-1,-6)$ អាចសរសេរតាមរូបមន្ត

$$(L):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \ ,t \in IR \end{cases}$$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -3 - 6t \ ,t \in IR \end{cases}$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត :

$$(L): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ដូចនេះ $(L): \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 3}{-6}$ ។

ខ.គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H :

យើងតាង $H(x_H, y_H, z_H)$

ដោយ $H \in (L)$ នោះកូអរដោនេនៃចំនុច H ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (L)

គេបាន $\begin{cases} x_H = 3 + 2t \\ y_H = 1 - t \\ z_H = -3 - 6t \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp (L) \\ \vec{U} // (L) \end{cases}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH} \perp \vec{U}$ សមមូល $\overrightarrow{AH} . \vec{U} = 0$

ដោយ $\overrightarrow{AH} = (4 + 2t, -3 - t, -5 - 6t)$ និង $\vec{u} = (2, -1, -6)$

គេបាន $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 2(4+2t)-1.(-3-t)-6(-5-6t)=0$

$$8+4t+3+t+30+36t=0$$

$$41t+41=0$$

នាំឱ្យ $t=-1$ ។

ដូចនេះ $H(1,2,3)$ ។

ទាញរកចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L):

យើងបាន $d(A,(L)) = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2+(z_H-z_A)^2}$

$$= \sqrt{(1+1)^2+(2-4)^2+(3-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

ដូចនេះ $d(A,(L)) = 3$ (ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ទី៦

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ **(P)** មួយកាត់តាមចំនុច $A(3,2,-4)$ ហើយមានវិ៉ចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,3,6)$ ។

ក-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) ខាងលើ ។

ខ-ពីចំនុច $B(2,3,4)$ គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងប្លង់ (P) ($H\in(P)$) ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច **H** រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច **B** ទៅប្លង់ **(P)** ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការប្លង់(P)

សមីការប្លង់ **(P)** កាត់តាមចំនុច $A(3,2,-4)$ មានវិ៉ចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,3,6)$

សរសេរតាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$2(x-3)+3(y-2)+6(z+4)=0$$

$$2x-6+3y-6+6z+24=0$$

$$2x+3y+6z+12=0$$

ដូចនេះ $(P): 2x+3y+6z+12=0$ ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច **H**

តាង $H(x_H,y_H,z_H)$ ដោយ $H\in(P)$ នោះកូអរ័ដោនេចំនុច **H** ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ **(P)** ។

គេបាន $2x_H+3y_H+6z_H+12=0$ **(1)**

ដោយ $(BH)\perp(P)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{BH}//\vec{n_P}$

(ព្រោះ $\vec{n_P}\perp(P)$ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់)។

គេទាញ $\overrightarrow{BH}=t.\vec{n_P}$ តែ $\overrightarrow{BH}=(x_H-2,y_H-3,z_H-4)$

នាំឱ្យ $\begin{cases}x_H-2=2t\\ y_H-3=3t\\ z_H-4=6t\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_H=2t+2\\ y_H=3t+3\\ z_H=6t+4\end{cases}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន :

$2(2t+2)+3(3t+3)+4(6t+4+)+12=0$

$4t+4+9t+9+36t+24+12=0$

$49t+49=0$ នាំឱ្យ $t=-1$

ដូចនេះ $\boxed{H(0,0,-2)}$

ទាញរកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (P)

គេបាន $d(B,(p))=\sqrt{(x_H-x_B)^2+(y_H+y_B)^2+(z_H+z_B)^2}$

$=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$

ដូចនេះ $\boxed{d(B,(p))=7}$ ឯកត្តាប្រវែង

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ $(L): \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{6}$, $(P): -2x + 2y - z + 1 = 0$

ក-បង្ហាញថា (L) ស្របនិង (P) ។

ខ-នៅលើបន្ទាត់(L) គេដាក់ចំនុច A មួយមានអាប់ស៊ីស $x = -3$ រួចគេគូស AH កែងនិងប្លង់ (P) ត្រង់ H ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H រួចទាញរកចំងាយរវាង បន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា (L) ស្របនិង (P)

បន្ទាត់ (L) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (2,5,6)$

និងប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (-2,2,-1)$

គេបាន $\vec{u_L} . \vec{n_P} = (2)(-2) + (5)(2) + (6)(-1) = 0$ នាំឲ្យ $\vec{u_L} \perp \vec{n_P}$ ។

ដោយ $\vec{u_L} \perp \vec{n_P}$ និង $\vec{n_P} \perp (P)$ នាំឱ្យ $\vec{u} // (P)$ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ (L) ស្របនឹងប្លង់ (P) ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H

ដោយចំនុច $A \in (L)$ ហើយមានអាប់ស៊ីស $x = -3$ នោះគេបាន :

$\frac{-3+5}{2} = \frac{y_A - 1}{5} = \frac{z_A + 5}{6}$ នាំឱ្យ $y_A = 6$ និង $z_A = 1$

គេបាន $A(-3,6,1)$ ។តាង $H(x_H,y_H,z_H)\in(P)$ នោះកូអរដោនេនៃចំនុច H

ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការប្លង់ (P) គេបាន $-2x_H+2y_H-z_H+1=0$ (1)

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp(P)$ នាំឱ្យគេទាញបាន $\overrightarrow{AH}//\vec{n_P}$ សមមូល $\overrightarrow{AH}=t.\vec{n_P}$ ។

ដោយគេមាន $\overrightarrow{AH}=(x_H+3,y_H-6,z_H-1)$ និង $\vec{n_P}=(-2,2,-1)$

គេទាញ $\begin{cases}x_H+3=-2t\\ y_H-6=2t\\ z_H-1=-t\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_H=-2t-3\\ y_H=2t+6\\ z_H=-t+1\end{cases}$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន :

$$-2(-2t-3)+2(2t+6)-(-t+1)+1=0$$

$$4t+6+4t+12+t-1+1=0$$

$9t+18=0$ នាំឱ្យ $t=-2$ ។

យកតម្លៃ $t=-2$ ជួសក្នុង (2) គេបាន $H(1,2,3)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $(L)//(P)$ ដូចនេះចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

កំនត់ដោយ:

$d((L),(P))=d(A,(P))=AH$ ដោយ $\overrightarrow{AH}=(4,-4,2)$ គេបាន :

$$d((L),(P))=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$$

ដូចនេះ $d((L),(P))=6$ (ឯកតាប្រវែង)

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យប្លង់ពីរ $(P): 2x-2y+z-1=0$ និង $(Q): -2x+2y-z-17=0$

ក-បង្ហាញថាប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q) រួចគណនាចំងាយរវាងប្លង់ពីរនេះ ។

ខ-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំនុច $A(1,2,3)$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។ពីចំនុច A គេគូសបន្ទាត់ $(AH)\perp(Q)$ ដោយ $H\in(Q)$ ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AH]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថាប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q)

ប្លង់ (P) និង (Q) មានវិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n_P}=(2,-2,1)$ និង $\vec{n_Q}=(-2,2,-1)$

ដោយ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{2}{-2}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{-1}$ នាំឱ្យ $\vec{n_P}//\vec{n_Q}$ ។

ដូចនេះ ប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q) ។

គណនាចំងាយរវាងប្លង់ពីរនេះ

យកចំនុច $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(P)$ គេបាន $2x_0-2y_0+z_0-1=0 \quad (1)$

ដោយ $(P)//(Q)$ គេបាន $d((P),(Q))=d(M_0,(Q))=\frac{|-2x_0+2y_0-z_0-17|}{\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(-1)^2}}$

ឬ $d((P),(Q))=\frac{|-2x_0+2y_0-z_0-17|}{3}$ ។

តាម (1) គេទាញ $-1=-2x_0+2y_0-z_0$ ហេតុនេះគេបាន :

$$d((P),(Q))=\frac{|-1-17|}{3}=\frac{18}{3}=6$$

ដូចនេះ $d((P),(Q))=6$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AH]$

គេមាន $A(1,2,3)$ និង $(P): 2x-2y+z-1=0$

ដោយ $2(1)-2(2)+3-1=0$ ឬ $2-4+3-1=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះចំនុច A ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។

តាងចំនុច $H(x_H,y_H,z_H)\in(Q)$

គេបាន $-2x_H+2y_H-z_H-17=0$ (1)

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp(Q)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH}//\vec{n}_Q$ សមមូល $\overrightarrow{AH}=t.\vec{n}_Q$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AH}(x_H-1,y_H-2,z_H-3)$ គេទាញ $\begin{cases}x_H-1=-2t\\ y_H-2=2t\\ z_H-3=-t\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}x_H=-2t+1\\ y_H=2t+2\\ z_H=-t+3\end{cases}$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន :

$$-2(-2t+1)+2(2t+2)-(-t+3)-17=0$$

$$4t-2+4t+4+t-3-17=0$$

$9t-18=0$ នាំឱ្យ $t=2$ ។

គេបាន $H(-3,6,1)$ និង $\overrightarrow{AH}=(-4,4,-2)$ ។

យក I ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ $[AH]$នាំឱ្យ $I\left(\frac{1-3}{2},\frac{2+6}{2},\frac{3+1}{2}\right)$ ឬ $I(-1,4,2)$

សមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AH]$ គឺជាប្លង់កាត់តាម I ហើយកែងនឹង $\overrightarrow{AH}$ ។

សមីការប្លង់អាចសរសេរ : $-4(x+1)+4(y-4)-2(z-2)=0$

$$-4x-4+4y-16-2z+4=0$$

ដូចនេះ $-4x+4y-2z-16=0$ ឬ $-2x+2y-z-8=0$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ $(L_1): \frac{x+2}{-3} = \frac{y-6}{4} = \frac{z+2}{3}$

និង $(L_2): \frac{x-3}{9} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$ ។

ក-ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ខ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

តាង $A(x_A, y_A, z_A) \in (L_1)$ នាំឱ្យកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ (L_1)

គេបាន $\frac{x_A+2}{-3} = \frac{y_A-6}{4} = \frac{z_A+2}{3} = p$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_A = -3p-2 \\ y_A = 4p+6 \\ z_A = 3p-2 \end{cases} \quad (1)$

តាង $B(x_B, y_B, z_B) \in (L_2)$ នាំឱ្យកូអរដោនេ B ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ (L_2) ។

គេបាន $\frac{x_B+6}{9} = \frac{y_B+5}{4} = \frac{z_B-2}{-1} = q$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_B = 9q-6 \\ y_B = 4q-5 \\ z_B = -q+2 \end{cases} \quad (2)$

បើ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) នោះគេបាន :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{U}_1\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{U}_2\end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{U}_1=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{U}_2=0\end{cases}$$

ដែល $\vec{U}_1$ និង $\vec{U}_2$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដោយគេមាន $\overrightarrow{AB}(9q+3p-4,4q-4p-11,-q-3p+4)$

និង $\vec{U}_1(-3,4,3)$, $\vec{U}_2(9,4,-1)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{AB}.\vec{U}_1=-3(9q+3p-4)+4(4q-4p-11)-(-q-3p+4)=0$

នាំឱ្យ $-14q-34p-20=0$ (3)

និង $\overrightarrow{AB}.\vec{U}_2=9(9q+3p-4)+4(4q-4p-11)-(-q-3p+4)=0$

នាំឱ្យ $98q+14p-84=0$ (4) ។

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}-14q-34p-20=0\\ 98q+14p-84=0\end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases}p=-1\\ q=1\end{cases}$

យកតម្លៃ $p=-1$ និង $q=1$ ជួសក្នុងសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$A(1,2,-5)$ និង $B(3,-1,1)$ ។ សមីការបន្ទាត់ (AB) អាចសរសេរ

$(AB):\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$ ឬ $(AB):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{6}$

ដូចនេះ $(\Delta):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{6}$ ជាបន្ទាត់កែងរួមដែលត្រូវរក ។

ខ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដោយ **A** និង **B** ជាចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាង (L_1) និង (L_2)

នោះគេបាន :

$$d((L_1),(L_2)) = d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$d((L_1),(L_2)) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2 + (1+5)^2} = 7$$

ដូចនេះ $d((L_1),(L_2)) = 7$ (ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ទី១០

ក្នុងលំហមានតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(ឯកត្តា **1cm** នៅលើអ័ក្ស) ។

គេឱ្យបីចំនុច $A(-2,-3,7)$,$B(2,-1,5)$ និង $C(4,-2,3)$ ។

ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (4,2,-2)$ និង $\overrightarrow{AC} = (6,1,-4)$

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}.\vec{k}$

$\vec{n} = (-8+2).\vec{i} - (-16+12)\vec{j} + (4-12).\vec{k}$

$\vec{n} = -6\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$

តាមរូបមន្តសមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ :

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$(ABC): -6(x+2) + 4(y+3) - 8(z-7) = 0$$
$$(ABC): -6x - 12 + 4y + 12 - 8z + 56 = 0$$
$$(ABC): -6x + 4y - 8z + 56 = 0$$

ដូចនេះ $(ABC): -3x + 2y - 4z + 28 = 0$ ។

លំហាត់ទី១១

ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(គេយកឯកតា 1cm នៅលើអក្ស) ។

គេឱ្យបីចំនុច $A(1,-2,3)$, $B(3,-1,3)$, $C(5,1,4)$ ។

ក-កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់តំលៃកូស៊ីនូស

នៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រពីរនេះ ។

ខ-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A, B, C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

ឃ-កំនត់សមីការប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ។

ង-គណនាមាឌតេត្រាអែត $\mathbf{ABCD}$ ទាញរកចំងាយពីចំនុច $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ និង $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

គេមាន $\mathbf{A(1,-2,3)}$ $\mathbf{,B(3,-1,3)}$ $\mathbf{,C(5,1,4)}$

គេបាន $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\mathbf{(2,1,0)}$ និង $\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\mathbf{(4,3,1)}$ ។

កំនត់តំលៃកូស៊ីនូសនៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ និង $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$:

តាមរូបមន្ត $\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

$$\cos\theta=\frac{8+3+0}{\sqrt{5}.\sqrt{26}}=\frac{11}{\sqrt{130}}=\frac{11\sqrt{130}}{130}$$

ខ-គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ ទាញថាបីចំនុច $\mathbf{A,B,C}$ មិនរត់ត្រង់គ្នា

គេបាន $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-2.\vec{j}+2.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\overrightarrow{\mathbf{AC}}\mathbf{(1,-2,2)}$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែ គ្នា

នាំឱ្យ A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+4}=\frac{3}{2}=1{,}5$$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ឃ-កំនត់សមីការប្លង់ (ABC)

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (ABC)

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$1.(x-1)-2(y+2)+2(z-3)=0$$

$$x-2y+2z-11=0$$

ដូចនេះ $(ABC): x-2y+2z-11=0$ ។

ង-គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}.\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|$

ដោយ $A(1,-2,3),D(2,1,1)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AD}=(1,3,-2)$

ហើយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$

គេបាន $V_{ABCD}=\frac{1}{6}.|1-6-4|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1{,}5$ (ឯកតាមាឌ) ។

ទាញរកចំងាយពីចំនុច $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $(\mathbf{ABC})$:

តាង h ជាកំពស់របស់តេត្រាអែត $\mathbf{ABCD}$ ដែលគូសចេញពីកំពូល $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់បាត

នាំឱ្យ $\mathbf{h = d(D,(ABC))}$ ជាចំងាយពីចំនុច $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $(\mathbf{ABC})$ ។

តាមរូបមន្ត $\mathbf{V_{ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABC} \times h = \frac{1}{3}.S_{ABC} \times d(D,(ABC))}$

នាំឱ្យ $\mathbf{d(D,(ABC)) = \frac{3.V_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{3.1,5}{1,5} = 3}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ទី១២

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេអោយចំនុច

$A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

ក.ដៅចំនុច A,B,C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ គណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

គ.សរសេរសមីការប្លង់(ABC)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L)កែងនឹងប្លង់ (ABC)ត្រង់D ។

ឃ. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$ ។

ង. គណនាមាឌរបស់ព្រីសត្រង់ដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ $ABCD$

ដំណោះស្រាយ

ក.ដៅចំនុច A,B,C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម :

$A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

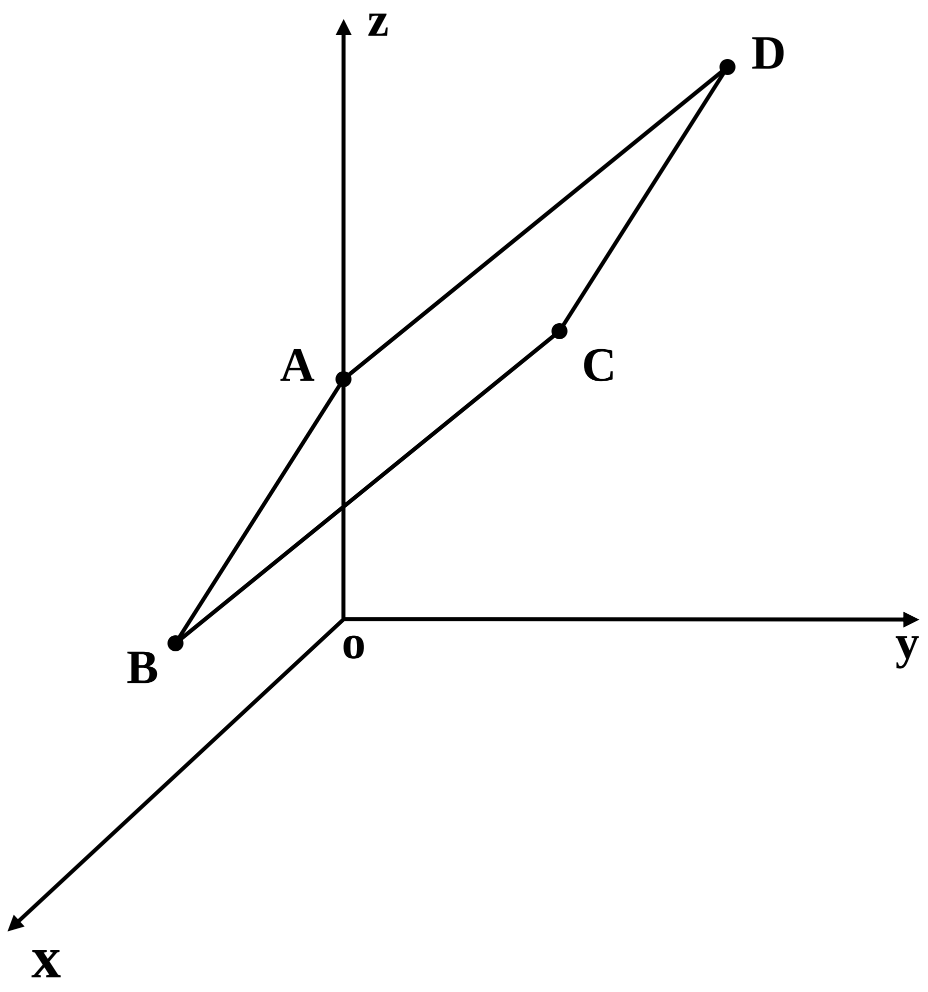
គេមាន $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$

និង $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C, y_D-y_C, z_D-z_C)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{\mathbf{DC}} = (2,0,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}$ (កូអរដោនេដូចគ្នា)

ដូចនេះ ចតុកោណ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម ។



ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ គណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម **ABCD**:

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2.\vec{i}-4.\vec{j}+4.\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-2,-4,4)$ ។

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម **ABCD**:

$S_{ABCD}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(4)^2}=6$ (ឯកត្តាក្រឡាផ្ទៃ) ។

គ.សមីការប្លង់(ABC)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ(L)កែងនឹងប្លង់(ABC)ត្រង់**D**

ដោយ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាមនោះបួនចំនុច **A, B, C, D** នៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

តាង $\overrightarrow{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)នោះគេបាន

$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត :

$$(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$(ABC): -2(x-0)-4(y-0)+4(z-4)=0$$

$$(ABC): -2x-4y+4z-16=0$$

$$(ABC): -x-2y+2z-8=0$$

ម្យ៉ាងទៀតតាង $\overrightarrow{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D :

គេបាន $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (-2,-4,4)$

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x = x_D + at \\ y = y_D + bt \\ z = z_D + ct \quad ,t\in IR \end{cases}$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x = -2t \\ y = 2-4t \\ z = 4+4t \quad ,t\in IR \end{cases}$

ឃ. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$

តាង $E(x_E, y_E, z_E)$ ។ គេមាន $\overrightarrow{AE} = (x_E, y_E, z_E - 2)$

និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (-2,-4,4)$

ដោយ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E - 2 = 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $E(-1,-2,4)$ ។

លំហាត់ទី១៣

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេអោយចំនុច :

$A(0,6,0)$,$B(0,4,2)$ និង $C(2,0,5)$ ។

ក. ចូរសង់ចតុមុខ **OABC** ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC** ។

គ.គណនា $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}$ រួចទាញរកមាឌនៃចតុមុខ **OABC** ។

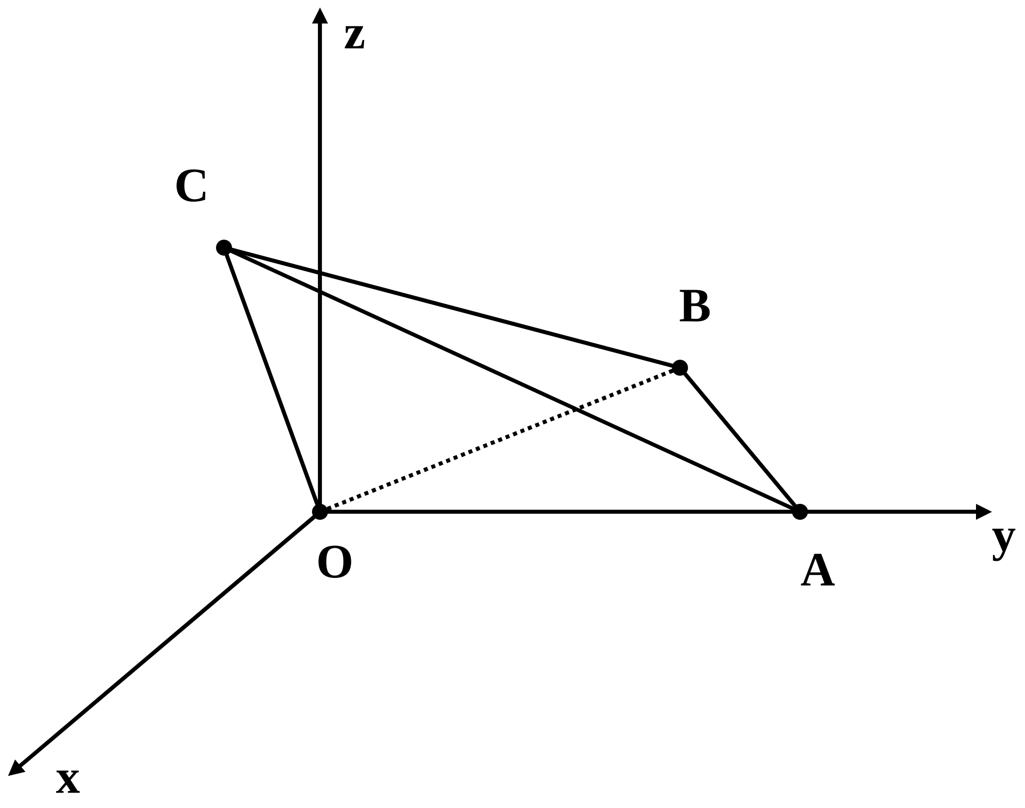
ឃ. ទាញរកចំងាយពីចំនុច **O** ទៅប្លង់ (ABC) ។

ង.សរសេរសមីការប្លង់(ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សង់ចតុមុខ **OABC**

$A(0,6,0)$,$B(0,4,2)$ និង $C(2,0,5)$



ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$ និង $\overrightarrow{AC}=(2,-6,5)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -2\\ 2 & -6 & 5\end{vmatrix}=-2.\vec{i}-4.\vec{j}-4.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-4,-4)$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC** :

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}.\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2}=3$$ ។

ដូចនេះ $S_{ABC}=3$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គ.គណនា $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}$:

គេមាន $\overrightarrow{OA}(0,6,0)$, $\overrightarrow{OB}(4,2,0)$, $\overrightarrow{OC}(2,0,5)$

គេបាន $$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=0.\vec{i}-0.\vec{j}-24.\vec{k}=24.\vec{k}$$

ដូចនេះ $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}=5.24=120$ ។

ទាញរកមាឌនៃចតុមុខ **OABC** :

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{1}{6}.\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}$

ដូចនេះ $V_{OABC}=\frac{1}{6}\times 120=20$ ឯកតាមាឌ ។

ឃ. ទាញរកចំងាយពីចំនុច **O** ទៅប្លង់ (ABC) :

តាង $d(O,(ABC))$ ជាចំងាយពីចំនុច **O** ទៅប្លង់ (ABC) នាំឱ្យវាជាកំពស់នៃ ចតុមុខ **OABC**

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}\times d(O(ABC))$ ។

នាំឱ្យ $d(O,(ABC))=\frac{3.V_{OABC}}{S_{ABC}}=\frac{3.20}{3}=20$ ឯកត្តាប្រវែង ។

ង.សរសេរសមីការប្លង់(ABC):

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)នាំឱ្យ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}(-2,-4,-4)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$(ABC): -2(x-0)-4(y-6)-4(z-0)=0$$
$$(ABC): x+2y+2z-12=0$$

ដូចនេះ $(ABC): x+2y+2z-12=0$ ។

លំហាត់ទី១៨

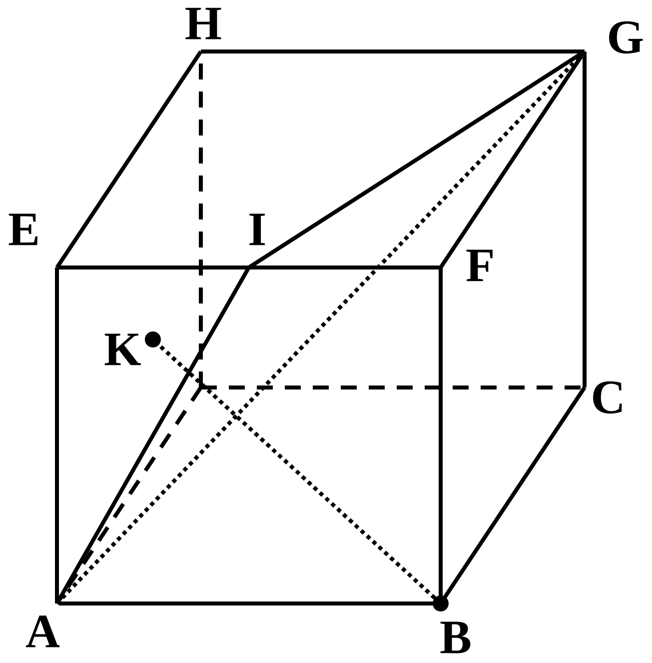
គេអោយគូប **ABCDEFGH** មួយមានទ្រនុងស្មើ1។

លំហមានទិសដៅតាមតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

គេយក **I** ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[EF]$ និង **K** ជាផ្ចិតការេ **ADHE** ។

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **IGA** ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត **ABIG** រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច **B** ទៅប្លង់ (AIG)



ដំណោះស្រាយ

ក-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$

ក្នុងលំហ $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

គេមាន :

$$A(0,0,0)\ ,B(1,0,0)\ ,C(1,1,0)\ ,D(0,1,0)$$

$$E(0,0,1)\ ,F(1,0,1)\ ,G(1,1,1)\ ,H(0,1,1)$$

ដោយ$\mathbf{I}$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[\mathbf{EF}]$ គេបាន $\mathbf{I}\left(\frac{0+1}{2},\frac{0+0}{2},\frac{1+1}{2}\right)$

ឬ $\mathbf{I}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$និង $\mathbf{K}$ ជាផ្ចិតការេ $\mathbf{ADHE}$ នោះវាជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[\mathbf{AH}]$

គេបាន :

$$\mathbf{K}\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+1}{2},\frac{0+1}{2}\right) \text{ ឬ } \mathbf{K}\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ ។}$$

យើងបាន : $\overrightarrow{\mathbf{BK}}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\ (1)$

ហើយ $\overrightarrow{\mathbf{IG}}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\overrightarrow{\mathbf{IA}}=\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$ គេបាន :

$$\overrightarrow{\mathbf{IG}}\times\overrightarrow{\mathbf{IA}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{AB}} & \overrightarrow{\mathbf{AD}} & \overrightarrow{\mathbf{AE}}\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{IG}}\times\overrightarrow{\mathbf{IA}}=-\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{\mathbf{AD}}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{\mathbf{AE}}$$

គេបាន $\overrightarrow{\mathbf{IG}}\times\overrightarrow{\mathbf{IA}}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\ (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន : $\overrightarrow{\mathbf{BK}}=\overrightarrow{\mathbf{IG}}\times\overrightarrow{\mathbf{IA}}$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **IGA** :

តាមរូបមន្ត : $S_{IGA} = \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}\right\| = \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{BK}\right\|$

$= \frac{1}{2}.\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត **ABIG** :

តាមរូបមន្ត $V_{ABIG} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}\right).\overrightarrow{IB}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{IB} = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$ និង $\overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

គេបាន : $V_{ABIG} = \frac{1}{6}.\left|-\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$ ឯកត្តាមាឌ ។

រកចំងាយពីចំនុច **B** ទៅប្លង់ (AIG) :

តាមរូបមន្ត : $V_{ABIG} = \frac{1}{3}.S_{IGA} \times d(B, (AIG))$

នាំអោយ $d(B, (AIG)) = \frac{3V_{ABIG}}{S_{IGA}}$

ដូចនេះ $d(B, (AIG)) = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៥

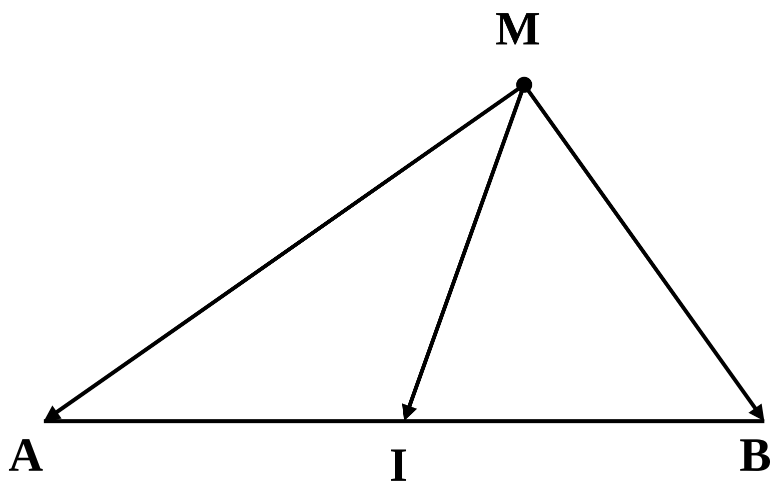
ក្នុងលំហគេអោយពីរចំនុចនឹង $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ដែល $\mathbf{AB = 8cm}$ ហើយ $\mathbf{I}$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $\mathbf{[AB]}$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ចំនុច $\mathbf{M}$ នៃលំហចូរស្រាយថា $\overrightarrow{\mathbf{MA}}.\overrightarrow{\mathbf{MB}} = \mathbf{MI}^2 - \mathbf{IA}^2$ ។

ខ-កំនត់សំណុំចំនុច$\mathbf{M}$ នៃលំហដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{\mathbf{MA}} \perp \overrightarrow{\mathbf{MB}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ចំពោះគ្រប់ចំនុច $\mathbf{M}$ នៃលំហស្រាយថា $\overrightarrow{\mathbf{MA}}.\overrightarrow{\mathbf{MB}} = \mathbf{MI}^2 - \mathbf{IA}^2$



គេមាន : $\overrightarrow{\mathbf{MA}} = \overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IA}}$ និង $\overrightarrow{\mathbf{MB}} = \overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IB}}$

ដោយ $\overrightarrow{\mathbf{IB}} = -\overrightarrow{\mathbf{IA}}$ វ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា

នាំឱ្យគេទាញ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$ ។

គេបាន : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2$$

ដោយ $\overrightarrow{MI}^2 = MI^2$ និង $\overrightarrow{IA}^2 = IA^2$

ដូចនេះ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$ ។

ខ. កំនត់សំណុំចំនុចM នៃលំហដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$:

ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ លុះត្រាតែ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

តាមសំរាយខាងលើគេមាន $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$

គេបាន : $MI^2 - IA^2 = 0$ នាំអោយ $MI = IA$

ដោយI ជាចំនុចកណ្តាលនៃ$[AB]$នោះ$IA = \frac{AB}{2} = 4cm$ ។

គេទាញបាន $MI = 4cm$ ថេរ ហើយ I ជាចំនុចនឹង ។

ដូចនេះសំនុំចំនុច M ជាស្វ៊ែផ្ចិត I កាំ $R = IA = 4cm$ ។

លំហាត់ទី១៦

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មានឯកតា **1cm** នៅលើអក្ស័គេអោយប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0$ ។

គេតាង **A,B,C** ជាចំនុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអក្ស័ $(Ox),(Oy),(Oz)$ ។

ក. កំនត់កូអរ័ដោនេនៃចំនុច **A,B** និង **C** រួចសង់ប្លង់(P)

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់(L)កាត់តាមគល់**O** ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)ខាងលើ ។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC** ។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអែត **OABC** រួចទាញរកចំងាយពីគល់ **O** ទៅប្លង់ (ABC)

ដំណោះស្រាយ

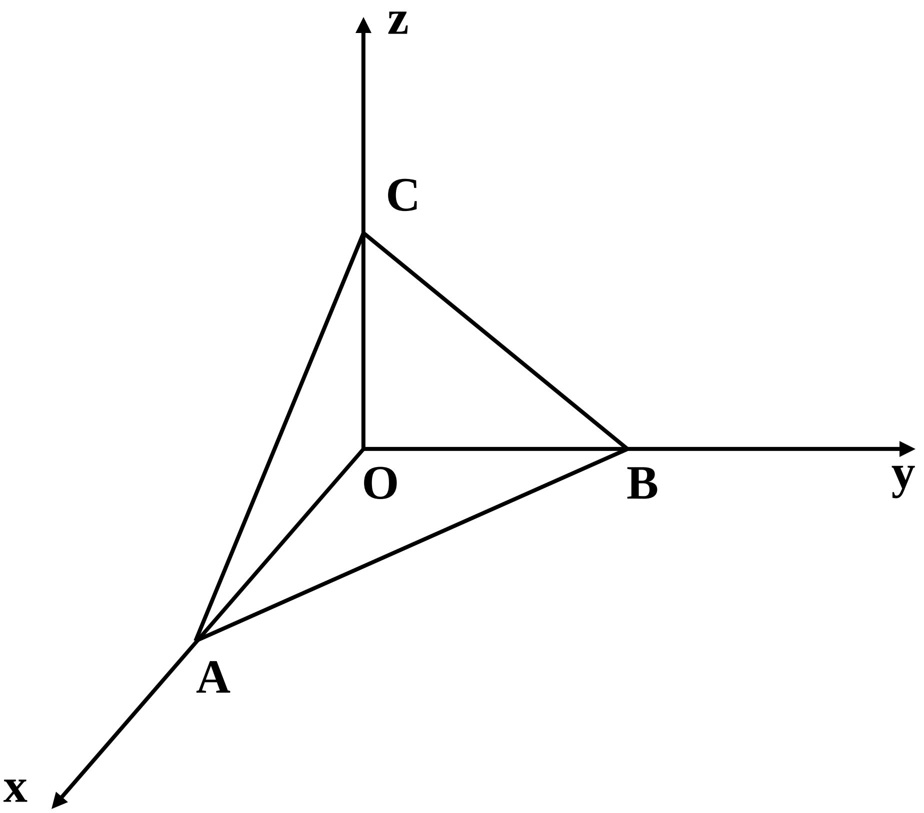
ក. កំនត់កូអរ័ដោនេនៃចំនុច **A,B** និង **C** រួចសង់ប្លង់(P)

គេមាន $(P): x+2y+2z-6=0$

បើ $y=0, z=0$ នាំអោយ $x-6=0$ ឬ $x=6$ ។ គេបាន $A(6,0,0)$ ។

បើ $x=0, z=0$ នាំអោយ $2y-6=0$ ឬ $y=3$ ។ គេបាន $B(0,3,0)$ ។

បើ $x=0, y=0$ នាំអោយ $2z-6=0$ ឬ $z=3$ ។ គេបាន $C(0,0,3)$ ។



ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់(L)

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x = x_O + at \\ y = y_O + bt \\ z = z_O + ct \quad ,t \in IR \end{cases}$

ដោយបន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$

នាំអោយវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ ។

គេបាន $\vec{u}_L = \vec{n}_P = (1,2,2)$ និង $O(0,0,0)$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \quad ,t \in IR \end{cases}$

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-6,3,0)$ និង $\overrightarrow{AC} = (-6,0,3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 18\vec{j} + 18\vec{k}$$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (9,18,18)$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC :

តាមរូបមន្ត : $S_{ABC} = \frac{1}{2} . \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$

$$= \frac{1}{2} . \sqrt{9^2 + 18^2 + 18^2} = 13,5cm^2$$

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអែត **OABC** :

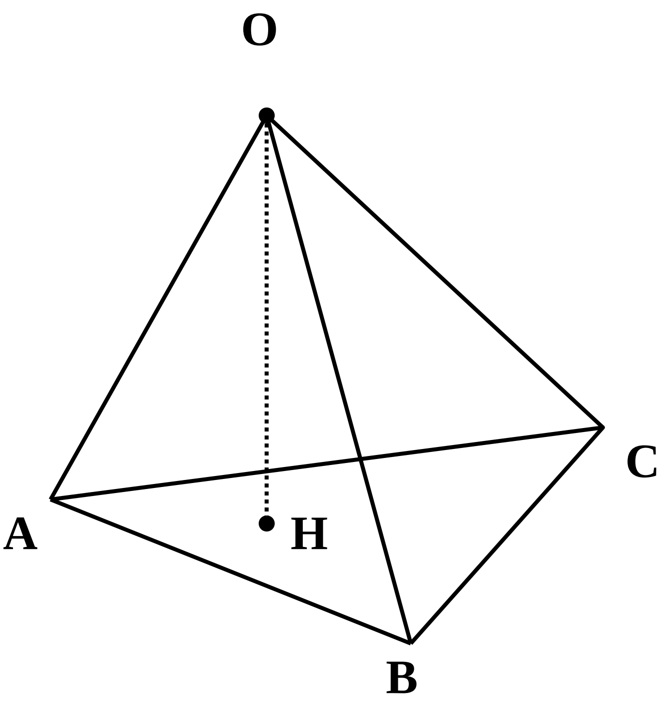
តាមរូបមន្ត : $V_{OABC} = \frac{1}{6} . \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) . \overrightarrow{AO} \right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} (9,18,18)$ និង $\overrightarrow{AO}(-6,0,0)$

គេបាន $V_{OABC}=\frac{1}{6}.\left|-54+0+0\right|=9cm^3$

ដូចនេះ $\boxed{V_{OABC}=9cm^3}$ ។

ទាញរកចំងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ (ABC):



គេមាន $V_{OABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}\times d(O;ABC)$ ដែល $OH=d(o;ABC)$

គេបាន $d(0,(ABC))=\frac{3.V_{OABC}}{S_{ABC}}=\frac{3.9}{13,5}=2cm$ ។

លំហាត់ទី១៧

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

(គេយកឯកត្តា **1cm** នៅលើអក្ស) គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2)

មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា

$(L_1): \frac{x+5}{9}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-3}{-1}$ និង $(L_2): \frac{x+1}{3}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z+1}{-3}$ ។

ក-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1) ។

គ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2)

$$(L_1): \frac{x+5}{9}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-3}{-1}$$

ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A(-5,-4,3)$ ហើយស្របនឹង $\vec{u}_1(9,4,-1)$

$$(L_2): \frac{x+1}{3}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z+1}{-3}$$

ជាបន្ទាត់កាត់តាម $B(-1,7,-1)$ ហើយស្របនឹង $\vec{u}_2(3,-4,-3)$

តាង $\vec{n}_P$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2)

គេបាន $\vec{n}_P = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k}$ ។

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2) អាចសរសេរ :

$$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(P): -16(x+5) + 24(y+4) - 48(z-3) = 0$$

ដូចនេះ $(P): 2x - 3y + 6z - 20 = 0$ ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

តាង $\vec{n}_Q$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

គេបាន $\vec{n}_Q = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{n}_P = -16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k}$ ។

សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត :

$$(Q): a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$(Q): -16(x+1) + 24(y-7) - 48(z+1) = 0$$

ដូចនេះ $(Q): 2x - 3y + 6z + 29 = 0$ ។

គ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

គេមាន $(L_1) \subset (P)$ ហើយ $(L_2) \subset (Q)$ ដែល $(P) // (Q)$

នោះគេទាញបាន $d((L_1),(L_2)) = d((P),(Q)) = d(A,(Q))$ (ព្រោះ $A \in (P)$)

$$d((L_1),(L_2)) = \frac{|2x_A - 3y_A + 6z_A + 29|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

$$d((L_1),(L_2)) = \frac{|2(-5) - 3(-4) + 6(3) + 29|}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

លំហាត់ទី១៨

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

គេឱ្យបីចំនុច $A(-2,3,4)$,$B(-5,7,7)$ និង $C(7,7,3)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ទាញថាបីចំនុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ឃ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{AC}=(9,4,-1)$

គេបាន $$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & 3\\ 9 & 4 & -1\end{vmatrix}=-16\vec{i}+24\vec{j}-48\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{O}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។

ដូចនេះបីចំនុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC**

តាមរូបមន្ត $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2 + (24)^2 + (-48)^2} = 28$$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 28$ (ឯកត្តាក្រឡាផ្ទៃ) ។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-16, 24, -48)$ ។

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ :

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(ABC): -16(x + 2) + 24(y - 3) - 48(z - 4) = 0$$

ដូចនេះ $(ABC): 2x - 3y + 6z - 11 = 0$ ។

ឃ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត **OABC**

តាមរូបមន្ត $V_{OABC} = \frac{1}{6}\left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) . \overrightarrow{AO} \right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-16, 24, -48)$ និង $\overrightarrow{AO} = (2, -3, -4)$

គេបាន $V_{OABC} = \frac{1}{6}\left| (-16)(2) + (24)(-3) + (-48)(-4) \right| = \frac{44}{3}$ ។

ដូចនេះ $V_{OABC} = \frac{44}{3}$ (ឯកត្តាមាឌ) ។

លំហាត់ទី១៩

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

គេឱ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x+3}{-3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{3}$ និងចំនុច $A(2,-3,4)$ ។

ក-ចូរគណនាចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ (L) និង ចំនុច A ។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L)

បន្ទាត់ $(L): \frac{x+3}{-3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{3}$

ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំនុច $M_0(-3,4,1)$ ហើយមាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_L(-3,4,3)$ ។

តាមរូបមន្ត $d(A,(L))=\frac{\left\|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}_L\right\|}{\|\vec{u}_L\|}$ ដោយ $\overrightarrow{AM_0}(-5,7,-3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}_L=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 7 & -3\\ -3 & 4 & 3\end{vmatrix}=33\vec{i}-24\vec{j}+\vec{k}$

គេទាញ $\left\|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}_L\right\| = \sqrt{(33)^2+(-24)^2+1^2} = \sqrt{1666}$

ហើយ $\|\vec{u}_L\| = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$ ។

គេបាន $d(A,(L)) = \dfrac{\sqrt{1666}}{\sqrt{34}} = \sqrt{\dfrac{1666}{34}} = \sqrt{49} = 7$ ។

ដូចនេះ $d(A,(L)) = 7$ (ឯកត្តាប្រវែង) ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ (L) និង ចំនុច A

តាង $\vec{n}_P$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គេបាន $\vec{n}_P = \vec{u}_L \times \overrightarrow{M_0A}$

ដោយ $\vec{u}_L(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{M_0A}(5,-7,3)$ គេបាន :

$$\vec{n}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 33\vec{i} - 24\vec{j} + \vec{k}$$ ។

សមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ :

$(P): 33(x-2) - 24(y+3) + (z-4) = 0$

$(P): 33x - 24y + z - 142 = 0$

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

តាង $\vec{n}_Q$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L)

ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

យក $M(x,y,z)$ ជាចំនុចទូទៅនៃប្លង់ (Q) គេបាន $\vec{n}_Q = \vec{u}_L \times \overrightarrow{M_0M}$ ។

ដោយ $\vec{u}_L(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{M_0M}(x+3, y-4, z-1)$ គេបាន :

$$\vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ x+3 & y-4 & z-1 \end{vmatrix}$$

$$= (4z-3y+8)\vec{i} - (-3z-3x-12)\vec{j} + (-3y-4x)\vec{k}$$

$\vec{n}_Q = (4z-3y+8, 3z+3x+12, -3y-4x)$ ។

ដោយ $(Q)\perp(P)$ នាំឱ្យ $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ សមមូល $\vec{n}_Q.\vec{n}_P = 0$ គេបាន :

$$33(4z-3y+8) - 24(3z+3x+6) + (-3y-4x) = 0$$

$$132z - 99y + 264 - 72z - 72x - 144 - 3y - 4x = 0$$

$$-76x - 102y + 60z + 120 = 0$$

ដូចនេះ $(Q): 38x + 51y - 30z - 60 = 0$ ។

លំហាត់ទី២០

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យប្លង់ពីរៈ

$(P): x-2y+z+4=0$ និង $(Q): 2x+3y-2z-13=0$ ។

ក-សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (R) កាត់តាមចំនុច $A(0,6,8)$ហើយកែងរួមទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ ។

គ-គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L)និង ប្លង់ (R) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q)

ប្លង់ (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា

$\vec{n}_P=(1,-2,1)$និង $\vec{n}_Q=(2,3,-2)$ ។

តាង $\vec{u}_L$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) នោះគេបាន :

$$\vec{u}_L=\vec{n}_P\times\vec{n}_Q=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k} \quad ។$$

យក $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(L)$ នាំឱ្យ $M_0\in(P)$ និង $M_0\in(Q)$

គេបាន $\begin{cases}x_0-2y_0+z_0+4=0\\ 2x_0+3y_0-2z_0-13=0\end{cases}$

សន្មតយក $z_0 = 0$ នាំឱ្យគេទាញបាន $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ ។

ដូចនេះ $M_0(2,3,0)$ ។

ដូចនេះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត :

$$(L): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ឬ $(L): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7}$ ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (R) :

តាង $\vec{n}_R$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (R) កាត់តាមចំនុច $A(0,6,8)$ ហើយកែងរួម ទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ ។

គេមាន $(R) \perp (P)$ និង $(R) \perp (Q)$

នាំឱ្យ $\vec{n}_R \perp \vec{n}_P$ និង $\vec{n}_R \perp \vec{n}_Q$ នាំឱ្យ $\vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$

គេបាន $\vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ ។

សមីការប្លង់ (R) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត :

$$(R): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(R): 1.(x - 0) + 4(y - 6) + 7(z - 8) = 0$$

ដូចនេះ $(R): x + 4y + 7z - 80 = 0$ ។

គ-គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ $\mathbf{M}$ រវាងបន្ទាត់ $\mathbf{(L)}$ និង ប្លង់ $\mathbf{(R)}$

កូអរដោនេចំនុចចំនុចប្រសព្វ $\mathbf{M}$ រវាងបន្ទាត់ $\mathbf{(L)}$ និង ប្លង់ $\mathbf{(R)}$

ជាចំលើយប្រពន្ធ័សមីការ:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7} \quad (1) \\ x + 4y + 7z - 80 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

តាង $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7} = t$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 4t + 3 \quad (3) \\ z = 7t \end{cases}$ យកទៅជួសក្នុងសមីការ (2)

គេបាន $t + 2 + 4(4t + 3) + 7(7t) - 80 = 0$

នាំឱ្យ $t = 1$ យកជួសក្នុង (3) គេបាន $x = 3, y = 7, z = 7$ ។

ដូចនេះ $M(3,7,7)$ ។

លំហាត់ទី២១

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យ

$(L): \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+8}{3}$ និង $(P): x-2y-2z-14=0$ ។

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L)ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

គ-សរសេរប្រពន្ធ័សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលជាប្រសព្វរវាង (P) និង (Q) ។

ឃ-សរសេរសមីការស្វ៊ែកាំ $R=6$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច A ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

កូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ A ជាចំលើយរបស់ប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+8}{3}\\ x-2y-2z-14=0\end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេបាន $A(4,-3,-2)$ ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L)ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

យក $M(x,y,z)$ជាចំនុចទូទៅនៃប្លង់ (Q) គេបាន $\overrightarrow{AM}(x-4,y+3,z+2)$

តាង $\vec{n}_Q$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) នោះគេបាន $\vec{n}_Q = \vec{u} \times \overrightarrow{AM}$

ដែល $\vec{u} = (2,-2,3)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ។

គេបាន $\vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ x-4 & y+3 & z+2 \end{vmatrix}$

$$\vec{n}_Q = (-2z-3y-13)\vec{i} - (-2z-3x+16)\vec{j} + (2y+2x+14)\vec{k}$$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $(Q) \perp (P)$ នាំឱ្យ $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ សមមូល $\vec{n}_P . \vec{n}_Q = 0$

គេបាន $1.(-2z-3y-13) - 2(-2z+3x-16) - 2(2y+2x-2) = 0$

$$-2z-3y-13+4z-6x+32-4y-4x+4=0$$

$$-10x-7y+2z+23=0$$

ដូចនេះ $(Q): 10x+7y-2z-23=0$ ។

គ-សរសេរប្រពន្ធ័សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d)

បន្ទាត់(d) ដែលជាប្រសព្វរវាង (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_d = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$

ដែល $\vec{n}_P = (1,-2,-2)$ និង $\vec{n}_Q = (10,7,-2)$ ។

គេបាន $\vec{u}_d = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 10 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 18\vec{i} - 18\vec{j} + 27\vec{k}$ ។

យក $N_0 \in (d)$ នាំឱ្យ $N_0 \in (P)$ និង $N_0 \in (Q)$ ។

គេបាន $\begin{cases} x_0 - 2y_0 - 2z_0 - 14 = 0 \\ 10x_0 + 7y_0 - 2z_0 - 23 = 0 \end{cases}$

យកតម្លៃ $x_0 = 0$ នាំឱ្យ $y_0 = 1$, $z_0 = -8$ ។

គេបាន $N_0(0,1,-8)$ ។

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) អាចសរសេរ :

$$(d):\begin{cases} x = 18t \\ y = 1 - 18t \\ z = -8 + 27t \quad ,t \in IR \end{cases}$$

✍✍✍✍✍✍✍

ជំពូកទី៨

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេឲ្យ $\vec{u}=(4;-2;5)$ និង $\vec{v}=(7,9,-8)$ ។

រកវ៉ិចទ័រ $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

ក/ $2\vec{u}+\vec{x}=3\vec{v}$ ខ/ $4\vec{x}-\vec{u}=3\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{x}$

២-គេឲ្យ $\vec{u}=(1,1,0)$; $\vec{v}=(1,0,1)$ និង $\vec{w}=(0,1,1)$

ហើយ $\vec{p}=(5,6,7)$ ។

ចូរបង្ហាញ $\vec{p}$ ជាទម្រង់ $\vec{p}=\ell.\vec{u}+m.\vec{v}+n.\vec{w}$

៣-ចូររកទិសដៅកូស៊ីនូសនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម

ក/ $\vec{u}=(3,-4,5)$

ខ/ $\vec{v}=(-3\,,\,2\,,\,2\sqrt{3})$

៤-គេឲ្យ $\vec{u} = (2, -1, 5)$; $\vec{v} = (3x, 5, 4y-2)$

និង $\vec{w} = (z-1, 2, z+1)$ ។

ក/ រកតម្លៃ x និង y ដែល $\vec{u} // \vec{v}$

ខ/រកតម្លៃ z ដែល $\vec{u} \perp \vec{w}$

៥-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំនុច

$A(1; -1; -4)$; $B(3; -4; 2)$ និង $C(4; 5; -2)$

ក/ គណនា AB ; AC និង BC ។

ខ/ គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ រួចប្រាប់ឈ្មោះ

របស់ត្រីកោណ ABC ។

៦-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំនុច

$A(x; 2; -1)$; $B(0; y; 1)$ និង $C(3; 4; -2)$

កំនត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណ

កែងសមបាតកំពូល A

៧-ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ **(L)** ដែលកាត់តាមចំនុច **A** និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ

ក/ $A(1\,;2\,;3)$ និង $\vec{u}=(-2\,;4\,;-1)$

ខ/ $A(0\,;-1\,;4)$ និង $\vec{u}=(1\,;-3\,;3)$

គ/ $A(-2;2\,;5)$ និង $\vec{u}=(-1\,;3\,;-4)$

៨-ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ **(L)** ដែលកាត់តាមពីរចំណុច **A** និង **B** ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

ក/ $A(-2\,;1\,;3)$ និង $B(2\,;3\,;1)$

ខ/ $A(1\,;-1\,;2)$ និង $B(-1\,;2\,;4)$

គ/ $A(0\,;2;-3)$ និង $B(3\,;0\,;4)$

៩-ចូរសរសេរសមីការប្លង់កាត់តាមចំនុច **A** ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

ក/ $A(2\,;-1\,;1)$ និង $\vec{n}=(-1;2;-2)$

ខ/ $A(0\,;2\,;-3)$ និង $\vec{n}=(2\,;-3\,;6)$

១០-កំនត់សមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ **[AB]** ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ

ក/ $A(1\,,2\,,-3)$ និង $B(3\,,4\,,-1)$

ខ/ $A(-1\,,3\,,0\,)$ និង $B(5\,;1\,;-2)$

គ/ $A(2\,;-1\,;5\,)$ និង $B(4\,;3\,;-1)$

១១-គណនាចម្ងាយពីចំនុច **A** ទៅប្លង់ **(P)** ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ

ក/ $A(2\,;1\,;3)$ និង $(P): 2x+2y+z-6=0$

ខ/ $A(1\,;-1;\,2)$ និង $(P): 2x-3y+6z-3=0$

គ/ $A(2\,;3\,;-1)$ និង $x+4y+8z+12=0$

១២-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់នឹងប្លង់ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

ក/ $\frac{x+2}{2}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z+5}{2}$ និង $x+2y+2z-2=0$

ខ/ $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}$ និង $2x-3y+6z-11=0$

គ/ $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{-2}$ និង $2x-2y+z-1=0$

១៣-រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $\mathbf{I}$ និង កាំ $\mathbf{R}$ ក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម

ក/ $\mathbf{I(-1\,;2\,;3\,)}$ និង $\mathbf{R=5}$

ខ/ $\mathbf{I(2\,;1\,;-1)}$ និង $\mathbf{R=3}$

គ/ $\mathbf{I(3\,;1\,;-2)}$ និង $\mathbf{R=7}$

១៤-រកកូអរដោណេនៃផ្ចិត និង កាំរបស់ស្វ៊ែខាងក្រោម

ក/ $\mathbf{x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0}$

ខ/ $\mathbf{x^2+y^2+z^2-6x-8z=0}$

គ/ $\mathbf{x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+5=0}$

១៥-រកសមីការស្វ៊ែដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $\mathbf{[AB]}$ ដូចតទៅ

ក/ $\mathbf{A(1\,;-1\,;2\,)}$ និង $\mathbf{B(3\,;-5\,;6\,)}$

ខ/ $\mathbf{A(\,2\,;-2\,;1)}$ និង $\mathbf{B(6\,;6\,;-7\,)}$

គ/ $\mathbf{A(-4;1\,;-5)}$ និង $\mathbf{B(2\,;5\,;7\,)}$

១៦-រកសមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $\mathbf{I}$ ហើយកាត់តាម $\mathbf{A}$ ដែល

ក/ $\mathbf{I(2\,;-1\,;1\,)}$ និង $\mathbf{A(4\,;1\,;2\,)}$

ខ/ $\mathbf{I(-1\,;2\,;4)}$ និង $\mathbf{A(1;5\,;-2)}$

១៧-រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងប្លង់(P) ក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម

ក/ $I(2\,,3\,,4\,)$ និង $(P): 2x-2y+z+7=0$

ខ/ $I(1\,;-4\,;2\,)$ និង $(P): 2x-3y+6z+2=0$

គ/ $I(-1\,;0\,;3)$ និង $(P): -x+4y+8z+2=0$

១៨-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ពីរក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម

ក/ $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ និង $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+2}{-5}$

ខ/ $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{-3}$ និង $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{-2}$

គ/ $\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{5}$ និង $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{6}$

១៩-រកសមីការបន្ទាត់ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ពីក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម

ក/ $2x+3y-z+4=0$ និង $x-3y+4z-1=0$

ខ/ $x-2y+3z-4=0$ និង $x+2y-z+2=0$

គ/ $2x+y+z-6=0$ និង $x-y+2z+3=0$

២០-រកសមីការស្វ៊ែកាត់តាមបួនចំនុចដូចខាងក្រោម

ក/ $A(2;1;1)$; $B(0;0;2)$; $C(1;0;-1)$; $D(4;-1;3)$

ខ/ $A(1;0;1)$; $B(-3;3;2)$; $C(0;-1;1)$; $D(-1;1;0)$

គ/ $A(0;0;2)$; $B(-1;-2;1)$; $C(1;0;-1)$ $D(4;0;0)$

២១-រកសមីការប្លង់កាត់តាមបីចំនុចខាងក្រោម

ក/ $A(0;0;2)$; $B(0;3;0)$; $C(6;0;0)$

ខ/ $A(0;1;-1)$; $B(2;0;3)$; $C(-1;3;0)$

គ/ $A(1;2;3)$; $B(-1;1;2)$; $C(2;-1;4)$

២២-រកសមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1;-1;2)$ ហើយប៉ះទៅនឹង

ប្លង់ $(P): x+2y+2z-12=0$ ត្រង់ A ដែល $x_A = 2 ; y_A = 1$

២៣-រកសមីការប្លង់កាត់តាម $A(-1;1;3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ

ប្រាប់ទិស $\vec{u} = (1;2;0)$ និង $\vec{v} = (0;-1;1)$

២៤-រកសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នា

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{-3} \text{ និង } \frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+2}{2}$$

២៥-រកសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ និង $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}$

២៦-រកសមីការប្លង់កំនត់ដោយចំនុច $A(2\,;-1\,;3)$

និងបន្ទាត់ $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ ។

២៧-ក្នុងលំហគេឱ្យបីវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ ។

ចូរស្រាយថា $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}.(\vec{a}.\vec{c})-\vec{c}.(\vec{a}.\vec{b})$

២៨-គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\vec{U}_1$

និង $\vec{U}_2$ ហើយកាត់តាមចំនុចរៀងគ្នា A និង B ។

ចូរស្រាយថាចំងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរកំនត់ដោយរូបមន្ត :

$$d\big((L_1),(L_2)\big)=\frac{|(\vec{U}_1\times\vec{U}_2).\vec{AB}|}{|\vec{U}_1\times\vec{U}_2|}$$

២៩-ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}\right)$ ។

(ឯកតា $1cm$ នៅលើអក្ស) គេឱ្យបីចំនុច :

$A(1,-2,3)\;,B(3,-1,3)\;,C(5,1,4)$ ។

ក-កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់តំលៃកូស៊ីនូស នៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រពីរនេះ ។

ខ-គណនាផលគុវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ-កំនត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

ង-គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

៣០-ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យបីចំនុច $A(-2,3,4)$,$B(-5,7,7)$ និង $C(7,7,3)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ ។

៣១-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំនុច

$A(1,-3,2)$, $B(3,1,-2)$, $C(-3,7,1)$ $D(-1,-1,3)$

ក_គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់សមីការ

នៃប្លង់ (ABC) ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ខ_ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D \in (ABC)$ ។រកប្រភេទនៃចតុកោណ

$ABCD$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $ABCD$ ។

គ_សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S_1) និង (S_2) ដែលមាន

អង្កត់ផ្ចិតរៀងគ្នា $[AB]$ និង $[CD]$ ។

ឃ_បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S_1) និង (S_2) ប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់

ចំនុច M មួយដែលត្រូវបញ្ជាក់កូអរដោនេ ។

៣២-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំនុច ៖

$A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(2,0,1)$ $D(0,1\ 2)$

ក_ចូរដៅចំនុច A , B , C និង D ។

ខ_គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច **A , B , C** មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC** ។

គ_កំនត់សមីការប្លង់ **(ABC)** និងសមីការស្វ៊ែ**(S)** មានផ្ចិត **C** កាត់តាម **B** ។

ឃ_គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត **ABCD** ។

ង_សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ **(L)** កាត់តាម ចំនុច **D** ហើយកែងទៅនឹងប្លង់**(ABC)** ។

រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ**M** រវាងបន្ទាត់**(L)** នឹង**(ABC)**

៣៣-តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

គេមានចំនុច **A(0 ,2 ,2); B(2 , 0 , 3) ; C (4 , 2 , 0)**

និង **D (2 , 6, 6)** ។

ក.កំនត់កូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ខ,បង្ហាញថា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC និង $\|\overrightarrow{AD}\|$ ។

គ.ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD ។

ឃ.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ង.សរសេរសមីការស្វ៊ែផ្ចិត D ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (ABC) ។

៣៤- ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំនុច

A(4 , 0 , 0) , B(0 , 2 ,0) , C (2 , 0 , 1) D (0 , 1 2)

ក. ចូរដៅចំនុច A , B , C និង D ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច **A , B , C** មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

គ, គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ. កំនត់សមីការប្លង់(ABC) និង សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត **C** កាត់តាម **B** ។

ង. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត **ABCD** ។

ច. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ **(L)** កាត់តាមចំនុច **D** ហើយកែងទៅ នឹងប្លង់**(ABC)**។

រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ**M** រវាងបន្ទាត់**(L)** នឹង **(ABC)**

៣៥-ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ (គេយកឯកតា **1cm** នៅលើអក្ស)។ គេឱ្យបីចំនុច

$A(1,-2,3)$,$B(3,-1,3)$,$C(5,1,4)$ ។

ក_កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់តំលៃកូស៊ីនូស នៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រពីរនេះ ។

ខ_គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច**A,B,C** មិនរត់ត្រង់គ្នា

គ_គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC** ។

ឃ_កំនត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

ង_គណនាមាឌតេត្រាអែត **ABCD** រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច **D** ទៅប្លង់(ABC) ខាងលើ ។

៣៦- ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិស ដៅវិជ្ជមានគេឱ្យបួនចំនុច

$A(1,-1,2)$, $B(0,2,1)$, $C(2,0,2)$ $D(4,-1,5)$

ក_កំនត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម D ហើយ ស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។

ខ_រកប្លង់ (P) កាត់តាម A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ ។

គ_គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ E រវាង (L) និងប្លង់ (P) ។

ខ_ចូរបង្ហាញថាចតុកោណ $BCDE$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

៣៧- ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេអោយចំនុច $A(0,0,2)$,$B(2,0,1)$,$C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

ក.ដៅចំនុចA,B,C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃ ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

គ.រកសមីការប្លង់(ABC)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់(L)កែង

នឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D ។

ឃ. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right)$

ង. គណនាមាឌរបស់ព្រីសត្រង់ដែលមានកំពស់ [AE] និងមាន

បាតជាចតុកោណ ABCD ។

៣៨-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេឲ្យចំនុច A(0,2,2);B(1 , 0,0) ;C(2,0,3)

ក.ចូរដៅចំនុច A , B , C រួចរកប្រភេទត្រីកោណ ABC

ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់ក្រលាផ្ទៃ

ត្រីកោណ ABC ។កំនត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ.គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត OABC ។

ឃ.កំនត់សមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត B និង C ហើយកាត់

តាមចំនុច A រួចកំនត់សមីការប្លង់នៃមុខកាត់ដែលជា

ប្រសព្វរវាងស្វ៊ែពីរនេះ ។