រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

៥៨ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

$$\tan\theta.\tan^2\frac{\theta}{2}....\tan^{2^n}\frac{\theta}{2^n}=2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{\theta}{2^n}}{\sin 2\theta}$$

គ្រឹស្តសិទ្ធិ ២០០៨

អ្នកសហការណ៍ត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **លឹម ឆុន**

លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

លោក **ទិត្យ ម៉េង**

លោកស្រី **ទុយ រីណា**

លោក **ព្រឹម សុខនិត**

លោក **ផល ប៊ុនឆាយ**

អ្នករចនាក្រប និង បច្ចេកទេសកំព្យូទ័រ

កញ្ញា **លី គុណ្ណាកា**

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក **លឹម មិត្តសិរ**

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះខ្ញុំបាទបានខិតខំស្រាវជ្រាវ និងនិពន្ធឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងចង់ចេះ ចង់ដឹងអំពីមេរៀននេះឱ្យកាន់តែច្បាស់ ។ នៅក្នុងសៀវភៅ នេះបានប្រមូលផ្តុំនូវប្រធានលំហាត់ល្អៗយ៉ាងច្រើន និងមានលក្ខណះខុសប្លែកៗគ្នា។ប្រធានលំហាត់នីមួយៗខ្ញុំបាទបានខិតខំជ្រើសរើសយ៉ាងសម្រិតសម្រាំងបំផុតព្រមទាំងធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់និងឆាប់ចងចាំអំពីវិធីសាស្រ្តធ្វើដំណោះស្រាយលំហាត់នីមួយៗ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាតបច្ចេកទេស គរុកោសល្យ និង កំហុសអក្ខរាវិរុទ្ធប្រាកដជាកើតមានឡើងដោយអចេតនាជាពុំខានឡើយ ។ អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំបាទជាអ្នកនិពន្ធរង់ចាំទទួលនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីសោមនស្សរីករាយជានិច្ចដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពថែមទៀត ។

ខ្ញុំបាទជាអ្នកនិពន្ធសង្ឃឹមថាសៀវភៅ **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ** មួយក្បាលនេះនឹងចូលរួមនាំលោកអ្នកឆ្ពោះទៅរកជ័យជំនះក្នុងការសិក្សា និងការប្រឡងប្រជែងនានាជាពុំខានឡើយ ។

សូមឱ្យអ្នកសិក្សាទាំងអស់មានសុខភាពល្អមានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និងមានសំណាងល្អក្នុងឆាកជីវិត និង ការសិក្សា !

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៧ ខែ មករា ឆ្នាំ ២០០៨

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ លឹម ផល្គុន

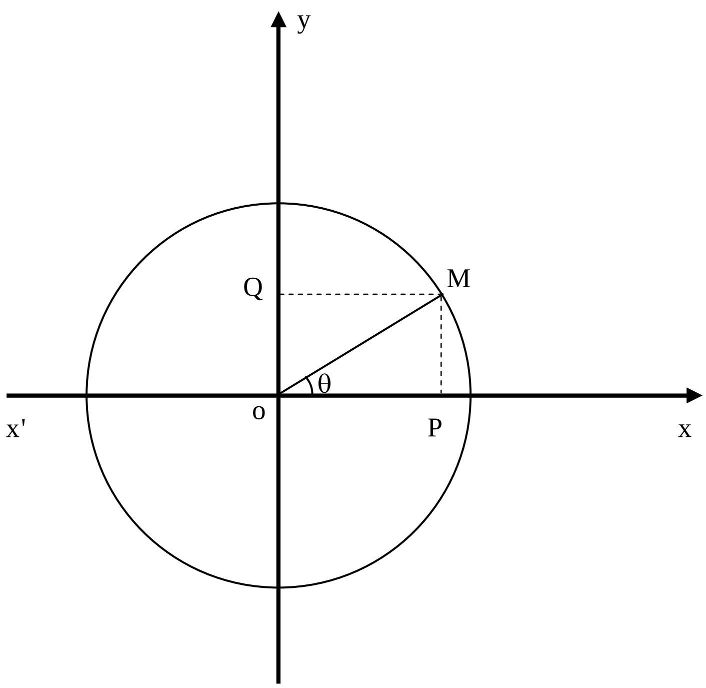
មេរៀនសង្ខេប

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១. ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រយើងតាង θ ជារង្វាស់នៃមុំ $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{OM})$ ។

គេបាន $\overline{OP} = \cos\theta$, $\overline{OQ} = \sin\theta$ ។



គេបានទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗនៃអនុគមន៍រង្វង់ត្រីកោណមាត្រដូចខាងក្រោម ៖

១, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

២, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

៣, $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

៤, $\tan\theta.\cot\theta=1$

៥, $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

៦, $1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

២. រូបមន្តផលបូក និង ផលដក

១, $\sin(a+b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

២, $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

៣, $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

៤, $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

៥, $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

៦, $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

៣. រូបមន្តមុំឌុប

១, $\sin 2a=2\sin a\cos a$

២, $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-\sin^2 a$

៣, $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

៤. រូបមន្តកន្លះមុំ

១, $\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2}$

២, $\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2}$

៣, $\tan^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}$

៥. កន្សោម $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ជាអនុគមន៍នៃ $t=\tan\frac{x}{2}$

១, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

២, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

៣, $\tan x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

៦. កន្សោម $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\tan 3a$

១, $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

២, $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

៣, $\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

៧. រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

១, $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\ \cos(a+b)+\cos(a-b)]$

២, $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\ \cos(a-b)-\cos(a+b)\ ]$

៣, $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\ \sin(a+b)+\sin(a-b)\ ]$

៤, $\sin b \cos a = \frac{1}{2}[\ \sin(a+b) - \sin(a-b)\ ]$

៦. រូបមន្តបំលែងពីផលបូកទៅផលគុណ

១, $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

២, $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

៣, $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

៤, $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

៥, $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

៦, $\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

៧, $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$

៨, $\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$

៧. សមីការត្រីកោណមាត្រ

១, សមីការ $\sin u = \sin v$ មានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l} u = v + 2k\pi \\ u = \pi - v + 2k\pi \quad , \quad k \in Z \end{array}\right.$$

២, សមីការ $\cos u = \cos v$ មានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l} u = v + 2k\pi \\ u = -v + 2k\pi \quad , \quad k \in Z \end{array}\right.$$

៣, សមីការ $\tan u = \tan v$ មានចម្លើយ $u = v + k\pi$

៨. រូបមន្តបម្លែងផ្លូវដែលគួរកត់សំគាល់

១, $\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \end{cases}$

២, $\begin{cases} \sin(\pi-\theta)=\sin\theta \\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta \end{cases}$

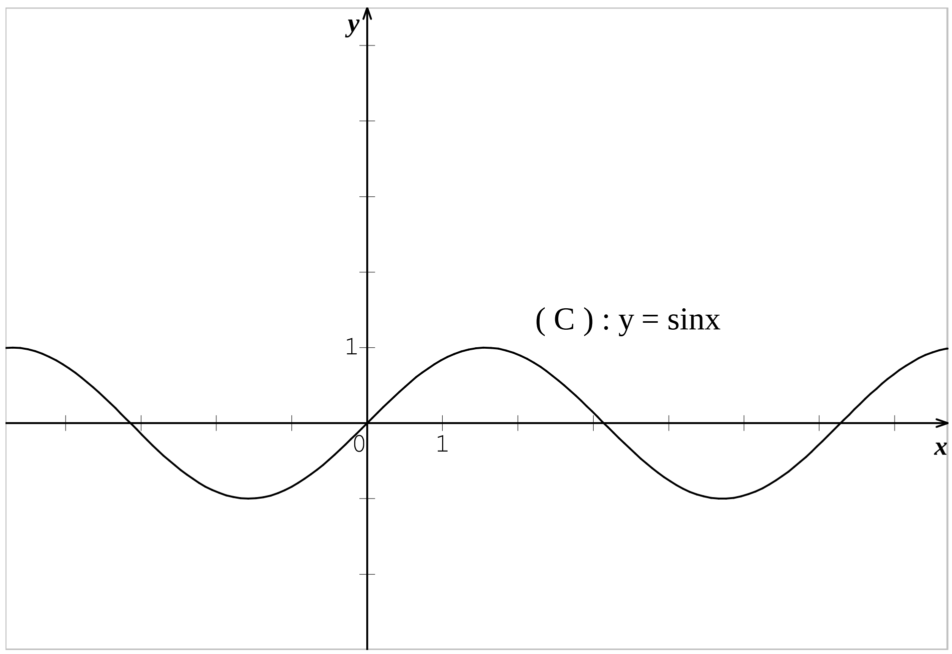
៣, $\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta \end{cases}$

៤, $\begin{cases} \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta \\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta \\ \tan(\pi+\theta)=\tan\theta \end{cases}$

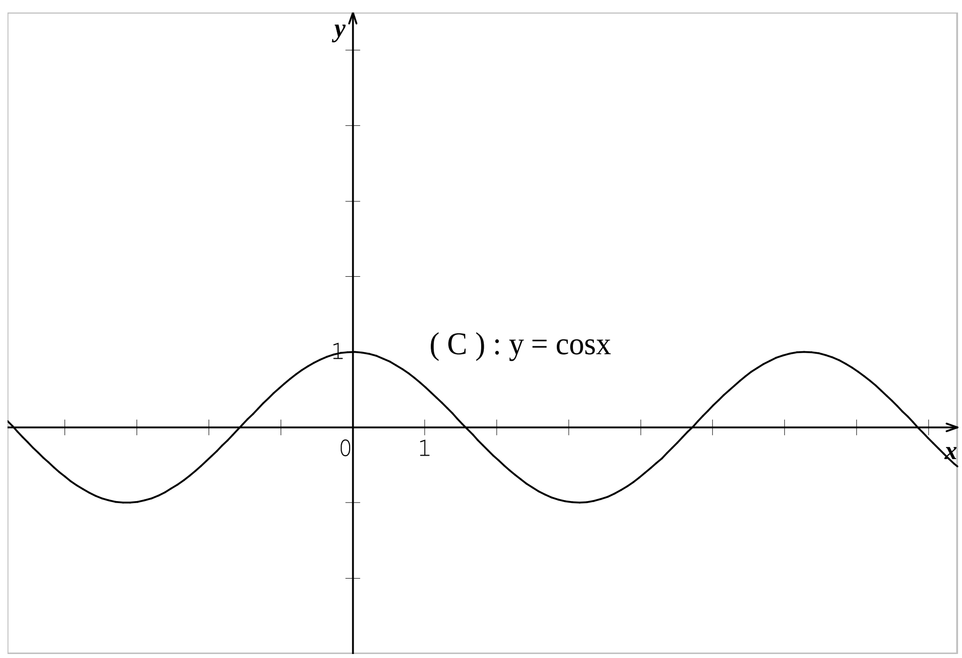
៥, $\begin{cases} \sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta \\ \cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta \\ \tan(\theta+k\pi)=\tan\theta \qquad , \quad \forall k\in Z \end{cases}$

៩. ក្រាហ្វិកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

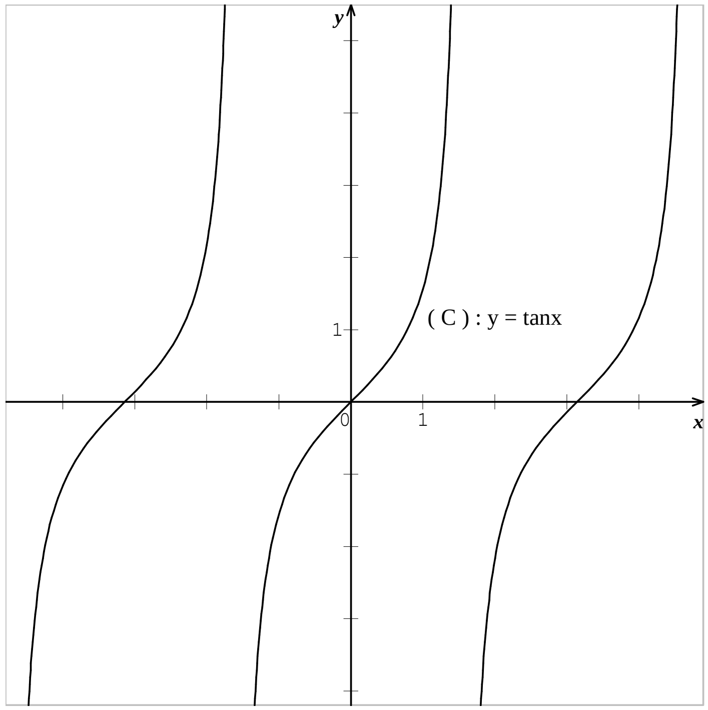
១, ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \sin x$



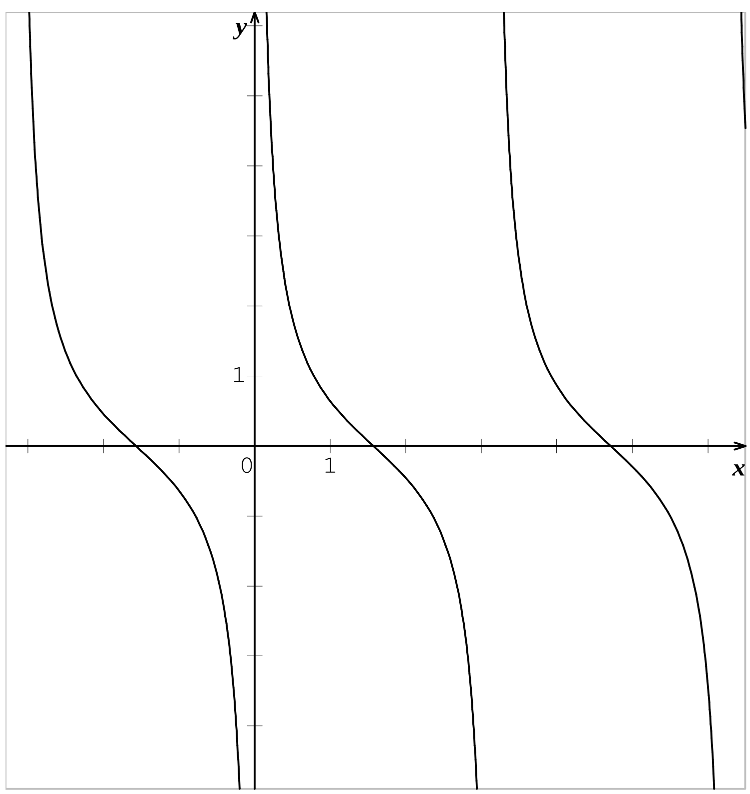
២, ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \cos x$



៣, ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \tan x$



៤, ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \cot x$



លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ $\cos\alpha = \frac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \frac{b}{c+a}$, $\cos\gamma = \frac{c}{a+b}$

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = 1$

យើងមាន $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

គេបាន $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{b+c+a}$

$$\tan^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\frac{b}{c+a}}{1+\frac{b}{c+a}} = \frac{c+a-b}{c+a+b}$$

$$\tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

យើងបាន $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{b+c-a}{a+b+c} + \frac{c+a-b}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c}$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{a+b+c}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$ ។

ដូចនេះ $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = 1$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យ $\tan\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos^8\theta}{a^3} + \frac{\sin^8\theta}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos^8\theta}{a^3} + \frac{\sin^8\theta}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$

គេមាន $\tan\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$ នាំឱ្យ $\tan^2\theta = \frac{b}{a}$ ដោយ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

គេបាន $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b}{a}$ សមមូល $\frac{\sin^2\theta}{b} = \frac{\cos^2\theta}{a} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{b+a} = \frac{1}{a+b}$

គេទាញ $\frac{\sin^2\theta}{b} = \frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\sin^8\theta}{b^3} = \frac{b}{(a+bI^4}$ (1)

ហើយ $\frac{\cos^2\theta}{a} = \frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\cos^8\theta}{a^3} = \frac{a}{(a+bI^4}$ (2)

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\cos^8\theta}{a^3} + \frac{\sin^8\theta}{b^3} = \frac{a+b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos^8\theta}{a^3} + \frac{\sin^8\theta}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងឈម

រៀងគ្នានៃមុំ A , B , C ។

តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ក, ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

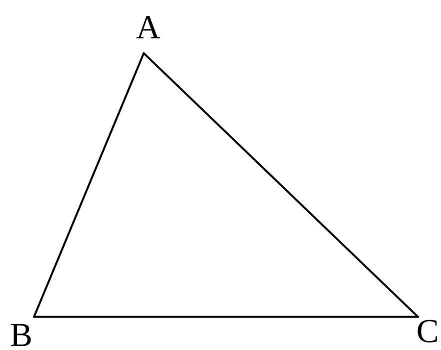
រួចទាញរកទំនាក់ទំនងពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ខ, ចូរបង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

និង $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$



គេមាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ គេទាញ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

ដោយ $a+b+c=2p$ នោះ $a+b-c=2(p-c)$, $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-c).2(p-b)}{4bc}$

នាំឱ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។

គេអាចទាញទំនាក់ទំនងស្រដៀងគ្នានេះដូចខាងក្រោម ៖

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$, $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ ។

ខ,បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$, $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ ។

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (1)

តាមវិសមភាពកូស៊ី $\alpha+\beta\ \ge\ 2\,\alpha.\beta$

គេបាន $(p-a)+(p-b)\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$

$$2p-a-b\ge 2\sqrt{(p-a)(p-c)}$$

$$c\ \ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$$

គេទាញ $\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c} \le \frac{1}{2}$ (2)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \le \frac{1}{2}$ (3)

និង $\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{b} \le \frac{1}{2}$ (4)

គុណទំនាក់ទំនង (2) , (3) ,(4) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \le \frac{1}{8} \quad (5)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (5)

គេទាញ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ ។

បង្ហាញថា $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

យើងមាន $\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេទាញ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

ហេតុនេះ $\cos A + \cos B + \cos C \le 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងឈម
រៀងគ្នានៃមុំ A , B , C ។

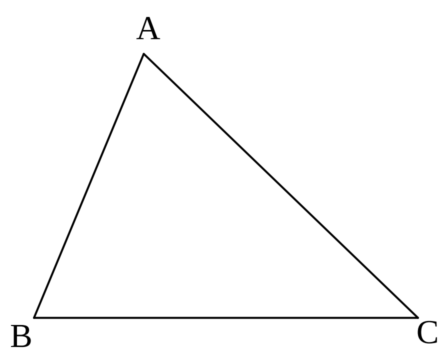
តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ក,ចូរស្រាយថា $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ រួចទាញរកទំនាក់ទំនង
ពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ខ,ទាញបញ្ជាក់ថា $bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$



គេមាន $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ គេទាញ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

ដោយ $a+b+c=2p$ នោះ $b+c-a=2\,(p-a)$

គេបាន $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2p.\,2(p-a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}$ ឬ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ។

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ។

គេទាញបានទំនាក់ទំនងស្រដៀងគ្នានេះដូចខាងក្រោម ៖

$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$ ។

ខ,ទាញបញ្ជាក់ថា $bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

គេទាញ $bc\cos^2\frac{A}{2}=p(p-a)=p^2-p.a$

$$ac\cos^2\frac{B}{2}=p(p-b)=p^2-p.b$$

$$ab\cos^2\frac{C}{2}=p(p-c)=p^2-p.c$$

$$bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=3p^2-p\,(a+b+c)$$

$$=3p^2-2p^2=p^2$$

ដូចនេះ $bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក, ចូរស្រាយថា $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$ ។

ខ, ទាញបញ្ជាក់ថា $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

យើងមាន $A + B + C = \pi$ ឬ $A + B = \pi - C$

គេបាន $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$$

ដូចនេះ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$ ។

ខ, ទាញបញ្ជាក់ថា $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$

ដោយ A , B , C ជាមុំស្រួច (តាមសម្មតិកម្ម)

គេទាញ $\tan A > 0$, $\tan B > 0$, $\tan C > 0$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងអាចសរសេរ ៖

$$\tan A + \tan B + \tan C \;\; \geq \;\; 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$$

ដោយ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

គេបាន $\tan A + \tan B + \tan B \geq 3\sqrt[3]{\tan A + \tan B + \tan C}$

$$(\tan A+\tan B+\tan C)^3 \geq 27(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$(\tan A+\tan B+\tan C)^2 \geq 27$$

ដូចនេះ $\tan A+\tan B+\tan C \geq 3\sqrt{3}$ ។

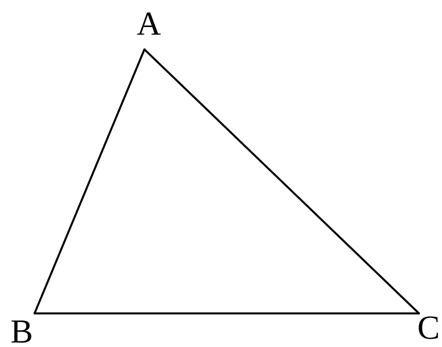
លំហាត់ទី៦

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C > 1$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C > 1$



តាង $T=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C$$

$$=1+\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}+\cos^2 C$$

$$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$=1+\cos(\pi-C)\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$=1-\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]$$

$$=1-\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$

$$=1+2\cos A\cos B\cos C$$

គេបាន $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1+2\cos A\cos B\cos C$

ដោយ A , B , C ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A>0 , \cos B>0 , \cos C>0$

នាំឱ្យ $1+2\cos A\cos B\cos C>1$

ដូចនេះ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1$ ។

<u>លំហាត់ទី៧</u>

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយថា $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$

តាង $T=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2 C$$
$$=2-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C$$
$$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$$
$$=2+\cos C\,\cos(A-B)-\cos C$$
$$=2+\cos C\,[\cos(A-B)-\cos C\,]$$
$$=2+\cos C\,[\,\cos(A-B)+\cos(A+B)\,]$$
$$=2+2\cos A\cos B\cos C$$

ដោយ A , B , C ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A>0 , \cos B>0 , \cos C>0$

នាំឱ្យ $2+2\cos A\cos B\cos C>2$

ដូចនេះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ ដែល $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$

យើងមាន $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

យើងបាន $(a+b)(b\cos^4 x+a\sin^4 x)=ab$

$ab\cos^4 x+a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\sin^4 x-ab=0$

$a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\,(\sin^4 x+\cos^4 x-1\,)=0$

$a^2\sin^2 x+b^2\cos^4 x+ab\left[\,(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-1\,\right]=0$

$a^2\sin^2 x+b^2\cos^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x=0$

$(a\sin^2 x-b\cos^2 x)=0$

គេទាញ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

គេបាន $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\cos^{10} x}{a^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ (1)

ហើយ $\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a+b}{(a+b)^5}=\frac{1}{(a+b)^4}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ។

លំហាត់ទី៩

ចូរគណនា $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

យើងបាន $S=\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}+\frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

តាង $T=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}$

$$=\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi+\frac{\pi}{7})$$

$$=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})-(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})-\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $T=-\frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$

ដូចនេះ $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$ ។

លំហាត់ទី១០

ចូរគណនា $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{5\pi}{7}$, $\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$, $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$

ហើយ $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{8\pi}{7}$ និង $\sin\frac{4\pi}{7}>0$

គេបាន $S=\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\ >0$

លើកអង្គទាំពីរជាការេគេបាន ៖

$$S^2=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាង $M=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\ \cos(\pi+\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})\ \right]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

យក $T=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$$2T\sin\frac{\pi}{7} = -2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7} = -(\sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}) - (\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}) - \sin\frac{2\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{6\pi}{7} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{7}) = -\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $T = -\frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $M = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

តាង $N = 2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} - 2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$$= \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7} = -2\sin\pi.\sin(-\frac{\pi}{7}) = 0$$

គេបាន $S^2 = M + N = \frac{7}{4} + 0 = \frac{7}{4}$ ដោយ $S > 0$

នោះ $S = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

ដូចនេះ $S = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១១

ចូរស្រាយថា $8\cos^3\frac{n\pi}{7} + 4(-1)^n\cos^2\frac{n\pi}{7} - 4\cos\frac{n\pi}{7} + (-1)^{n+1} = 0 \quad , \forall n \in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\frac{4n\pi}{7} = n\pi - \frac{3n\pi}{7} \quad , \forall n \in IN$

គេបាន $\sin\frac{4n\pi}{7} = \sin(n\pi - \frac{3n\pi}{7})$

$$2\sin\frac{2n\pi}{7}\cos\frac{2n\pi}{7}=\sin(n\pi)\cos\frac{3n\pi}{7}-\sin\frac{3n\pi}{7}\cos(n\pi)$$

$$4\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7}\ (\ 2\cos^2\frac{n\pi}{7}-1\ )=0-(3\sin\frac{n\pi}{7}-4\sin^3\frac{n\pi}{7})\ (-1)^n$$

$$4\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7}(2\cos^2\frac{n\pi}{7}-1\ )=-(-1)^n.\sin\frac{n\pi}{7}\ (3-4\sin^2\frac{n\pi}{7}\ )$$

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}=-(-1)^n.[\ 3-4\ (\ 1-\cos^2\frac{n\pi}{7})\ ]$$

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}=-(-1)^n\ .4\cos^2\frac{n\pi}{7}+(-1)^n$$

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}+4(-1)^n\cos^2\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}+(-1)^{n+1}=0$$

ដូចនេះ $8\cos^3\frac{n\pi}{7}+4(-1)^n\cos^2\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}+(-1)^{n+1}=0\ \ ,\ \forall n\in IN^*$

លំហាត់ទី១២

ចូរគណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

តាមរូបមន្ត $\cos3a=4\cos^3 a-3\cos a$ ឬ $\cos^3 a=\frac{3}{4}\cos a+\frac{1}{4}\cos3a$

កន្សោមដែលឱ្យអាចសរសេរជា ៖

$$S=\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9})+\frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3})$$

តាង $M=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$

ដោយ $-\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{13\pi}{9}$

$M=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$ គុណនឹង $2\sin\frac{\pi}{3}$ គេបាន

$$2M\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{13\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$2.M\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin(-\frac{2\pi}{9})+\sin\frac{10\pi}{9}-\sin\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}-\sin\frac{10\pi}{9}$$

$$2M\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}=2\sin\pi\cos(-\frac{7\pi}{9})=0$$

គេទាញបាន $M=0$

តាង $N=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

គេបាន $S=\frac{3}{4}M+\frac{1}{4}N=\frac{3}{8}$

ដូចនេះ $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$ ។

<u>លំហាត់ទី១៣</u>

គេឱ្យកន្សោម

$S=\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}$ និង $T=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}$

ក, ចូរស្រាយថាបីចំនួន $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឬសរបស់សមីការ

$(E)\ :\ 8x^3-4x^2-4x+1=0$ ។

ខ, ទាញរកតម្លៃ ៖

$M=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$, $N=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$

និង $P=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ ។

គ, គណនា $Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}$ រួចទាញរកតម្លៃ S និង T

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថាបីចំនួន $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសរបស់សមីការ

$$(E)\ :\ 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

តាង $x_n = \cos\frac{2n-1}{7}\pi\ ,\ n = 1, 2, 3$ ជាឫសមីការ (E) គេបាន

$$8\cos^3\frac{(2n-1)\pi}{7} - 4\cos^2\frac{(2n-1)\pi}{7} - 4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7} + 1 = 0$$

$$4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7}\left(2\cos^2\frac{(2n-1)\pi}{7} - 1\right) + 1 - 4\left(1 - \sin^2\frac{(2n-1)\pi}{4}\right) = 0$$

$$4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7}\cos\frac{2(2n-1)\pi}{7} - \left(3 - 4\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{7}\right) = 0$$

$$4\ .\ \frac{\sin\frac{2(2n-1)\pi}{7}}{2\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} \times \frac{\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}}{2\sin\frac{2(2n-1)\pi}{7}} - \frac{3\sin\frac{(2n-1)\pi}{7} - 4\sin^3\frac{(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} = 0$$

$$\frac{\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} - \frac{\sin\frac{3(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} = 0\quad (*)$$

ដោយ $\forall n \in IN^* :\ \sin\frac{(2n-1)\pi}{7} \neq 0$

ហេតុសមីការ $(*)$ សមមូល ៖

$$\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7} - \sin\frac{3(2n-1)\pi}{7} = 0$$

$$2\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2} = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) ។

ខ,ទាញរកតម្លៃ M , N , P

សន្មតថា $x_1 = \cos\frac{\pi}{7}$, $x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}$, $x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែតអនុវត្តន៍ក្នុងសមីការ $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$

គេបាន ៖

$$M = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = +\frac{1}{2}$$

$$N = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

និង $P = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{1}{8}$ ។

ដូចនេះ

$$M = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

$$N = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

និង $P = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}$ ។

គ,គណនា $Q = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7}$

យើងបាន $Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

$$= M^2 - 2N = \frac{1}{4} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $Q = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7} = \frac{5}{4}$ ។

ទាញរកតម្លៃ S និង T

យើងបាន $S = \cos^3\frac{\pi}{7} + \cos^3\frac{3\pi}{7} + \cos^3\frac{5\pi}{7}$

ឬ $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

ដោយ $x_1 = \cos\frac{\pi}{7}$, $x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}$, $x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឬសរបស់

(E) នោះគេបាន $\begin{cases} 8x_1^3 - 4x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 & (1) \\ 8x_2^3 - 4x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 & (2) \\ 8x_3^3 - 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0 & (3) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) , (2) , (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$8(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 0$$

$$8S - 4Q - 4M + 3 = 0$$

គេទាញ $S = \frac{Q+M}{2} - \frac{3}{8} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $S = \cos^3\frac{\pi}{7} + \cos^3\frac{3\pi}{7} + \cos^3\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $T = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7} = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

ដោយគុណសមីការ (1) , (2) , (3) រៀងគ្នានឹង x_1 , x_2 , x_3

គេបាន $\begin{cases} 8x_1^4 - 4x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 = 0 & (1') \\ 8x_2^4 - 4x_2^3 - 4x_2^2 + x_2 = 0 & (2') \\ 8x_3^4 - 4x_3^3 - 4x_3^2 + x_2 = 0 & (3') \end{cases}$

បូកសមីការ $(1')$, $(2')$, $(3')$ អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$8(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 4(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$8T - 4S - 4Q + M = 0$$

គេទាញ $T = \frac{S+Q}{2} - \frac{M}{8} = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ ។

ដូចនេះ $T = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7} = \frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី១៤

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1-x^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $1 - x^2 \geq 0$ ឬ $x \in [-1, 1]$

យើងមាន $\cos 4a = \cos(a + 3a)$

$$= \cos a \cos 3a - \sin a \sin 3a$$
$$= \cos a(4\cos^3 a - 3\cos a) - \sin a(3\sin a - 4\sin^3 a)$$
$$= 4\cos^4 a - 3\cos^2 a - 3\sin^2 a + 4\sin^4 a$$
$$= 4\cos^4 a + 4(1-\cos^2 a)^2 - 3(\cos^2 a + \sin^2 a)$$
$$= 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$$

$$\cos 5a = \cos(a + 4a)$$
$$= \cos a \cos 4a - \sin a \sin 4a$$
$$= \cos a(8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1) - 2\sin a \sin 2a \cos 2a$$
$$= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a - 4\sin^2 a \cos a(2\cos^2 a - 1)$$
$$= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a - 4(1-\cos^2 a)(2\cos^3 a - \cos a)$$
$$= 16\cos^5 - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

$$\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1 = 2(4\cos^3 a - 3\cos a)^2 - 1$$
$$= 32\cos^6 a - 48\cos^4 a + 18\cos^2 a - 1$$

$$\cos 7a = \cos(6a + a) = \cos 6a \cos a - \sin 6a \sin a$$
$$= \cos a \cos 6a - 2\sin a \sin 3a \cos 3a$$
$$= \cos a \cos 6a - 2\sin a(3\sin a - 4\sin^3 a)(4\cos^3 a - 3\cos a)$$
$$= 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos^3 a - 7\cos a$$

យក $x=\cos t$ ដែល $t\in[0,\pi]$ សមីការ (1) សរសេរ ៖

$$64\cos^6 t-112\cos^4 t+56\cos^2 t-7=2\sqrt{1-\cos^2 t}$$

$$64\cos^6 t-112\cos^4 t+56\cos^2 t-7=2\sin t$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos t\neq 0$ គេបាន ៖

$$64\cos^7 t-112\cos^5 t+56\cos^3 t-7\cos t=2\sin t\cos t$$

$$\cos 7t=\sin 2t$$

$$\cos 7t=\cos(\frac{\pi}{2}-2t)$$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} 7t=\frac{\pi}{2}-2t+2k\pi \\ 7t=-\frac{\pi}{2}+2t+2k'\pi \ \ , \ k;k'\in Z \end{array}\right.$

សមមូល $\left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{9} \\ t=-\frac{\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{9} \ \ , \ k\,;k'\in Z \end{array}\right.$

ដោយ $t\in[0,\pi]$ គេទាញសំណុំតម្លៃ t ដូចខាងក្រោម ៖

$t\in\{\frac{\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{9\pi}{18};\frac{13\pi}{18};\frac{17\pi}{18};\frac{3\pi}{10};\frac{7\pi}{10}\}$ ដោយ $\cos t\neq 0$ នោះ $t\neq\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះសមីការ (1) មានសំណុំឫសដូចខាងក្រោម ៖

$x\in\{\cos\frac{\pi}{18};\cos\frac{5\pi}{18};\cos\frac{13\pi}{18};\cos\frac{17\pi}{18};\cos\frac{3\pi}{10};\cos\frac{7\pi}{10}\}$ ។

លំហាត់ទី១៥

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\tan^6 x + (\tan^2 x + 1)^3 + (\tan^2 x + 2)^3 = (\tan^2 x + 3)^3$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\tan^6 x + (\tan^2 x + 1)^3 + (\tan^2 x + 2)^3 = (\tan^2 x + 3)^3$,

លក្ខខ័ណ្ឌ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in Z$ ។

តាង $t = \tan^2 x \ , \ t \geq 0$ សមីការសរសេរ ៖

$$t^3 + (t+1)^3 + (t+2)^3 = (t+3)^3$$

$$t^3 + (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + (t^3 + 6t^2 + 12t + 8) = t^3 + 9t^2 + 27t + 27$$

$$3t^3 + 9t^2 + 15t + 9 = t^3 + 9t^2 + 27t + 27$$

$$2(t^3 - 6t - 9) = 0$$

$$(t^3 - 27) - (6t - 18) = 0$$

$$(t-3)(t^2 + 3t + 9) - 6(t-3) = 0$$

$$(t-3)(t^2 + 3t + 3) = 0$$

គេទាញ $t = 3$ និង $t^2 + 3t + 3 = 0$ គ្មានឫសព្រោះ $\Delta = 9 - 12 < 0$

ចំពោះ $t = 3$ គេបាន $\tan^2 x = 3$

$$\tan^2 x - 3 = 0$$

$$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) = 0$$

គេបាន $\tan x - \sqrt{3} = 0$ ឬ $\tan x = \sqrt{3}$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ , k \in Z$

ហើយ $\tan x + \sqrt{3} = 0$ ឬ $\tan x = -\sqrt{3}$ នាំឱ្យ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ , k \in Z$

លំហាត់ទី១៦

គេមាន α ជាធ្នូរមួយដែលគិតជារ៉ាដ្យង់ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ។

គេឱ្យខ្សែកោង (P) សមីការ $y = x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha$ ។

១, ចូរកំនត់តម្លៃ α ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង(P) ប៉ះនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស (x'ox) រួចសង់ខ្សែកោង (P) ទាំងនោះ ។

២, បង្ហាញថាក្រៅពីករណីក្នុងសំណួរទី១ ខ្សែកោង (P) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស(x'ox) បានពីរចំនុច M' និង M'' ដែលមានអាប់ស៊ីសវិជ្ជមាន ។

៣, តើគេត្រូវឱ្យតម្លៃ α ប៉ុន្មានខ្លះទើបអាប់ស៊ីស X' និង x'' នៃចំនុច M' និង M'' ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x'^2 + x''^2 = 2$

៤, ចូររកទំនាក់ទំនងគ្មានអាស្រ័យនឹង α រវាងអាប់ស៊ីស X' និង x'' ។

ដំណោះស្រាយ

១, ខ្សែកោង (P) ប៉ះនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស (x'ox) ៖

កូអរដោនេកំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល (P) គឺ $x_S = -\frac{b}{2a} = \cos\alpha$

ហើយ $y_S = \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 - \sin\alpha$

$$= 1 - \cos^2\alpha - \sin\alpha$$

$$= \sin^2\alpha - \sin\alpha$$

ខ្សែកោង (P) ប៉ះនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស (x'ox) កាលណា $y_S = 0$

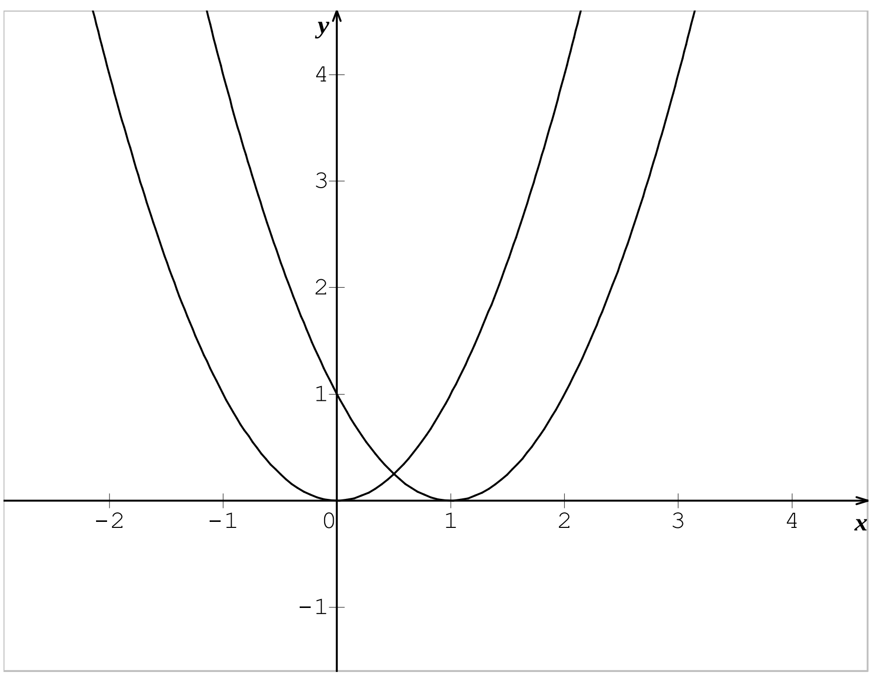
គេបាន $\sin^2\alpha - \sin\alpha = 0$

ឬ $\sin\alpha\,(\sin\alpha - 1) = 0$ នាំឱ្យ $\sin\alpha = 0$ និង $\sin\alpha = 1$

ដោយ $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ហេតុនេះគេទាញ $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ។

សង់ខ្សែកោង (P) ៖

- បើ $\alpha = 0$ គេបាន $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- បើ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ គេបាន $y = x^2$



២, អាប់ស៊ីសនៃចំនុច M' និង M''

អាប់ស៊ីសនៃចំនុច M' និង M'' គឺជាឬសរបស់សមីការ ៖

$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha = 0$

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមនៃសមីការគឺ $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 + \sin\alpha$

$= \sin\alpha - \sin^2\alpha$

$= \sin\alpha\,(1 - \sin\alpha)$

គេមាន $\sin\alpha$ និង $1 - \sin\alpha$ វិជ្ជមានជានិច្ចគ្រប់

$\alpha \in \left]\,0\;,\frac{\pi}{2}\,\right[$ ។

គេទាញបាន $\Delta' = \sin\alpha\,(1 - \sin\alpha) > 0$ នាំឱ្យ (P) កាត់អក្ស

អាប់ស៊ីសជានិច្ចត្រង់ពីរចំនុច M' និង M'' ។

ម្យ៉ាងទៀតផលគុណ និងផលបូកនៃឫស $P = 1 - \sin\alpha$

និង $S = 2\cos\alpha$ ។

សុទ្ធតែវិជ្ជមានគ្រប់ $\alpha \in \left]\,0\;,\frac{\pi}{2}\,\right[$ ដូចនេះ x'

និង x'' សុទ្ធតែវិជ្ជមាន ។

៣, លក្ខខ័ណ្ឌ $x'^2 + x''^2 = 2$

គេមាន $x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P$

$= 4\cos^2\alpha - 2(1 - \sin\alpha) = 2(2\cos^2 - 1 + \sin\alpha)$

$= 2(2 - 2\sin^2\alpha - 1 + \sin\alpha) = 2(-2\sin^2\alpha + \sin\alpha + 1)$

ដោយ $x'^2 + x''^2 = 2$ គេទាញបាន

$2(-2\sin^2\alpha + \sin\alpha + 1) = 2$

$-2\sin^2 + \sin\alpha + 1 \quad = 1$

$-2\sin^2\alpha + \sin\alpha = 0$

$\sin\alpha(1 - 2\sin\alpha) = 0$

ដោយ $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ហេតុនេះគេទាញ $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

៤,ទំនាក់ទំនងគ្មានអាស្រ័យនឹង α រវាងអាប់ស៊ីស x' និង x''

គេមាន $S = 2\cos\alpha$ និង $P = 1 - \sin\alpha$

គេទាញបាន $\cos\alpha = \frac{S}{2}$ និង $\sin\alpha = 1 - P$

ដោយគ្រប់ចំនួនពិត α គេមាន $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

គេបាន $\frac{S^2}{4} + (1-P)^2 = 1$

$$S^2 + 4(1-P)^2 = 4$$

$$S^2 + 4P^2 - 8P = 0$$

$$S^2 + 4P(P-2) = 0$$

ដូចនេះ $(x'+x'')^2 + 4x'x''(x'x''-2) = 0$

លំហាត់ទី១៧

គេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖

$(E): x^2 + (\frac{1}{\cos\varphi} - 2)\, x + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 = 0$ ដែល $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ ។

គេឧបមាថាសមីការ (E) មានឬសពីរដែលតាងដោយ $\tan a$ និង $\tan b$ ។

ក, កំនត់តម្លៃ φ ដើម្បីឱ្យ $a + b = \frac{\pi}{4}$ ។

ខ, ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ φ ដែលបានរកឃើញ

គ, ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, កំនត់តម្លៃ φ ដើម្បីឱ្យ $a + b = \frac{\pi}{4}$

ដោយ $\tan a$ និង $\tan b$ ជាឬសរបស់ (E) នោះគេមានទំនាក់ទំនង

$\tan a + \tan b = 2 - \frac{1}{\cos\varphi}$ (1) និង $\tan a \tan b = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ (2)

តាមរូបមន្ត $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ (3)

យកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$\tan(a+b) = \frac{2 - \frac{1}{\cos\varphi}}{1 - (\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)} = \frac{\sqrt{3}(2\cos\varphi - 1)}{(2\sqrt{3} - 2)\cos\varphi}$$ ដោយ $a + b = \frac{\pi}{4}$

គេទាញបាន $\dfrac{\sqrt{3}(2\cos\varphi-1)}{(2\sqrt{3}-2)\cos\varphi} = 1$

$$2\sqrt{3}\cos\varphi-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cos\varphi-2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដោយ $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ ដូចនេះគេទាញ $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ ។

ខ, ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

បើ $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ នោះ (E) អាចសរសេរ $x^2+(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2)\,x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1=0$

$$\Delta=(\frac{2}{\sqrt{3}}-2)^2-4(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)=\frac{4}{3}-\frac{8}{\sqrt{3}}+4-\frac{8}{\sqrt{3}}+4=\frac{28}{3}-\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta=\frac{4(7-4\sqrt{3})}{3}=\frac{4(2-\sqrt{3})^2}{3}$$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}+2+\dfrac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x_2=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}+2-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

ដូចនេះ $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=2-\sqrt{3}$ ។

គ, ប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\dfrac{\pi}{12}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=2-\sqrt{3}$

គេទាញ $\tan a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ និង $\tan b=2-\sqrt{3}$

ដោយ $\tan a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ នាំឱ្យ $a=\dfrac{\pi}{6}$ ហើយ $a+b=\dfrac{\pi}{4}$

នាំឱ្យ $b=\dfrac{\pi}{4}-a=\dfrac{\pi}{12}$ ដូចនេះ $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x+c}+\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x+c}$

ដែល $a\,,\,b\,,\,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\ \le\ f(x)\ \le\ 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}+c}$

រួចបញ្ជាក់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\ \le\ f(x)\ \le\ 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}+c}$

យើងមាន $f(x)=\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x+c}+\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x+c}$ (1)

ដោយ $a\,,\,b\,,\,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះ $\forall x\in IR: f(x)>0$

លើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាការេគេបាន ៖

$$f^2(x)=\left(\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x+c}+\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x+c}\right)^2$$

$$f^2(x)=a+b+2c+2\sqrt{(a\sin^2x+b\cos^2x+c)(a\cos^2x+b\sin^2x+c)}\quad(2)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីគ្រប់ចំនួនពិត $A,\ B\ge 0$

គេមាន $A+B\ge 2\sqrt{A.B}$ ឬ $2\sqrt{A.B}\le A+B$

គេបាន $2\sqrt{(a\sin^2x+b\cos^2x+c)(a\cos^2x+b\sin^2x+c)}\ \le\ a+b+2c$

តាមទំនាក់ទំនង (2) គេទាញបាន ៖

$$f^2(x)\le a+b+2c+a+b+2c=4\left(\frac{a+b}{2}+c\right)$$

នាំឱ្យ $f(x)\le 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}+c}$ (3)

យក $P(x)=(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)$

$$P(x)=[\ a(1-\cos^2 x)+b\cos^2 x+c]\,[a\cos^2 x+b(1-\cos^2 x)+c]$$
$$P(x)=[(a+c)+(b-a)\cos^2 x]\,[\ (b+c)-(b-a)\cos^2 x]$$
$$P(x)=(a+c)(b+c)-(a+c)(b-a)\cos^2 x+(b+c)(b-a)\cos^2 x-(b-a)^2\cos^4 x$$
$$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x-(b-a)^2\cos^4 x$$
$$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x\sin^2 x$$

យើងមាន $(b-a)^2\sin^2 x\cos^2 x\ge 0\ \ ,\ \forall x\in IR$

គេទាញបាន $P(x)\ge(a+c)(b+c)\ \ ,\ \forall x\in IR$

ទំនាក់ទំនង (2) គេអាចសរសេរ ៖

$$f^2(x)=a+b+2c+2\sqrt{P(x)}\ge a+b+2c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$
$$f^2(x)\ge(a+c)+(b+c)+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$
$$f^2(x)\ge(\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c})^2$$

គេទាញ $f(x)\ge\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\ \ (4)$

តាមទំនាក់ទំនង (3) និង (4) គេទាញបាន ៖

$\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\ \le\ f(x)\ \le\ 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}+c}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ដូចអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ $M=2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}+c}$

និងមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ $m=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$ ។

លំហាត់ទី១៩

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$P(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 27$

$Q(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 8(\tan x + \cot x) + 87$

ដែល $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$P(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 27$ ដែល $0 < x < \frac{\pi}{2}$

តាង $z = \tan x + \cot x$ ដែល $z \geq 2$

គេបាន $z^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$

គេទាញ $\tan^2 x + \cot^2 x = z^2 - 2$

យើងបាន $P(z) = z^2 - 2 - 2z + 27 = (z-1)^2 + 24$

ដោយ $z \geq 2$ ហេតុនេះគេបាន $P(z) \geq 1 + 24 = 25$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $P(x)$ គឺ $m = 25$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $Q(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 8(\tan x + \cot x) + 87$

គេបាន $Q(z) = z^2 - 2 - 8z + 87 = (z-4)^2 + 69$

ដោយ $z \geq 2$ ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ Q អប្បបរមាលុះត្រាតែ

$z = 4$ ។ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $Q(x)$ គឺ $m = 69$ ។

លំហាត់ទី២០

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

តាមរូបមន្ត $2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជាបន្តបន្ទាប់ខាងក្រោម ៖

$$2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$2\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1 = 1+\sqrt{2}$$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad , \ k\in Z \end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{x=-\frac{\pi}{24}+k\pi \ , \ x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \ ; k\in Z}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}\\
&= \sqrt{\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}}\\
&= \sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})}\\
&= \sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x})}\\
&= \sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})}\\
&= \sqrt{4+\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right](1+\frac{16}{\sin^4 2x})}\\
&= \sqrt{4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})}
\end{aligned}
$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x\le 1$ នាំឱ្យ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\ge\frac{1}{2}$ និង

$1+\frac{16}{\sin^4 2x}\ge 17$ ។

គេទាញ $4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})\ge 4+\frac{17}{2}=\frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x)=\sqrt{4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})}\ge\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍គឺ $m=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យពីរចំនួនពិត a និង b ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x \in IR : | a\cos x + b\sin x | \le \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ រកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ

$f(x) = 20\cos x + 21\sin x + 22$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x \in IR : | a\cos x + b\sin x | \le \sqrt{a^2 + b^2}$

យើងជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រ $\vec{U}(a ; b)$ និង $\vec{V}(\cos x ; \sin x)$

តាមនិយមន័យ $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំរវាង

ពីរវ៉ិចទ័រនេះ ។

គេបាន $\left| \vec{U}.\vec{V} \right| = \left| \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos\theta \right| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\| |\cos\theta|$

ដោយគេមាន $\forall \theta \in IR : |\cos\theta| \le 1$

គេបាន $\left| \vec{U}.\vec{V} \right| \le \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|$

ដោយ $\begin{cases} \vec{U}.\vec{V} = a\cos x + b\sin x \\ \|\vec{U}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \|\vec{V}\| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\forall x \in IR : | a\cos x + b\sin x | \le \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

រកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $f(x) = 20\cos x + 21\sin x + 22$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងមាន $|20\cos x+21\sin x|\le\sqrt{20^2+21^2}=29$

គេទាញ $-29\le 20\cos x+21\sin x\le 29$

នាំឱ្យ $-7\le f(x)\le 51\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមា 51 និង អប្បបរមា -7

លំហាត់ទី២៣

$f(x)$ ជាតម្លៃពិតនៃអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

គេមាន $f(x)+2f(-x)=3\cos x-\sin x$ ។

ចូរស្រាយថា $f(x)\le\sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f(x)\le\sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

គេមាន $f(x)+2f(-x)=3\cos x-\sin x\quad(1)$

ដោយជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុងទំនាក់ទំនង (1) គេបាន

$f(-x)+2f(x)=3\cos x+\sin x\quad(2)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\underbrace{\begin{cases}f(x)+2f(-x)=3\cos x-\sin x & \Big|\ 1\\ 2f(x)+f(-x)=3\cos x+\sin x & \Big|-2\end{cases}}$$

$$-3f(x)\qquad=-3\cos x-3\sin x$$

គេទាញបាន $f(x)=\cos x+\sin x$

$$f(x)=\sqrt{2}\ (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)$$
$$=\sqrt{2}\ (\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4})$$
$$=\sqrt{2}\ \sin(\frac{\pi}{4}+x)$$

ដោយ $\forall x\in IR:\sin(\frac{\pi}{4}+x)\le 1$ ។

ដូចនេះ $f(x)\le\sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

លំហាត់ទី២៤

គេមាន $f(x)$ អនុគមន៍កំនត់លើ IR ដោយ ៖

$f(\sin x)+3f(\cos x)=2+\cos 2x$,

ក_ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ_ ដោះស្រាយសមីការ $f(1-\tan t).f(1+\tan t)=\frac{f(1-\tan t)+f(1+\tan t)}{2}$

(t ជាអញ្ញាតនៃសមីការ) ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2}-x$ គេបាន $f(\cos x)+3f(\sin x)=2-\cos 2x$

យើងបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} f(\sin x)+3f(\cos x)=2+\cos 2x \\ 3f(\sin x)+f(\cos x)=2-\cos 2x \end{cases}$

បំបាត់ $f(\sin x)$ គេទាញបាន $f(\cos x)=\frac{1+\cos 2x}{2}=\cos^2 x$

ដូចនេះ $f(x)=x^2$ ។

ខ_ ដោះស្រាយសមីការ

$$f(1-\tan t).f(1+\tan t)=\frac{f(1-\tan t)+f(1+\tan t)}{2}$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in Z$

$$(1-\tan t)^2(1+\tan t)^2=\frac{(1-\tan t)^2+(1+\tan t)^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយសមីការនេះគេបានចំលើយ

$t=k\pi\ ;\ t=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\ ,\ k\in Z$ ។

<u>លំហាត់ទី២៥</u>

គេឱ្យខ្សែកោង $(P):y=f(x)=x^2\sin\varphi-2(1+\sin\varphi)x+5-\sin\varphi$

ដែល $0<\varphi<\pi$ ។

កំនត់តម្លៃ φ ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (P) ស្ថិតនៅលើអក្ស័

អាប់ស៊ីសជានិច្ច ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំនត់តម្លៃ φ

គេមាន $(P):y=f(x)=x^2\sin\varphi-2(1+\sin\varphi)x+5-\sin\varphi$

ដើម្បីឱ្យ(P) ស្ថិតនៅលើអក្ស័អាប់ស៊ីសជានិច្ចលុះត្រាតែ

$f(x)>0\ ,\ \forall x\in IR$

ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\begin{cases}a_f>0\\ \Delta'<0\end{cases}$

គេមាន $a_f=\sin\varphi>0\ ;\ \forall\varphi\in]\,0\,;\,\pi[$

ហើយ $\Delta' = (1+\sin\varphi)^2 - \sin\varphi(5-\sin\varphi)$

$$\Delta' = 1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi - 5\sin\varphi + \sin^2\varphi$$
$$\Delta' = 2\sin^2\varphi - 3\sin\varphi + 1$$
$$\Delta' = (2\sin\varphi - 1)(\sin\varphi - 1)$$

បើ $\Delta' < 0$ សមមូល $\frac{1}{2} < \sin\varphi < 1$ ដោយ $0 < \varphi < \pi$

គេទាញបាន $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (P) ស្ថិតនៅលើអក្សអាប់ស៊ីស

ជានិច្ចលុះត្រាតែគេឱ្យល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៦

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2}\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2}\cos^2 x} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\cos^2 x - \frac{1}{4}\right| + \left|\cos^2 x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

តាង $t = \cos^2 x$ ដែល $0 \le t \le 1$ សមីការ (2) អាចសរសេរ

$$\left| t-\frac{1}{4} \right| + \left| t-\frac{3}{4} \right| = \frac{1}{2} \quad (3)$$

លើអក្ស័ $(x'ox)$ ជ្រើសរើសចំនុច $M(t)\ ,A(\frac{1}{4})\ ,B(\frac{3}{4})$

តាម (3) គេបាន $MA+MB=\frac{1}{2}$ ដោយ $AB=\frac{1}{2}$

គេបាន $MA+MB=AB$ នាំឱ្យ M នៅក្នុង $[AB]$

គេទាញ $\frac{1}{4}\le t\le\frac{3}{4}$ សមមូល $\frac{1}{4}\le\cos^2 x\le\frac{3}{4}$

សមមូល $\frac{1}{2}\le|\cos x|\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ គេទាញ

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}+\kappa\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi \\ -\frac{\pi}{3}+k'\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}+k'\pi\ \ ,k;k'\in Z \end{array}\right.$$

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក, ចូរស្រាយថា $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ។

ខ, ចូរស្រាយថា $\cot^2 A-1=2\cot 2A\cot A$ ។

គ, គេដឹងថាមុំ $A\,;B\,;C$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មួយដែលមានរេសុងស្មើនឹង $q=2$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=8$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

យើងមាន $A+B+C=\pi$ ឬ $A+B=\pi-C$

គេបាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

$$\frac{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}{1-\frac{1}{\cot A}.\frac{1}{\cot B}}=-\frac{1}{\cot C}$$

$$\frac{\cot A+\cot B}{\cot A\cot B-1}=-\frac{1}{\cot C}$$

$$\cot A\cot C+\cot B\cot C=-\cot A\cot B+1$$

ដូចនេះ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ។

ខ, ស្រាយថា $\cot^2 A-1=2\cot 2A\cot A$

យើងមាន $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$$\frac{1}{\cot 2A}=\frac{\frac{2}{\cot A}}{1-\frac{1}{\cot^2 A}}=\frac{2\cot A}{\cot^2 A-1}$$

ដូចនេះ $\cot^2 A-1=2\cot 2A\cot A$ ។

គ, ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=8$

តាង $T=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}$

$$=(1+\cot^2 A)+(1+\cot^2 B)+(1+\cot^2 C)$$

$$=(\cot^2 A-1)+(\cot^2 B-1)+(\cot^2 C-1)+6$$

$$=2\cot 2A\cot A+2\cot B\cot 2B+2\cot 2C\cot C+6 \quad (1)$$

ដោយមុំ $A\,;B\,;C$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលមានរេសុង
ស្មើនឹង $q=2$ គេបាន $B=2A$, $C=2B=4A$

ដោយ $A+B+C=\pi$

គេបាន $A+2A+4A=\pi$ នាំឱ្យ $A=\frac{\pi}{7},\ B=\frac{2\pi}{7}\ ,C=\frac{4\pi}{7}$

តាម (1) គេបាន $T=2\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7}+2\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+\cot\frac{8\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+6$

ដោយ $\cot\frac{8\pi}{7}=\cot\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$T=2\cot\frac{\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7}+2\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+2\cot\frac{\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+6$$
$$=2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot A\cot C)+6=2(1)+6=8$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=8$ ។

លំហាត់ទី២៨

១, ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

$$\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x \quad , x \in IR , n \in IN^* ,$$

២, អនុវត្តន៍ ៖ ចូរសរសេរ $\cos 7x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos x$ ។

៣, ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$128\cos^7 x - 244\cos^5 x + 112\cos^3 x - 14\cos x - 1 = 0$$ ។

ដំណោះស្រាយ

១, ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

$$\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x$$

យើងមាន ៖

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos\frac{(n+1)x-(n-1)x}{2}.\cos\frac{(n+1)x+(n-1)x}{2}$$

សមមូល $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x.\cos(nx)$

ដូចនេះ $\boxed{\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x}$,។

២, អនុវត្តន៍ ៖សរសេរ $\cos 7x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos x$

គេមាន $\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x$,

បើ $n=1$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

បើ $n=2$ $\cos 3x = 2\cos x\cos 2x - \cos x$

$$= 2\cos x(2\cos^2 x - 1) - \cos x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

បើ $n=3$ $\cos 4x = 2\cos x\cos 3x - \cos 2x$

$$= 2\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) - (2\cos^2 x - 1)$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

បើ $n=4$ $\cos 5x = 2\cos x\cos 4x - \cos 3x$

$$= 2\cos x(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - (4\cos^3 x - 3\cos x)$$
$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

បើ $n=5$ $\cos 6x = 2\cos x\cos 5x - \cos 4x$

$$= 2\cos x(16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x) - (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1)$$
$$= 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$$

បើ $n=6$ $\cos 7x = 2\cos x\cos 6x - \cos 5x$

ដូចនេះ $\boxed{\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x}$,

៣, ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$128\cos^7 x - 244\cos^5 x + 112\cos^3 x - 14\cos x - 1 = 0 \quad (1)$$,

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) នឹង 2 គេបាន ៖

$$64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos 7x = \frac{1}{2}$$

គេទាញបាន $7x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ឬ $x = \pm\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}$, $k \in Z$

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}$, $x = -\frac{\pi}{21} + \frac{2k'\pi}{7}$; $k;k' \in Z$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយៈ

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$ ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក, តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ, គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ៖

មាន $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} - \cot\frac{a}{2}$

តែ $U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

គេបាន $V_{n+1} = U_n \cos a + \sin a - \cot\frac{a}{2}$

$$= U_n \cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} - \cot\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin^2\frac{a}{2} - 1) \quad ; \quad \cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a - \cot\frac{a}{2}\cos a = (U_n - \cot\frac{a}{2})\cos a$$

$$= V_n \cos a$$

ដោយ $V_{n+1} = V_n \cos a$ នាំឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មួយមានរេសុង $\cos a$ និង តួ $V_0 = U_0 - \cot\frac{a}{2} = 1 - \cot\frac{a}{2}$ ។

ខ, គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

យើងមាន $V_0 + V_1 + ... + V_n = V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = (1-\cot\frac{a}{2}).\frac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\frac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}\right]$

ដោយ $0 < a < \frac{\pi}{2}$ នោះ $0 < \cos a < 1$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{n+1}a = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n) = \frac{1-\cot\frac{a}{2}}{1-\cos a}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឱ្យ $U_n = V_n + \cot\frac{a}{2}$

ដោយ $V_n = V_0 \times q^n = (1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a$

គេបាន $U_n = (1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a + \cot\frac{a}{2}$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a + \cot\frac{a}{2}\right] = \cot\frac{a}{2}$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n a = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \cot\frac{a}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$ ដែល $a \in IR$

ក, តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\, U_n$, $\forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍ n និង a ។

ខ, ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

ក, បង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n$

យើងបាន
$$\begin{aligned}
Z_{n+1} &= U_{n+2} - (\cos a - i\sin a)U_{n+1} \\
&= 2U_{n+1}\cos a - U_n - (\cos a - i\sin a)U_{n+1} \\
&= (\cos a + i\sin a)U_{n+1} - U_n \\
&= (\cos a + i\sin a)\left(U_{n+1} - \frac{U_n}{\cos a + i\sin a}\right) \\
&= (\cos a + i\sin a)\left[U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n\right] \\
&= (\cos a + i\sin a)\, U_n
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ ។

គណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ៖

ដោយ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ នាំឱ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q = \cos a + i\sin a$ និង

ឬ $Z_0 = U_1 - (\cos a - i\sin a)U_0 = 1$ ។

តាមរូបមន្ត $Z_n = Z_0 \times q^n = (\cos a + i\sin a)^n = \cos(na) + i\sin(na)$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = \cos(na) + i.\sin(na)}$ ។

ខ, ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n$ (1)

និង $\overline{Z}_n = U_{n+1} - (\cos a + i\sin a)U_n$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$Z_n - \overline{Z}_n = 2i\sin a\ U_n$ នាំឱ្យ $U_n = \dfrac{Z_n - \overline{Z}_n}{2i\sin a}$ ដែល $\sin a \neq 0$ ។

ដោយ $Z_n = \cos(na) + i\sin(na)$ និង $\overline{Z}_n = \cos(na) - i\sin(na)$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \dfrac{\sin(na)}{\sin a}}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យ $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^4}$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ ÷

គេមាន $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^4}$

តាមលំនាំឧទាហរណ៍យើងអាចទាញរករូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ÷

$$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះ ៖

យើងតាង $A_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(n)}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

យើងមាន $A_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ

$$A_p = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(p)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $A_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

យើងមាន $A_{p+1} = \sqrt{2 + A_p}$ ដោយតាមការឧបមា $A_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងបាន $A_{p+1} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} Z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\ Z_n + |\,Z_n\,|\ );\ n \in IN \end{cases}$$

($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$ ដែល $\rho_n > 0$, ρ_n ; $\theta_n \in IR$

ក_ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ_រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n)រួចគណនា θ_nជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\dfrac{\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2}{2}....\cos\dfrac{\theta_{n-1}}{2}$ រួបញ្ចោក់ ρ_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

ក_រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1}

យើងមាន $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$នាំឲ្យ $Z_{n+1} = \rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1})$

ដោយ $Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\ Z_n + |\,Z_n\,|)$ ហើយ $|\,Z_n\,| = \rho_n$

គេបាន $\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1}) = \dfrac{1}{2}[\rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n) + \rho_n]$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \frac{1}{2}\rho_n(1 + \cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}(\cos\frac{\theta_n}{2} + i.\sin\frac{\theta_n}{2})$$

គេទាញបាន $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ និង $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \quad \text{និង} \quad \rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}}$ ។

ខ_ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) និង គណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$

នាំឲ្យ (θ_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងស្មើ $q = \frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $\theta_n = \theta_0 \times q^n$

ដោយ $Z_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេទាញបាន $\rho_0 = 1\,;\,\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ ដូចនេះ $\boxed{\theta_n = \frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n}}$ ។

គ_បង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_n}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\rho_{n+1} = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ ឬ $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \cos\frac{\theta_n}{2}$

គេបាន $\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right) = \prod_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos(\frac{\theta_k}{2})\right]$

$$\frac{\rho_n}{\rho_0} = \cos\theta_0.\cos\frac{\theta_1}{2}.\cos\frac{\theta_2}{2}.........\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន $\sin\theta_n = 2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2} = 2\sin\theta_{n+1}\cos\frac{\theta_n}{2}$

(ព្រោះ $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$) គេទាញ $\cos\frac{\theta_n}{2} = \frac{1}{2}.\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n+1}}$

ហេតុនេះ $\rho_n = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1}.\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.....\frac{\sin\theta_{n-1}}{\sin\theta_n} = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_n}$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}.\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

ក, ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ, ចូរដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x.\cos x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x = 0$

គ, ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{\tan x + \sqrt{2} - 1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ដំណោះស្រាយ

ក, គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

តាមរូបមន្ត $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ ដោយយកតម្លៃ $a = \frac{\pi}{8}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

$1 = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ នាំឱ្យ $\tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$

តាង $t = \tan\frac{\pi}{8}$ ដែល $t > 0$

គេបាន $t^2 + 2t - 1 = 0$; $\Delta' = 1 + 1 = 2$

គេទាញឫស $t_1 = -1 + \sqrt{2}$, $t_2 = -1 - \sqrt{2} < 0$ (មិនយក)

ដូចនេះ $\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1}$ ។

ខ, ដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x.\cos x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x = 0$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^2 x \neq 0$ គេបានសមីការ ៖

$\tan^2 x - \sqrt{2}\tan x + (\sqrt{2}-1) = 0$,

តាង $t=\tan x$ គេបាន ៖

$t^2-\sqrt{2}\ t+(\sqrt{2}-1)=0$ ដោយ $a+b+c=0$

គេទាញឫស $t_1=1$; $t_2=\sqrt{2}-1$ ។

- ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\tan x=1$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$

- ចំពោះ $t=\sqrt{2}-1$ គេបាន $\tan x=\sqrt{2}-1$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in Z$

ដូចនេះ $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in Z$ ។

គ, ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\dfrac{\tan x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ដោយ $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ គេបាន

$$\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan x.\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(x+\frac{\pi}{8})=\tan\frac{\pi}{6}$$

គេទាញ $x+\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ ឬ $x=\dfrac{\pi}{24}+k\pi$, $k\in Z$

ដូចនេះ $x=\dfrac{\pi}{24}+k\pi$, $k\in Z$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៣៤

ក, ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\cos\frac{7\pi}{12}$

ខ, ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \cos^3 x + 3\cos x\cos^2 y = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{8} \\ 3\cos^2 x\cos y + \cos^3 y = \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{8} \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ក, គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\cos\frac{7\pi}{12}$

យើងបាន $\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \;,\; \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ ។

ខ, ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ

$$\begin{cases} \cos^3 x + 3\cos x\cos^2 y = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{8} & (1) \\ 3\cos^2 x\cos y + \cos^3 y = \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{8} & (2) \end{cases}$$

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\cos^3 x + 3\cos^2 x\cos y + 3\cos x\cos^2 y + \cos^3 y = \frac{2\sqrt{2}}{8}$$

$$(\cos x + \cos y)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\cos^3 x - 3\cos^2 x\cos y + 3\cos x\cos^2 y - \cos^3 y = \frac{6\sqrt{6}}{8}$$

$$(\cos x - \cos y)^3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3$$

$$\cos x - \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (4)$$

បូកសមីការ (3) និង (4) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$2\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{12}$ នាំឱ្យ $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$

ដកសមីការ (3) និង (4) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$2\cos y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$\cos y = \cos\frac{7\pi}{12}$ នាំឱ្យ $y = \pm\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$

ដូចនេះ $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$ និង $y = \pm\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$

លំហាត់ទី៣៥

ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

ខ, ចូរដោះស្រាយសមីការ $(\sin^3 x+\cos^3 x)^2=\frac{13}{16}+\frac{1}{4}\sin^3 2x$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

យើងមាន $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \quad ; \forall x\in IN$

លើកអង្គទាំងពីរជាគូបគេបាន ៖

$$(\ \sin^2 x+\cos^2 x\ )^3 = 1$$

$$\sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x\ = 1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\ (\ \sin^2 x+\cos^2 x)=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+\frac{3}{4}(\frac{1-\cos 4x}{2})=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

ដូចនេះ $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$ ។

ខ, ដោះស្រាយសមីការ $(\sin^3 x+\cos^3 x)^2=\frac{13}{16}+\frac{1}{4}\sin^3 2x$

យើងបាន $\sin^6 x+2\sin^3 x\cos^3 x+\cos^6 x=\frac{13}{16}+2\sin^3 x\cos^3 x$

$\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\cos 4x=\frac{13}{16}$ ឬ $\cos 4x=\frac{1}{2}$

គេទាញ $4x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ឬ $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in Z$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \quad , n \in IN \end{cases}$$

ក,ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ,គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$ និង $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{2+U_p}$ តែតាមការឧបមា $U_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+3}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

ខ, គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ នាំឱ្យ $2\cos a = \frac{\sin 2a}{\sin a}$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(U_k) = \prod_{k=0}^{n}(2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^{\ 2}}}{2}}$, $\forall n \in IN$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$U_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_0^{\ 2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_p^{\ 2}}}{2}}$ តែតាមការឧបមា $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): x^2-(m^2-m)\,x-m+2=0$

គេសន្មតថាសមីការនេះមានឬសពីរតាងរៀងគ្នាដោយ $\tan a$

និង $\tan b$ ។

ក,ចូរកំនត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឱ្យ $a+b=\frac{\pi}{3}$ ។

ខ,ចូរដោះស្រាយសមីការខាងលើចំពោះ m ដែលបានរកឃើញ ។

គ,ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក,កំនត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឱ្យ $a+b=\frac{\pi}{3}$ ៖

សមីការមានឬសកាលណា $\Delta=(m^2-m)^2+4m-8\geq 0$

ដោយ $\tan a$ និង $\tan b$ ជាឬសរបស់សមីការនោះ

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន $\begin{cases}\tan a+\tan b=m^2-m & (1)\\ \tan a.\tan b=-m+2 & (2)\end{cases}$

ដោយ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

$$\sqrt{3}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}\quad(3)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) ជួសក្នុងសមីការ (3)

គេបាន ៖

$$\sqrt{3}=\frac{m^2-m}{1+m-2}\quad \text{ឬ}\quad m^2-(1+\sqrt{3})\,m+\sqrt{3}=0$$

ដោយ $a+b+c=0$ គេទាញឫស $m_1=1$, $m_2=\sqrt{3}$

- ចំពោះ $m=1$ នោះ $\Delta=(1^2-1)^2+4.1-9=-4<0$

(មិនយក)

- ចំពោះ $m=\sqrt{3}$ នោះ $\Delta=(3-\sqrt{3})^2+4\sqrt{3}-8=4-2\sqrt{3}>0$

ដូចនេះ $m=\sqrt{3}$ ។

ខ, ដោះស្រាយសមីការខាងលើចំពោះ m ដែលបានរកឃើញ ៖

ចំពោះ $m=\sqrt{3}$ គេបាន ៖ $x^2-(3-\sqrt{3})x-\sqrt{3}+2=0$

ដោយ $a+b+c=0$ គេទាញឫស $x_1=1$, $x_2=2-\sqrt{3}$ ។

គ, ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ៖

តាមលទ្ធផលខាងលើគេមាន $x_1=\tan a=1$ នាំឱ្យ $a=\frac{\pi}{4}$

ហើយ $a+b=\frac{\pi}{3}$ នោះ $b=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

ហេតុនេះ $x_2=\tan b=\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ, ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

តាង $A = \cot x - 2\cot 2x$ ដោយ $\begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \cot 2x = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x} \end{cases}$

គេបាន $A = \dfrac{1}{\tan x} - 2\left(\dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right) = \dfrac{1-1+\tan^2 x}{\tan x} = \tan x$

ដូចនេះ $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ ។

ខ, គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\tan\frac{a}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^k}(\cot\frac{a}{2^k} - 2\cot\frac{a}{2^{k-1}})\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{a}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$$

ដូចនេះ $S_n = \tan a + \dfrac{1}{2}\tan\dfrac{a}{2} + ... + \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{a}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{a}{2^n} - 2\cot 2a$ ។

លំហាត់ទី៤០

ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

តាង $f(x) = \tan 2x - 2\tan x$ ដោយ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន
$$f(x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2\tan x$$
$$= \frac{2\tan x - 2\tan x(1-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}$$
$$= \frac{2\tan x - 2\tan x + 2\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$$
$$= \frac{2\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.\tan^2 x = \tan 2x.\tan^2 x$$

ដូចនេះ $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$ ។

ខ, គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

យើងមាន $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$ ដោយយក $x = \frac{a}{2^{k+1}}$

គេបាន $\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}} = \tan\frac{a}{2^k} - 2\tan\frac{a}{2^{k+1}}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\tan\frac{a}{2^k} - 2^{k+1}\tan\frac{a}{2^{k+1}}\right) = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right] = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៤១

ក, ចូរស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

ខ, ចូរគណនា $S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + ... + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

យើងមាន $\sin 3x = \sin(x + 2x)$

តាមរូបមន្ត $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$$= \sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x$$

$$= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x$$

$$= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x(1 - \sin^2 x)$$

$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x$$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

ដោយ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

ដូចនេះ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ ។

ខ, គណនា $S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + ... + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(3^{k-1}\sin^3\frac{a}{3^k}\right)$

ដោយ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(3^k\sin\frac{a}{3^k} - 3^{k-1}\sin\frac{a}{3^{k-1}}\right) = \frac{1}{4}(3^n\sin\frac{a}{3^n} - \sin a)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{3^n}{4}\sin\frac{a}{3^n} - \frac{\sin a}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៤២

ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

យើងមាន $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}$

ដូចនេះ $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$ ។

ខ, គណនា $S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^k}.\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2^k}}\right)$ ដោយ $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

គេបាន ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4^k}\left(\frac{4}{\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^k}}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^{k-1}}.\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{4^k}.\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^k}}\right)=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ក, ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ, ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

តាង $f(x) = \cot x - \cot 2x$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$ ។

ខ, គណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sin \frac{a}{2^k}} \right)$ ដោយ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\cot \frac{a}{2^{k+1}} - \cot \frac{a}{2^k} \right)$$

$$= \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$$

ដូចនេះ $S_n = \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$ ។

លំហាត់ទី៤៤

ក, ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ, គណនាផលគុណ $P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

យើងតាង $A(x)=1+\frac{1}{\cos x}$

$$=\frac{\cos x+1}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}\sin x}{\cos x\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin x}{\cos x}=\tan\frac{x}{2}\ \tan x=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$ ។

ខ, គណនាផលគុណ

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})=\prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^k}})$$

$$=\prod_{k=0}^{n}(\frac{\tan\frac{a}{2^{k+1}}}{\tan\frac{a}{2^k}})=\frac{\tan\frac{a}{2^{n+1}}}{\tan a}=\tan\frac{a}{2^{n+1}}\ \cot a$$

លំហាត់ទី៤៥

ក, ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x} = \left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - \frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ, ចូរគណនា $S_n = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + ... + \frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x} = \left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - \frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

យើងមាន $\cos(n+1)x = \cos(nx + x)$

ឬ $\cos(n+1)x = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1} x$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} = \frac{\cos(nx)\cos x}{\cos^{n+1} x} - \frac{\sin(nx)\sin x}{\cos^{n+1} x} = \frac{\cos(nx)}{\cos^n x} - \frac{\sin(nx)}{\cos^n x}.\tan x$$

នាំឱ្យ $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x} = \left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - \frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\frac{1}{\tan x}$

ដូចនេះ $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x} = \left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - \frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$ ។

ខ, គណនា $S_n = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + ... + \frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}\right]$

ដោយ $\frac{\sin(kx)}{\cos^k x} = \left[\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1} x} - \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right].\cot x$

គេបាន $S_n = \cot x \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1} x} - \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right) = \cot x \left(\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - 1\right)$

ដូចនេះ $S_n = \left(\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - 1\right)\cot x$ ។

លំហាត់ទី៤៦

ក, ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$

ខ, គណនាផលបូក $S_n=\sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos(px)\ \cos(p+1)x}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$

តាមរូបមន្ត $\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{\cos p\ \cos q}=\frac{1}{\sin(p-q)}(\tan p-\tan q)$ (1)

យក $p=(n+1)x\ ,\ q=(nx)$ និង $p-q=x$ ជួសក្នុង(1) គេបាន

$$\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$$ ។

ខ, គណនាផលបូក

$$S_n=\sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos(px)\ \cos(p+1)x}\right]$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន ៖

$$\frac{1}{\cos(px).\cos(p+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(p+1)x-\tan(px)\right]$$

យើងបាន $S_n=\frac{1}{\sin x}\sum_{p=1}^{n}\left[\tan(p+1)x-\tan(px)\right]$

$$=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan x\right]=\frac{\sin(nx)}{\sin x\cos x\cos(n+1)x}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{2\sin(nx)}{\sin 2x\ \cos(n+1)x}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

ក, ចូរស្រាយថា $\tan(n+1)x - \tan(nx) = \tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$

ខ, គណនាផលបូក

$$S_n = \tan x\tan 2x + \tan 2x\tan 3x + \dots + \tan(nx)\tan(n+1)x$$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\tan(n+1)x - \tan(nx) = \tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$

តាមរូបមន្ត $ta(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}$

នាំឱ្យ $\tan a - \tan b = \tan(a-b)\left(1+\tan a\ \tan b\right)$ (1)

ដោយយក $a=(n+1)x$, $b = nx$ និង $a-b=x$

ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$\tan(n+1)x - \tan(nx) = \tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$ ។

ខ, គណនាផលបូក

$$S_n = \tan x\tan 2x + \tan 2x\tan 3x + \dots + \tan(nx)\tan(n+1)x$$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\tan(kx)\tan(k+1)x\right]$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន ៖

$$\tan(n+1)x - \tan(nx) = \tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$$

ឬ $\tan(nx)\tan(n+1)x = \left[\tan(n+1)x - \tan(nx)\right]\cot x\ -1$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\tan(k+1)x - \tan(kx)\right)\cot x - 1\right]$

$$= \left[\tan(n+1)x - \tan x\right]\cot x - n$$

$$= \frac{\sin(nx)}{\cos(n+1)x\cos x}\cot x - n$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\sin(nx)}{\cos(n+1)x\sin x} - n$ ។

លំហាត់ទី៤៨

ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\cos x \;\; -1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

ខ, ចូរគណនាផលគុណ ៖

$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1).....(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\cos x \;\; -1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

តាមរូបមន្ត $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$2\cos 2x = 4\cos^2 x - 2$$

$$2\cos 2x + 1 = 4\cos^2 x - 1$$

$$2\cos 2x + 1 = (2\cos x + 1)(2\cos x - 1)$$

ដូចនេះ $2\cos x \;\; -1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$ ។

ខ, គណនាផលគុណ ៖

$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1).....(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

$$= \prod_{k=0}^{n}\left(2\cos\frac{a}{2^k} - 1\right)$$

ដោយ $2\cos x \;\; -1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left[\frac{1+2\cos(\frac{a}{2^{k-1}})}{1+2\cos(\frac{a}{2^k})}\right]=\frac{1+2\cos 2a}{1+2\cos\frac{a}{2^n}}$$

ដូចនេះ $P_n=\dfrac{1+2\cos 2a}{1+2\cos\frac{a}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

ក, ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

តាមរូបមន្ត $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

យើងបាន $\tan 3x-3\tan x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}-3\tan x=\dfrac{8\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$ ។

ខ, គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}\right]$

យើងមាន $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$ ដោយយក $x=\dfrac{a}{3^k}$

គេបាន $$\frac{\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}=\frac{1}{8}(\tan\frac{a}{3^{k-1}}-3\tan\frac{a}{3^k})$$

យើងបាន $$S_n=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}(3^k\tan\frac{a}{3^{k-1}}-3^{k+1}\tan\frac{a}{3^k})=\frac{1}{8}\left(\tan 3a-3^{n+1}\tan\frac{a}{3^n}\right)$$

ដូចនេះ $$S_n=\frac{\tan 3a}{8}-\frac{3^{n+1}}{8}\tan\frac{a}{3^n}$$ ។

លំហាត់ទី៥០

ក, ចូរស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^n}}{1-\tan^2\frac{a}{2^n}}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

តាមរូបមន្ត $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

យើងបាន $\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x=\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}-\tan x=\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ ។

ខ, គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}\right)$

គេមាន $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ យក $x=\frac{a}{2^k}$

គេបាន $$\frac{\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}=\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2^{k-1}}-\tan\frac{a}{2^k}$$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^{k-1}\tan\frac{a}{2^{k-1}} - 2^k\tan\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\tan 2a - 2^n\tan\frac{a}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{2}\tan 2a - 2^n\tan\frac{a}{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៥១

ក,ចូរស្រាយថា $\cos(2nx) = \frac{1}{2\sin x}[\ \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\ ]$

ខ,គណនាផលបូក $S_n = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + ... + \cos(2nx)$

គ,ទាញរកផលបូក $T_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2(nx)$

ឃ,គណនាផលបូក $U_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + ... + \sin^2(nx)$

ដំណោះស្រាយ

ក,ស្រាយថា $\cos(2nx) = \frac{1}{2\sin x}[\ \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\ ]$

តាមរូបមន្ត $\sin p - \sin q = 2\sin(\frac{p-q}{2})\ \cos(\frac{p+q}{2})$

ដោយយក $p = (2n+1)x\ ,\ q = (2n-1)x$

និង $p - q = 2x\ ,\ p + q = 4nx$

គេបាន $\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\sin x\ \cos(2nx)$

ដូចនេះ $\cos(2nx) = \frac{1}{2\sin x}[\ \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\ ]$ ។

ខ,គណនាផលបូក $S_n = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + ... + \cos(2nx)$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\cos(2kx)]$

$$= \frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin x}\left[\sin(2n+1)x - \sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin x}\left[2\sin(nx)\cos(n+1)x\right] = \frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$ ។

គ,ទាញរកផលបូក $T_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2(nx)$

យើងបាន $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos^2(kx)\right]$ តាមរូបមន្ត $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$

គេបាន $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1+\cos(2kx)}{2}\right] = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}S_n$

ដោយ $S_n = \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$

ដូចនេះ $T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$ ។

ឃ,គណនាផលបូក $U_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + ... + \sin^2(nx)$

យើងបាន $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2(kx)\right]$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[1 - \cos^2(kx)\right] = n - T_n$$

ដោយ $T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$

ដូចនេះ $U_n = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 3m - 8}{2\,(x^2 + 1)}$ ដែល $x \in IR$ និង m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

កំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍នេះអាចតាងឱ្យតម្លៃកូស៊ីនូសនៃមុំមួយបានឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍នេះតាងឱ្យតម្លៃកូស៊ីនូសនៃមុំមួយលុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ គេបាន $-1 \le \dfrac{x^2 + 2mx + 3m - 8}{2(x^2 + 1)} \le 1$ ដោយគេមាន

$2(x^2 + 1) > 0 \, , \, \forall x \in IR$

គេទាញ $-2x^2 - 2 \le x^2 + 2mx + 3m - 8 \le 2x^2 + 2$

ឬ $\begin{cases} 3x^2 + 2mx + 3m - 6 \ge 0 & (1) \\ x^2 - 2mx - 3m + 10 \ge 0 & (2) \end{cases}$

ចំពោះ $(1) : \; 3x^2 + 2mx + 3m - 6 \ge 0$

សមមូល $\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 9m + 18 \le 0 \end{cases}$

ដោយ $m^2 - 9m + 18 = (m - 3)(m - 6)$

គេបាន $\Delta' = (m - 3)(m - 6) \le 0$ នាំឱ្យ $3 \le m \le 6$ ឬ $m \in [3, 6]$

ចំពោះ $(2) : \; x^2 - 2mx - 3m + 10 \ge 0$ សមមូល $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m - 10 \le 0 \end{cases}$

ដោយ $m^2 + 3m - 10 = (m - 2)(m + 5)$

គេបាន $\Delta' = (m-2)(m+5) \le 0$ នាំឱ្យ $-5 \le m \le 2$

ឬ $m \in [-5\ ,\ 2\ ]$ ។

ដោយយកចម្លើយ $m \in [3,6]$ ប្រសព្វនឹង $m \in [-5\ ,\ 2\ ]$

នោះគេបាន $m \in \phi$

ដូចនេះគេមិនអាចកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍នេះអាចតាង ឱ្យតម្លៃកូស៊ីនូសនៃមុំមួយបានទេ ។

លំហាត់ទី៥៣

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$-2 \le \dfrac{\cos 4x + 4\sin 4x + 1}{\cos 4x + 2} \le \dfrac{8}{3}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $y = \dfrac{\cos 4x + 4\sin 4x + 1}{\cos 4x + 2}$, $\forall x \in IR$

យើងបាន $\cos 4x + 4\sin 4x + 1 = y\cos 4x + 2y$

ឬ $(1-y)\cos 4x + 4\sin 4x = 2y - 1$ (1)

យើងជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{U}\,(\,1-y\ ,\ 4\ )$ និង $\vec{V}\,(\cos 4x\ ,\ \sin 4x\ )$

តាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ $\vec{U}.\vec{V} = (1-y)\cos 4x + 4\sin 4x$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\vec{U}.\vec{V} = 2y - 1$ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាមនិយមន័យ $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos\theta$

ដោយ $-1 \le \cos\theta \le 1 \,,\, \forall\theta \in IR$

គេទាញ $-\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\| \le \vec{U}.\vec{V} \le \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|$

ឬ $\left(\vec{U}.\vec{V}\right)^2 \le \|\vec{U}\|^2.\|\vec{V}\|^2$

ដោយ $\|\vec{U}\|^2 = (1-y)^2 + 16 \,,\, \|\vec{V}\| = 1$ និង $\vec{U}.\vec{V} = 2y - 1$

គេបាន $(2y-1)^2 \le (1-y)^2 + 16$ ឬ $3y^2 - 2y - 16 \le 0$

ដោយ $3y^2 - 2y - 16 = (y+2)(3y-8)$

ហេតុនេះ $3y^2 - 2y - 16 \le 0$ សមមូល $-2 \le y \le \frac{8}{3}$ ។

ដូចនេះ $-2 \le \frac{\cos 4x + 4\sin 4x + 1}{\cos 4x + 2} \le \frac{8}{3}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = (\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}) + i.(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងបាន $|Z| = \sqrt{(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x})^2 + (\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x})^2}$

តាង $f(x) = (\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x})^2 + (\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x})^2$

$$= \cos^4 x + 2 + \frac{1}{\cos^4 x} + \sin^4 x + 2 + \frac{1}{\sin^4 x}$$

$$= 4 + (\cos^4 x + \sin^4 x) + (\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x})$$

$$= 4 + (\cos^4 x + \sin^4 x) + (\frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\sin^4 x \cos^4 x})$$

$$= 4 + (\cos^4 x + \sin^4 x)(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x})$$

$$= 4 + \left[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right](1 + \frac{16}{\sin^4 2x})$$

$$= 4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x})$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x \le 1$ នាំឱ្យ $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}$

និង $1 + \frac{16}{\sin^4 2x} \ge 17$

គេទាញ $4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}) \ge 4 + \frac{17}{2} = \frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x)=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})\geq\frac{25}{2}$

ដោយ $|Z|=\sqrt{f(x)}$ គេទាញបាន $|Z|\geq\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះម៉ូឌុលអប្បបរមានៃ Z គឺ $|Z|_{min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឱ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$

តាង $f(x)=60x^2-71x+21$

បើ $f(x)=0\Leftrightarrow 60x^2-71x+21=0$

$\Delta=(-71)^2-4(60)(21)=5041-5040=1$

គេទាញឫស $x_1=\frac{71-1}{120}=\frac{7}{12}$, $x_2=\frac{71+39}{120}=\frac{3}{5}$

យើងបាន $f(x)=60x^2-71x+21<0$ នាំឱ្យ $\frac{7}{12}<x<\frac{3}{5}$

ឬ $\frac{7}{4}<3x<\frac{9}{5}$ នាំឱ្យ $\frac{4}{5}<\frac{1}{3x-1}<\frac{4}{3}$

គេទាញ $\frac{4\pi}{5}<\frac{\pi}{3x-1}<\frac{4\pi}{3}$ នាំឱ្យ $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

ដូចនេះ បើ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$

នោះគេបាន៖ $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ$U_n = \sqrt{2}^n.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in IN^*$ ។

ក_ ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ_ ទាញឱ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ_ គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

យើងបាន$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4}) = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ_ ទាញឱ្យ)ានថា $U_n = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឱ្យ $\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$ គេបាន

$$(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4} = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ_ គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

ក, ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ, ចូរស្រាយថា $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10})$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 3\cos\frac{\pi}{10} - 4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4(1 - \sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10} - 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0$ តាង $t = \sin\frac{\pi}{10} > 0$

គេបាន $4t^2 - 2t - 1 = 0$, $\Delta' = 1 + 4 = 5 > 0$

គេទាញឬស $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ (មិនយក) , $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10} = 1$ នាំឱ្យ $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ, ស្រាយថា $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y) = x^2 + (x-y)^2 - 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន $f(x;y) = x^2 + x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - (x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2 - 2xy - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2 + 2xy + \frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$= -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2 \le 0 \ , \forall x, y \in IR$$

ដូចនេះ $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ គ្រប់ចំនួនពិត $x, y \in IR$

លំហាត់ទី៥៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

បង្ហាញថាបើ $\tan\frac{A}{3}, \tan\frac{B}{3}, \tan\frac{C}{3}$ ជាឬសរបស់សមីការ

$(E): x^3+ax^2+bx+c=0$ នោះគេបាន $\sqrt{3}+a=\sqrt{3}b+c$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ ៖

យើងមាន $A+B+C=\pi$ (ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ ABC)

យើងបាន $\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3}+\frac{C}{3})=\tan[(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})+\frac{C}{3}]$

$$\tan(\frac{A+B+C}{3})=\frac{\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})+\tan\frac{C}{3}}{1-\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})\tan\frac{C}{3}}$$

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\frac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}}{1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}}+\tan\frac{C}{3}}{1-\frac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}}{1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}}.\tan\frac{C}{3}}$$

$$\sqrt{3}=\frac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{C}{3}-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}\tan\frac{C}{3}}{1-(\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{A}{3}\tan\frac{C}{3}+\tan\frac{B}{3}\tan\frac{C}{3})}\quad(1)$$

ដោយ $\tan\frac{A}{3}$, $\tan\frac{B}{3}$, $\tan\frac{C}{3}$ ជាឬសរបស់សមីការ(E)

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{C}{3}=-a \quad (2)$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=b \quad (3)$$

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}=-c \qquad (4)$$

យកទំនាក់ទំនង (2), (3) និង (4) ជួសក្នុងសមីការ (1)

គេបាន ៖

$\sqrt{3}=\frac{-a+c}{1-b}$ ឬ $\sqrt{3}-\sqrt{3}\,b=-a+c$

ដូចនេះ $\sqrt{3}+a=\sqrt{3}b+c$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2\cos a-2x+\cos a}{x^2-2x\cos a+1}$, $0<a<\pi$

បង្ហាញថា $\forall x\in IR:\ -1\le f(x)\le 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\forall x\in IR:\ -1\le f(x)\le 1$

យើងមាន $1+f(x)=1+\frac{x^2\cos a-2x+\cos a}{x^2-2x\cos a+1}$

$$1+f(x)=\frac{(1+\cos a)x^2-2(1+\cos a)x+(1+\cos a)}{x^2-2x\cos a+1}$$

$$1+f(x)=\frac{(1+\cos a)(x^2-2x+1)}{x^2-2x\cos a+\cos^2 a+\sin^2 a}$$

$$1+f(x)=\frac{2(x-1)^2\cos^2\frac{a}{2}}{(x-\cos x)^2+\sin^2 a}\ge 0\ ,\ \forall x\in IR$$

គេទាញបាន $f(x)\ge -1\ ,\forall x\in IR$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $1-f(x)=1-\dfrac{x^2\cos a-2x+\cos a}{x^2-2x\cos a+1}$

$$1-f(x)=\frac{(1-\cos a)x^2+2(1-\cos a)x+(1-\cos a)}{x^2-2x\cos a+1}$$

$$1-f(x)=\frac{(1-\cos a)(x^2+2x+1)}{x^2-2x\cos a+\cos^2 a+\sin^2 a}$$

$$1-f(x)=\frac{2(x+1)^2\sin^2\dfrac{a}{2}}{(x-\cos x)^2+\sin^2 a}\ge 0\ ,\ \forall x\in IR$$

គេទាញបាន $f(x)\le 1\ ,\ \forall x\in IR$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\forall x\in IR:\ -1\le f(x)\le 1$

លំហាត់ទី៦០

គេមានសមភាព $\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$

ដែល $a\ne 0\ ,\ b\ne 0\ ,\ a+b\ne 0$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sin^8 x}{a^3}+\dfrac{\cos^8 x}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{\sin^8 x}{a^3}+\dfrac{\cos^8 x}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$

គេមាន $\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$

នាំឱ្យ $b(a+b)\sin^4 x+a(a+b)\cos^4 x=ab$

$$ab\sin^4 x+b^2\sin^4 x+a^2\cos^4 x+ab\cos^4 x=ab(\sin^2 x+\cos^2 x)^4$$

$$a^2\cos^4 x-2ab\cos^2 x\sin^2 x+b^2\sin^4 x=0$$

$$(a\cos^2 x-b\sin^2 x)^2=0$$

គេទាញ $\dfrac{\sin^2 x}{a}=\dfrac{\cos^2 x}{b}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$

នាំឱ្យ $\frac{\sin^8 x}{a^4} = \frac{\cos^8 x}{b^4} = \frac{1}{(a+b)^4}$

គេទាញ $\frac{\sin^8 x}{a^3} = \frac{a}{(a+b)^4}$ (1) និង $\frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{b}{(a+b)^4}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គ គេបាន ៖

$$\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{a+b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

ដូចនេះ $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មាន $\cos B = \frac{3}{5}$ និង $\cos C = \frac{4}{5}$

ចូរគណនា $\sin(B+C)$ រួចកំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

យើងមាន $\cos B = \frac{3}{5}$ និង $\cos C = \frac{4}{5}$

យើងបាន $\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

និង $\sin C = \sqrt{1-\sin^2 C} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

មាន $\sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

$$\sin(B+C) = \frac{4}{5}.\frac{4}{5} + \frac{3}{5}.\frac{3}{5} = 1$$

នាំឱ្យ $B + C = \frac{\pi}{2}$ ហើយ $A = \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

លំហាត់ទី៦២

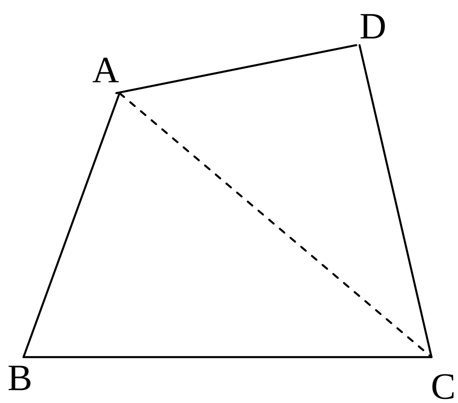
គេឱ្យចតុកោណABCD មួយមាន $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$

គេតាង s ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណនេះ ។

ចូរស្រាយថា $S \le \frac{1}{2}(ab + cd)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $S \le \frac{1}{2}(ab + cd)$



យើងមាន $S = S_{ABC} + S_{ACD}$

ដោយ $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.BC.\sin B = \frac{1}{2} ab\sin B$

និង $S_{ADC} = \frac{1}{2} AD.DC.\sin D = \frac{1}{2} cd\sin D$

យើងបាន $S = \frac{1}{2}(ab\sin B + cd\sin D)$

យើងមាន $\sin B \le 1$ នោះ $ab\sin B \le ab$

និង $\sin D \le 1$ នោះ $cd\sin D \le cd$

ដូចនេះ $S \le \frac{1}{2}(ab + cd)$

លំហាត់ទី៦៣

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុងផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$a^2 + b^2 = 2c^2$ ។

ក, ចូរបង្ហាញថា $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2}{4ab}$

ខ, ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos C \geq \dfrac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក, បង្ហាញថា $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2}{4ab}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ តែតាមសម្មតិកម្ម $a^2 + b^2 = 2c^2$

គេបាន $\dfrac{a^2 + b^2}{2} = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

ឬ $2ab\cos C = a^2 + b^2 - \dfrac{a^2 + b^2}{2} = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

ដូចនេះ $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2}{4ab}$ ។

ខ, ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos C \geq \dfrac{1}{2}$

យើងមាន $(a - b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ឬ $\dfrac{a^2 + b^2}{4ab} \geq \dfrac{1}{2}$

ដោយតាមសម្រាយខាងលើ $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2}{4ab}$

ដូចនេះ $\cos C \geq \dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

បើ $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

ចូរកំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដំណោះស្រាយ

ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ នាំឱ្យ $\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$ (1)

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ (2)

និង $\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) ,(3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ដោយ $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ គេទាញបាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{bc+ca+ab}{2abc}$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

គេទាញបានសមភាព $a=b=c$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

លំហាត់ទី៦៥

គេឱ្យសមីការ $(E):\ x^3-(2m+3)x^2+5x-3m+2=0$

ឧបមាថាសមីការនេះមានឬសបីតាងដោយ $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ ។

ក, ចូរគណនា $A=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ជាអនុគមន៍នៃ m ។

ខ, កំនត់ m ដើម្បីឱ្យ $A=4$ ។

គ, ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបាន

រកឃើញខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, គណនា $A=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ជាអនុគមន៍នៃ m

យើងមាន $A=\dfrac{\sin[\ \alpha+(\beta+\gamma)]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma)\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$=\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma+\tan\beta+\tan\gamma$$

$$=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

ដោយ $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ ជាឬសសមីការ (E) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

យើងមាន $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=2m+3\\ \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=5\\ \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=3m-2\end{cases}$

យើងបាន $A = 2m + 3 - (3m - 2) = -m + 5$

ដូចនេះ $A = -m + 5$ ។

ខ,កំនត់ m ដើម្បីឱ្យ $A = 4$

ដោយយើងមាន $A = -m + 5$

យើងបាន $-m + 5 = 4$ នាំឱ្យ $m = 5$ ។

គ, ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

ចំពោះ $m = 1$ គេបាន $(E): x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$

ដោយ $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x + 1)$

គេទាញ $(x - 1)(x^2 - 4x + 1) = 0$ ឬ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{array}\right.$

$\Delta' = 4 - 1 = 3$ គេទាញ $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

ដូចនេះសំណុំឬសសមីការ $x \in \{ 2 - \sqrt{3} ; 1 , 2 + \sqrt{3} \}$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x;y)=(a\cos x+b\cos y)^2+(a\sin x+b\sin y)^2$

(ដែល $a>0$, $b>0$) ។

ចំពោះគ្រប់ $x;\,y\in IR$ បង្ហាញថា $f(x;y)\le (a+b)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f(x;y)\le (a+b)^2\infty$

$$
\begin{aligned}
f(x;y) &= (a\cos x+b\cos y)^2+(a\sin x+b\sin y)^2\\
&= a^2\cos^2 x+2ab\cos x\cos y+b^2\cos^2 y+a^2\sin^2 x+2ab\sin x\sin y+b^2\sin^2 y\\
&= a^2(\cos^2 x+\sin^2 x)+b^2(\cos^2 y+\sin^2 y)+2ab(\cos x\cos y+\sin x\sin y)\\
&= a^2+b^2+2ab\cos(x-y)
\end{aligned}
$$

គេបាន $f(x;y)=a^2+b^2+2ab\cos(x-y)$

ដោយគេមាន $\forall\ x;y\in IR:\ \cos(x-y)\le 1$

យើងបាន $f(x)\ \le a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

ដូចនេះ $f(x;y)\le (a+b)^2$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែល $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដំណោះស្រាយ

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$ គេបាន ៖

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1-2\frac{a^2}{4bc}$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-a^2}{2bc}$$

$$b^2+c^2-a^2=2bc-a^2$$

$$b^2-2bc+c^2=0$$

$$(b-c)^2=0$$

$$b=c$$

ត្រីកោណABC មានជ្រុង $b=c$ នាំឱ្យវាជាត្រីកោណសមបាត កំពូល A ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឱ្យសមីការ $(E):\ \cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=m$

ក,ចូរដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ,រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឬស ។

ដំណោះស្រាយ

ក,ដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

យើងមាន $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ នាំឱ្យ $\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

ហើយ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

នាំឱ្យ $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

សមីការ (E) អាចសរសេរ ៖

$$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\cos 3x+\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\sin 3x=m$$

$$3\cos x\cos 3x+\cos^2 3x+3\sin x\sin 3x-\sin^2 3x=4m$$

$$3(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x)+(\cos^2 3x-\sin^2 3x)=4m$$

$$3\cos 2x+\cos 6x=4m$$

$$4\cos^3 2x=4m$$

$$\cos 2x=\sqrt[3]{m}$$

ដោយ $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ គេបាន $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឱ្យ $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi\ ,k\in Z$

ខ, រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ៖

ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសគេគ្រាន់តែឱ្យ $-1 \le \sqrt[3]{m} \le 1$

ឬ $m \in [-1, 1]$ ។

លំហាត់ទី៦៩

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + \log_{\sqrt{2}}(2\sin^3 x) = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + \log_{\sqrt{2}}(2\sin^3 x) = 0$$

លក្ខខណ្ឌ $\sin x > 0$ នាំឱ្យ $2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ , \ k \in Z$

សមីការអាចសរសេរ ៖

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + \log_{\sqrt{2}}(\sin^3 x) + \log_{\sqrt{2}} 2 = 0$$

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + 3\log_{\sqrt{2}}(\sin x) + 2 = 0$$

តាង $t = \log_{\sqrt{2}}(\sin x)$ គេបានសមីការ $t^2 + 3t + 2 = 0$

ដោយ $b = a + c$ គេទាញឫស $t_1 = -1 \ , \ t_2 = -2$

- ចំពោះ $t = -1$ គេបាន $\log_{\sqrt{2}}(\sin x) = -1$

សមមូល $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in Z \end{array}\right.$

- ចំពោះ $t=-2$ គេបាន $\log_{\sqrt{2}}(\sin x)=-2$

សមមូល $\sin x=\frac{1}{2}$

នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ , k\in Z \end{array}\right.$

លំហាត់ទី៧០

ក, ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}=\frac{2\sin x\cos(2nx)}{[2+\sin(2n-1)x\ ][2+\sin(2n+1)x\ ]}$$

ខ, គណនា $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{(2+\sin(2k-1)x)(2+\sin(2k+1)x)}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, ការបង្ហាញ

តាង $f(x)=\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}$

$$=\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{(2+\sin(2n-1)x)(2+\sin(2n+1)x)}$$

$$=\frac{2\sin x\ \cos(2nx)}{(2+\sin(2n-1)x)(2+\sin(2n+1)x)}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}=\frac{2\sin\ x\cos(2nx)}{[2+\sin(2n-1)x\ ][2+\sin(2n+1)x\ ]}$

ខ, គណនា $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{(2+\sin(2k-1)x)(2+\sin(2k+1)x)}\right]$

យើងបាន $S_n=\frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}\right]$

$$= \frac{1}{2\sin x}\left[\frac{1}{2+\sin x} - \frac{1}{2+\sin(2n+1)x}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin x} \cdot \frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{(2+\sin x)(2+\sin(2n+1)x)}$$

$$= \frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x(2+\sin x)(2+\sin(2n+1)x)}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x(2+\sin x)(2+\sin(2n+1)x)}$ ។

លំហាត់ទី៧១

ក, ចូរបង្ហាញថា $1+\tan x\tan(nx) = \dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$

ខ, គណនា $P_n = \prod_{k=1}^{n}[1+\tan x\tan(kx)]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, បង្ហាញថា $1+\tan x\tan(nx) = \dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$

គេមាន $\cos(n-1)x = \cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin x$

នាំឱ្យ

$\dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)} = \dfrac{\cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin x}{\cos(nx)\cos x} = 1+\tan x\tan(nx)$ ពិត

ដូចនេះ $1+\tan x\tan(nx) = \dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$ ។

ខ, គណនា

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}[1+\tan x\tan(kx)]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\cos(k-1)x}{\cos x \cos(kx)} \right]$$

$$= \frac{1}{\cos^n x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos 2x} \cdot \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \cdots \frac{\cos(n-1)x}{\cos(nx)}$$

$$= \frac{1}{\cos^n x \ \cos(nx)}$$

ដូចនេះ $P_n = \prod_{k=1}^{n} [1 + \tan x \tan(kx)] = \dfrac{1}{\cos^n x \ \cos(nx)}$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃ និង R ជាកាំរង្វង់ចារិកក្រៅ

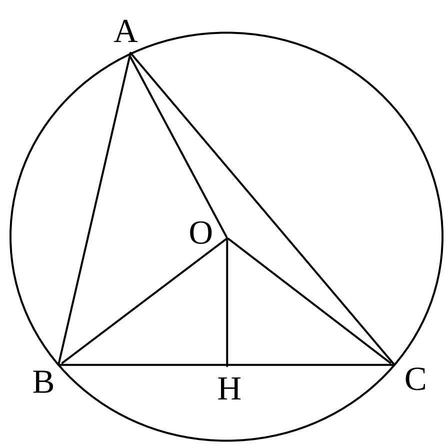
នៃត្រីកោណនេះ ។

ក, ចូរស្រាយថា $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2S}{R}$ ។

ខ, ទាញថា $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4S$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2S}{R}$



តាង O ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ហើយ

H ជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុង [BC] ។

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $S = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$

យើងមាន $OB = OC = R$ នាំឱ្យ OBC ជាត្រីកោណសមបាត កំពូល O ។

ហើយ $OH \perp BC$ នាំឱ្យ OH ជាកំពស់នៃត្រីកោណ OBC

យើងមាន $S_{OBC} = \frac{1}{2} BC\,.\,OH$

ក្នុងត្រីកោណកែង OBH គេមាន $\cos(B\hat{O}H) = \frac{OH}{OB}$

ឬ $OH = OB.\cos(B\hat{O}H)$

គេបាន $S_{OBC} = \frac{1}{2} BC.\,OB.\cos(B\hat{O}H)$

យើងមាន $B\hat{O}H = \frac{B\hat{O}C}{2} = B\hat{A}C = A$

មុំផ្ចិតនិងមុំចារិកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូរួមBC ។

គេបាន $S_{OBC} = \frac{1}{2} a\,.R\cos A$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន $S_{OAC} = \frac{1}{2}\, b.R\,\cos B$ និង $S_{OAB} = \frac{1}{2} c\,.R\,\cos A$

ហេតុនេះ $S = \frac{1}{2} a.R\cos A + \frac{1}{2} b.R\cos B + \frac{1}{2} c.R\cos C$

$$S = \frac{1}{2} R\,(\,a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

ដូចនេះ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2S}{R}$ ។

ខ,ទាញថា $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4S$

យើងមាន $a^2\cot A = a^2\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{a}{\sin A}.a\cos A = 2R\; a\cos A$

ដូចគ្នាដែរ $b^2\cot B = 2R\; a\cos B$ និង $c^2\;\cot C = 2R\; c.\cos C$

គេបាន $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 2R\,(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$

ដោយ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{2S}{R}$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4S$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៧៣

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក, ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ខ, ចូរស្រាយថា $R \ge 2r$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដោយគេមាន ៖

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ,\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

គេទាញ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

$$=1+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p\,.\,\dfrac{abc}{4R}\times R}=1+\frac{S^2}{p\,S.R}$$

$$=1+\frac{S}{p.\,R}=1+\frac{p.r}{p.R}=1+\frac{r}{R}$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$ ។

ខ, ស្រាយថា $R\ge 2\,r$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $\alpha+\beta\ \ge\ 2\,\alpha.\beta$

គេបាន $(p-a)+(p-b)\ge 2\,\sqrt{(p-a)(p-b)}$

$$2p-a-b\ge 2\,\sqrt{(p-a)(p-c)}$$

$$c\ \ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$$

គេទាញ $\dfrac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c}\le\dfrac{1}{2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}\le\dfrac{1}{2}$ (2) និង $\dfrac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{b}\le\dfrac{1}{2}$ (3)

គុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) ,(3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\le\frac{1}{8}$$

គេទាញ $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C\le 1+4\,(\dfrac{1}{8})=\dfrac{3}{2}$

តែ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$ គេទាញ $1+\dfrac{r}{R}\le\dfrac{3}{2}$ ឬ $R\ge 2\,r$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$, $\forall n \in IN^*$

ក. ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}\,.\sin\frac{(n+1)\pi}{4} = \sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4}$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $U_n = (\sqrt{2})^{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4} - (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(U_k\right) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ។

២.គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = 0 \,, U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - 4U_n \,,\ \forall n \in IN \end{cases}$

ក.គេតាង $\forall n \in IN :\ Z_{n+1} = U_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})U_n$ ។

បង្ហាញថា $Z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})Z_n$

ខ. ចូរបង្ហាញថា $Z_n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3})$ ។

គ. ទាញរកតួតូទៅ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៣. គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយទំនាក់ទំនង :

$U_0 = 1$ និង ចំពោះគ្រប់ $n \in IN : U_{n+1} = 2U_n + \sqrt{2}\cos\frac{n\pi}{4}$

ក.ចូរបង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត (V_n) ដែល

កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $U_n = V_n + a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. ទាញរកតួតូទៅ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៤. គេមានស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} Z_0 = 2 \\ Z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} Z_n + \dfrac{2-\sqrt{3}-i}{2} \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_n - 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}.U_n$ រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i.\sin\dfrac{n\pi}{12})$ ។

៥- គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : Z_{n+2} = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} Z_{n+1} + \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n$

ក. តាង $\forall n \in IN : U_n = Z_{n+1} - Z_n$ ។ ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $U_n = \cos\dfrac{n\pi}{4} + i.\sin\dfrac{n\pi}{4}$ ។

គ. តាង $S_n = \sum_{k=0}^{n} (U_k)$ ។ ចូរស្រាយថា $Z_{n+1} = S_n$ រួចទាញរក Z_n

ជាអនុគមន៏នៃ n ។

៦- គេឱ្យស៊ីត $(U_n) \& (V_n)$ កំនត់លើ IN^* ដោយ :

$$\begin{cases} U_n = \sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + ... + \sin\dfrac{n}{n^2} \\ V_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + ... + \dfrac{n}{n^2} \end{cases}$$

ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតចុះ ហើយគ្រប់ $n \in IN^* : V_n \geq \dfrac{1}{2}$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៏ $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = -1 + \dfrac{x^2}{2} + \cos x$, $h(x) = -x + \dfrac{x^3}{6} + \sin x$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\forall x \in IR_+ : f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $h(x) \geq 0$ ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\forall n \geq 1 : 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 \leq n^4$

រួចទាញថា $V_n - \frac{1}{6}.\frac{1}{n^2} \leq U_n \leq V_n$ ។

៧-គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ $U_1 , U_2 , U_3 , ..., U_n$

និងផលសងរួម $d \neq 4k\pi , k \in Z$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត :

$$\sum_{k=1}^{n}(SinU_k) = SinU_1 + SinU_2 + SinU_3 + ... + SinU_n = \frac{Sin\frac{nd}{2}.Sin\frac{U_1 + U_n}{2}}{sin\frac{d}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(CosU_k) = CosU_1 + CosU_2 + CosU_3 + ... + CosU_n = \frac{Sin\frac{nd}{2}.Cos\frac{U_1 + U_n}{2}}{sin\frac{d}{2}}$$

ខ. **អនុវត្តន៏** ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម :

$$S_n = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + ... + \sin(na)$$

$$C_n = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + ... + \cos(na)$$

៨-គេពិនិត្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ :

$$U_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}_{(\ n\ )}$$ ។

ក. ដោយធ្វើវិចារឲ្យតាមកំនើនចូរបង្ហាញថា $U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

ខ. គេមាន $V_n = \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}_{(n)}$ ។

ចូរស្រាយថា $V_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$

គ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ and $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n.V_n\right)$ ។

៩- គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sin x\ ,\ x\in IR$

ក. ចូរស្រាយថា $x-\frac{x^3}{6}\le f(x)\le x$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

ខ. គេពិនិត្យផលបូក $S_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+......+\sin\frac{n}{n^2}$ ។

ចូររកកន្សោមអមនៃផលបូកនេះ ។

គ. ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១០-គេមានស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=2U_n+\cos\frac{n\pi}{2}-2\sin\frac{n\pi}{2}\ ,\ \forall n\in IN\end{cases}$$

ក,កំនត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត (V_n) កំនត់ដោយ

ទំនាក់ទំនង $U_n=V_n+A\cos\frac{n\pi}{2}+B\sin\frac{n\pi}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ, ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១១-គេឱ្យ $S_n=\tan x+2\tan 2x+2^2\tan 2^2x+.......+2^n\tan 2^n x$

ក, ចូរបង្ហាញ $\tan\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$ ។

ខ, ទាញបង្ហាញថា $S_n=\cot x-2^{n+1}\cot 2^{n+1}x$ ។

១២-គេឱ្យ $S_n=\sin^3 a+3\sin^3\frac{a}{3}+3^2\sin^3\frac{a}{3^2}+.......+3^n\sin\frac{a}{3^n}$

ក, ចូរបង្ហាញថា $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$ ។

ខ, ទាញបង្ហាញថា $S_n=\frac{3^{n+1}}{4}\sin\frac{a}{3^n}-\frac{1}{4}\sin 3a$ ។

១៣_ គេឱ្យ $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 2^2 a} + ... + \frac{1}{\sin 2^n a}$ ។

ក, ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{\sin x}$ ។

ខ, ទាញបង្ហាញថា $S_n = \cot\frac{a}{2} - \cot 2^n a$ ។

១៤_ គេឱ្យ $S_n = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{4}{\cos^2 2a} + \frac{4^2}{\cos^2 2^2 a} + ... + \frac{4^n}{\cos^2 2^n a}$

ក, ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ ។

ខ, ទាញបង្ហាញថា $S_n = \frac{4^{n+1}}{\sin^2 2^{n+1} a} - \frac{1}{\sin^2 a}$ ។

១៥_ គេឱ្យ $S_n = \sin x \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2^2} + ... + 2^n \sin\frac{x}{2^n}\cos^2\frac{x}{2^{n+1}}$

ក, ចូរបង្ហាញថា $2\sin a - \sin 2a = 2\sin a \cos^2\frac{a}{2}$ ។

ខ, ទាញបង្ហាញថា $S_n = 2^n \sin\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2}\sin 2x$ ។

១៦_ គេឱ្យ $P_n = \cos x . \cos\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{2^2} .... \cos\frac{x}{2^n}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $P_n = \frac{1}{2^{n+1}} . \frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2^n}}$ ។

១៧_ គេឱ្យ $P_n = (1 + \frac{1}{\cos a})(1 + \frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1 + \frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1 + \frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$ ។

ក, ចូរបង្ហាញថា $1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\tan x}{\tan\frac{x}{2}}$ ។

ខ, គណនាផលគុណ P_n ។

១៨_ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម ៖

ក, $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

ខ, $\frac{\tan(a+b)}{\cot(a-b)}=\frac{\tan^2 a-\tan^2 b}{1-\tan^2 a\tan^2 b}$

គ, $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{1+\tan x\ \tan y}$

ឃ, $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

ង, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha)}$

ច, $\tan\theta\sin 2\theta=2\sin^2\theta$

ឆ, $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}=1+\frac{1}{2}\sin 2x$

ជ, $\frac{1-\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{1-\tan a}{1+\tan a}$

១៩_ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម ៖

ក, $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

ខ, $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

គ, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

ឃ, $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

ង, $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$

ច, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

ឆ, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

ជ, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

ឈ, $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

ញ, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

២០_ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម ៖

ក, $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4\cos x \cos 2x \cos 3x$

ខ, $\dfrac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \tan 3x$

គ, $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (1 + 2\cos x)\sin 2x$

ឃ, $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = (1 + 2\cos x)\cos 2x$

២១_ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សំនើខាងក្រោម ៖

ក, $\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \ \tan b \ \tan c = \dfrac{\sin(a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c}$

ខ, $\sin^2(a + b) + \sin^2(a - b) + 2\sin(a + b)\sin(a - b)\cos 2a = \sin^2 2a$

គ, $\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos(a + b)\cos(a - b)$

ឃ, $\tan a + \tan b = \dfrac{2\sin(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)}$

ង, $\tan x \ \tan(\dfrac{\pi}{3} - x) \ \tan(\dfrac{\pi}{3} + x) = \tan 3x$

២២_ ក, ស្រាយបញ្ជាក់ឯកលក្ខណះភាព ៖

$$\frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin(y - z)}{\cos y \cos z} + \frac{\sin(z - x)}{\cos z \cos x} = 0$$

ខ, ទាញបង្ហាញថា ៖

$$\frac{\sin^3(x-y)}{\cos^3 x \cos^3 y} + \frac{\sin^3(y-z)}{\cos^3 y \cos^3 z} + \frac{\sin^3(z-x)}{\cos^3 z \cos^3 x} = 3\frac{\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z}$$

២៣_ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

២៤-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$

និង $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ ។

២៥-ចូរបង្ហាញថា $(1-x^2)\sin 2a - 2x\cos 2a = \dfrac{2(\tan a - x)(1 + x\tan a)}{1+\tan^2 a}$ ។

២៦-ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម ៖

ក, $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

ខ, $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

គ, $\tan(\dfrac{\pi}{4} + x) - \tan(\dfrac{\pi}{4} - x) = 2\tan 2x$

ឃ, $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\dfrac{x}{2}$

ង, $\tan(\dfrac{\pi}{4} + x) + \tan(\dfrac{\pi}{4} - x) = \dfrac{2}{\cos 2x}$

២៧-ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក, $\dfrac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}$

ខ, $\dfrac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x-\sin x}$

គ, $\dfrac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1+\cos 2x+\cos 4x}$

ឃ, $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x + \sin y}$

ង, $\dfrac{\cos u + \cos v}{1+\cos(u+v)}$

២៨-ចូរបំលែងជាផលគុណនៃកន្សោម

$S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$ ។

២៩_ គេឱ្យ a និង b ជាមុំស្រួចដែល $\sin a=\frac{1}{2}$ និង $\sin b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ចូរគណនាតម្លៃអនុគមន៍រង្វង់នៃមុំ $a+b$ និង $a-b$

រួចទាញរកតម្លៃនៃ b ជារ៉ាដ្យង់។

៣០_ គេឱ្យ a ជាមុំស្រួចដែល $\cos a=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ។

ចូរគណនា $\cos 2a$ រួចទាញរកតម្លៃនៃមុំ a ជារ៉ាដ្យង់ ។

៣១_ ចូរបំលែងផលបូក

$S=\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)$ ជាផលគុណកត្តា ។

៣២_ ត្រីកោណ ABC មួយមាន $\cos B=\frac{20}{29}$ និង $\cos C=\frac{21}{29}$ ។

ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

៣៣_ ចូរកំនត់រកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមា (បើមាន) នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក, $y=3\sin x+4\cos x+7$

ខ, $y=-5\sin x+12\cos x+17$

គ, $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

ឃ, $y=3\sin^2 x+4\sin x\cos x-5\cos^2 x+2$

ង, $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

ច, $y=\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$

ឆ, $y=\left(\sin^3 x+\frac{1}{\sin^3 x}\right)^2+\left(\cos^3 x+\frac{1}{\cos^3 x}\right)^2$

ជ, $y=\sin^8 x+\cos^8 x$

ញ, $y=\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+4$

៣៤_ សម្រួល $A_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+\cos a}}}}$ ដែល $0\le a\le\frac{\pi}{2}$

៣៥_ គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): x^2-(m^2-m)\,x-m+2=0$

គេសន្មតថាសមីការនេះមានឫសពីរតាងរៀងគ្នាដោយ

$\tan a$ និង $\tan b$ ។

ក, ចូរកំនត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឱ្យ $a+b=\frac{\pi}{3}$ ។

ខ, ចូរដោះស្រាយសមីការខាងលើចំពោះ m ដែលបានរកឃើញ

គ, ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$

៣៦_ ក, ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$ ។

ខ, ចូរដោះស្រាយសមីការ $100-10^{1+\log^2\sqrt{2}-1(\tan x)}=0$ ។

៣៧_ ក, ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{5}$ ។

ខ, ចូរដោះស្រាយសមីការ

$$\sin^4 x-(2-\frac{\sqrt{5}}{2})\sin^2 2x+3\,(5-2\sqrt{5})\cos^4 x=0$$

៣៨_ ក, ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ, ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\,,\,y\in IR$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$x^2+(x+y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$$

៣៩_ គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos a \ \ , 0 \le a \le \dfrac{\pi}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \ \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរបង្ហាញថា $U_n = 2\cos\dfrac{a}{2^n}$ ។

៤០_ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x,y) = (a\cos x + b\cos y)^2 + (a\sin x + b\sin y)^2$ ។

ចូរស្រាយថា $f(x,y) \le (a^2 + b^2)^2$ ។

៤១_ ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ, ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$A_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

$$B_n = \tan b + 2\tan 2b + 2^2\tan 2^2 b + ... + 2^n \tan 2^n b$$

៤២_ ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\left[\dfrac{1}{2^k}\tan 2^{k+1}a \ \tan^2 2^k a\right]$

៤៣_ ក, ចូរស្រាយថា $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

ខ, ចូរគណនា $S_n = \sin^3 a + \dfrac{1}{3}\sin^3 3a + \dfrac{1}{3^2}\sin^3 3^2 a + ... + \dfrac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$

៤៤_ ក, ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$

ខ, ចូរគណនា $S_n = \dfrac{1}{\cos^2 a} + \dfrac{4}{\cos^2 2a} + ... + \dfrac{4^n}{\cos^2 2^n a}$

៤៥_ ក, ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ, ចូរគណនា $S_n = \dfrac{1}{\sin a} + \dfrac{1}{\sin 2a} + \dfrac{1}{\sin 2^2 a} + ... + \dfrac{1}{\sin 2^n a}$

៤៦_ក, ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ, ចូរគណនាផលគុណ ៖

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos 2a})(1+\frac{1}{\cos 2^2 a}).....(1+\frac{1}{\cos 2^n a})$$

៤៧_ក, ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ, ចូរគណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

៤៨_ក, ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$

ខ, គណនា

$$S_n=\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+....+\frac{1}{\cos(nx)\cos(n+1)x}$$

៤៩_ក, ចូរស្រាយថា $\tan(n+1)x-\tan(nx)=\tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$

ខ, គណនាផលបូក

$$S_n=\tan x\tan 2x+\tan 2x\tan 3x+.....+\tan(nx)\tan(n+1)x$$

៥០_ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\cos x-1=\frac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

ខ, ចូរគណនាផលគុណ ៖

$$P_n=(2\cos a-1)(2\cos 2a-1)(2\cos 2^2 a-1).....(2\cos 2^n a-1)$$

៥១_គណនាផលគុណ $P_n=\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.........\cos\frac{x}{2^n}$

៥២_ គណនាផលគុណ

$$P_n = (1-\tan^2 x)(1-\tan^2 \frac{x}{2})(1-\tan^2 \frac{x}{2^2}).........(1-\tan^2 \frac{x}{2^n})$$

៥៣_ គណនាផលគុណ ៖

$$P_n = (\cos a + \cos b)(\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2})(\cos\frac{a}{2^2} + \cos\frac{b}{2^2}).....(\cos\frac{a}{2^n} + \cos\frac{b}{2^n})$$

៥៤_ គណនាផលគុណ

$$P_n = (1-4\sin^2 x)(1-4\sin^2 \frac{x}{3})(1-4\sin^2 \frac{x}{3^2}).....(1-4\sin^2 \frac{x}{3^n})$$

៥៥_ គណនាផលគុណ

$$P_n = (3-4\sin^2 x)(3-4\sin^2 \frac{x}{3})(3-4\sin^2 \frac{x}{3^2})......(3-4\sin^2 \frac{x}{3^n})$$

៥៦_ គណនាផលគុណ

$$P_n = \frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}.\frac{3-\tan^2 \frac{x}{3}}{1-3\tan^2 \frac{x}{3}}.\frac{3-\tan^2 \frac{x}{3^2}}{1-3\tan^2 \frac{x}{3}}.....\frac{3-\tan^2 \frac{x}{3^n}}{1-3\tan^2 \frac{x}{3^n}}$$

៥៧_ ក, ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \dfrac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{\frac{1}{3^k}\tan^3 3^k a}{1-3\tan^2 3^k a} \right]$

៥៨_ ក, ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}\tan 2x - \tan x$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{\frac{1}{2^k}\tan^3 2^k a}{1-\tan^2 2^k a} \right)$

៥៩_គណនាផលគុណ ៖

$$P_n = (\tan a + \cot a)(\tan^2 a + \cot^2 a)(\tan^4 a + \cot^4 a)......(\tan^{2^n} a + \cot^{2^n} a)$$

៦០_បង្ហាញថា $\cos a \cos 2a \cos 4a....\cos 2^{n-1} a = \dfrac{\sin 2^n a}{2^n \sin a}$ ។

៦១_ គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{a_n + 3a_{n+1}}{4}} \ , \ n \in IN \end{cases}$$

ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $0 < a_n < 1$ ។

ខ, គេតាង $a_n = \cos\theta_n$ ។ ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) ?

គ, គណនា θ_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦២_គេមានស្វ៊ីត (b_n) កំនត់ដោយ $b_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

និង $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{1+\sqrt{1+4b_n^2}}$, $n \in IN$

ក, គេពិនិត្យស្វ៊ីត (θ_n) ដែល $0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \in IN$

ហើយ $b_n = \dfrac{\tan\theta_n}{2}$ ។

ចូរកំនត់រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) ?

ខ, គណនា θ_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៣_គេមានស្វ៊ីត (t_n) កំនត់ដោយ $t_0 = \tan\frac{\pi}{3}$

និង $t_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-t_n{}^2}}$, $\forall n \in IN$

ក, ចូរបង្ហាញថា $0 < t_n \leq 2$ ។

ខ, តាង $t_n = 2\sin\theta_n$ ។ ចូរកំនត់រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) ?

គ, គណនា θ_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៤_គេមានស្វ៊ីត $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ និង $u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+u_n{}^2}$, $\forall n \in IN$

ក, តាង $u_n = \cot\theta_n$ ដែល $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in IN$ ។

ចូរកំនត់រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n)

ខ, គណនា θ_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៥_គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតវិជ្ជមានដែល $u_0 = \sqrt{2}$ និង $u_{n+1}{}^2 = \frac{2u_n}{1+u_n}$

គណនា u_n ។

៦៦_គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b , c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ។

៦៧_ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក, $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos x$

ខ, $\sin 2x = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$

គ, $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ឃ, $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$

ង, $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

៦៨_ ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក, $\sin 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6})$

ខ, $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{6} + x)$

គ, $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \cot(\frac{\pi}{3} + 2x)$

ឃ, $\tan(\frac{\pi}{3} - 2x) = \tan(3x - \frac{\pi}{6})$

ង, $\tan(3x - \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{5}$

៦៩_ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក, $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

ខ, $4\sin^2 x - 2(\sqrt{2} + 1)\sin x + \sqrt{2} = 0$

គ, $2\cos^2 x - (1 + \sqrt{3})\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

ឃ, $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$

ង, $\sqrt{3}\tan^2 x - 4\tan x + \sqrt{3} = 0$

៧០_ ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក, $4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} = 0$

ខ, $\sqrt{3}\sin^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

គ, $\tan^2 x+(\sqrt{3}-1)\tan x-\sqrt{3}=0$

ឃ, $2\log_2^2 \cos x+3\log_2 \cos x \ \ +1=0$

ង, $\log_{\sqrt{2}}^2 \sin x+3\log_{\sqrt{2}} \sin x \ \ +2=0$

៧១_ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក, $(\sqrt{3}+1)\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+(\sqrt{3}-1)\cos^2 x=0$

ខ, $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{2}$

គ, $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

ឃ, $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$

៧២_ ដោះស្រាយនឹងពិភាក្សាសមីការ $m\cos x+\sin x=2m$ ។

៧៣_ គេមានសមីការ $(2\cos\alpha-1)x^2-2x+\cos\alpha=0$

ដែល $0<\alpha<\pi$ ។

កំនត់តម្លៃ α ដើម្បីឱ្យសមីការមានឬសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់

$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}-4\sin\alpha=0$ ។

៧៤_ គេឱ្យសមីការ ៖

$$x^2-2x\sin\varphi+(2-\sqrt{3})(1-4\cos^2\varphi)=0 \quad , \ 0\le\varphi\le 2\pi$$ ។

ក, ចូរស្រាយថាសមីការនេះមានឬសជានិច្ចគ្រប់ φ ។

ខ, ចូររកទំនាក់ទំនងរវាងឬស x' និង x'' មិនអាស្រ័យនឹង φ

៧៥_ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក, $\sin x+\sqrt{3}\sin(\frac{7\pi}{2}-x)+\tan x=\sqrt{3}$

ខ, $2\cot^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x=1+\frac{1}{\sin^2 x}$

គ, $2\cos 2x+2\cos x\sin^2 x=\cos x$

ឃ, $\sin^3(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin x$

ង, $\tan 2x=\tan x\tan(\frac{\pi}{4}+x)\tan(x-\frac{\pi}{4})$

៧៦_ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក, $\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

ខ, $\frac{\cos x(2\sin x+3\sqrt{2})-2\cos^2 x-1}{1+\sin 2x}=1$

គ, $4\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{12})=\sqrt{3}+1$

ឃ, $(1+\sqrt{3})\tan x\tan(\frac{\pi}{3}-x)\tan(\frac{\pi}{3}+x)=\sqrt{3}-1+\frac{1}{\cos^2 3x}$

៧៧_ក, ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ និង $\tan\frac{5\pi}{12}$

ខ, ដោះស្រាយសមីការ $\tan^3 x-5\tan^2 x+5\tan x-1=0$

៧៨_ក, គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ, ដោះស្រាយសមីការ $1-\log^2_{1+\sqrt{2}}\tan x=0$ ។

៧៩_ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\sin^3 x+3\sin x\sin^2 y=\frac{7}{8}\\ 3\sin^2 x\sin y+\sin^3 y=\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

៨០_ ដោះស្រាយសមីការ $\log_{\sin x\cos x}\sin x \,.\, \log_{\sin x.\cos x}\cos x = \frac{1}{4}$ ។

៨១_ ដោះស្រាយសមីការ $2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$ ។

៨២_ ដោះស្រាយសមីការ ៖

a) $\sin^3(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin x$

b) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = 4$

(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅរុស្ស៊ី ថ្ងៃ ០៥ មេសា ឆ្នាំ ២០០០)

៨៣_ គេឱ្យសមីការ $m\sin x + (m+1)\cos x = \frac{m}{\cos x}$

ក, កំនត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឬស ។

ខ, គេតាង x_1 , x_2 ជាឬសពីរនៃសមីការខាងលើ

ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

ចូរគណនា $\cos 2(x_1 + x_2)$ ។ ($k \in Z$)

៨៤_ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $\tan x = \frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}$, $-1 < y < 1$, $y \neq 0$

នោះគេបាន $y = \sin 2x$ ។

៨៥_ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ ។

ចូរកំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ?

៨៦_ គេមានសមភាព $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^{10} x}{a^4} + \frac{\cos^{10} x}{b^4} = \frac{1}{(a+b)^4}$

៨៧_ គេឱ្យ $\cos a=\frac{1}{3}$, $\cos b=\frac{3}{8}$ និង $\cos c=\frac{5}{7}$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{a}{2}+\tan^2\frac{b}{2}+\tan^2\frac{c}{2}=1$?

៨៨_ គេតាង a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ដែល $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$ ។

ក, ចូរស្រាយថា $c=\frac{a+b}{2}$ ។

ខ, ចូរបង្ហាញថា $a^3+b^3+6abc=8c^3$ ។

៨៩_ គេឧបមាថាសមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានឫសពីរតាង ដោយ $\tan\theta$ និង $\tan\varphi$ ។

ចូរគណនា $M=a\sin^2(\theta+\varphi)+b\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta+\varphi)+c^2\cos(\theta+\varphi)$

ជាអនុគមន៍នៃលេខមេគុណ a, b, c ។

៩០_ ចូរបង្ហាញថាចំនួន $\cos\frac{\pi}{7}$ ជាឫសសមីការ $8x^3-4x^2+4x-1=0$ ។

៩១_ ចូរបង្ហាញថាចំនួន $\cos\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$, $\cos\frac{13\pi}{9}$

ជាឫសសមីការ $8x^3-6x-1=0$ ។

៩២_ ចូរបង្ហាញថា $\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

៩៣_ ចូរបង្ហាញថា $\tan 3^o\tan 51^o\tan\tan 57^o\tan 63^0\tan 69^o=\tan 9^o$ ។

៩៤_ គណនាតម្លៃនៃផលគុណ $P=\tan 10^o\tan 50^0\tan 70^0$ ។

៩៥_ គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖

$(E): x^2 - (m+1)x + 2m - \sqrt{3} = 0$

ក, កំនត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឬសពីរផ្សេងគ្នា ។

ខ, ឧបមាថា $\tan a$ និង $\tan b$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) ។

កំនត់ m ដើម្បីឱ្យ $\sin(a+b) = \cos(a-b)$ ។

៩៦_ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A = \sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7}$ ។

៩៧_ ចូរបង្ហាញថា $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$ ។

៩៨_ គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីបី ៖

$(E): 3x^3 - (m+3)\ x^2 + (3+4\sqrt{3})\ x - 3 = 0$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

គេឧបមាថាសមីការមានឬសបីតាងរៀងគ្នាដោយ

$\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ ។

ក, កំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$ ។

ខ, ចូរកំនត់ α, β, γ ដែល $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ចំពោះតម្លៃ m

ដែលបានរកឃើញខាងលើនេះ ។

៩៩_ គេឱ្យសមីការ $(E): 3x^2 - mx + m\sqrt{3} - 9 = 0$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

គេឧបមាថាសមីការមានឬសបីតាងរៀងគ្នាដោយ

$\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ។

ក, កំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ។

ខ, ចូរកំនត់ α,β ដែល $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើនេះ ។

១០០_គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\tan^2 x+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4^2}\tan^2\frac{x}{2^2}+.........+\frac{1}{4^n}\tan^2\frac{x}{2^n}$$

១០១_គេឱ្យមុំបី $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$ ដែល $\alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{4}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

ខ, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

១០២_គេឱ្យ n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ។

ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n\in IR^n$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos x_k\right)\right]^2+\left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\sin x_k\right)\right]^2\le(a_1+a_2+a_3+....+a_n)^2$$

១០៣_ដោះស្រាយសមីការ $\cos^n x-\sin^n x=1$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

(3rd IMO 1961)

១០៤_ចូរកំនត់គ្រប់ចម្លើយពិតសមីការ $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$

(4th IMO 1962)

១០៥_ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

(5th IMO 1963)

១០៦_ ចូរកំនត់គ្រប់ x នៃចន្លោះ $[0\,,2\pi]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$2\cos x \le |\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}| \le \sqrt{2}$ ។

(7th IMO 1965)

១០៧_ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{\sin 2x}+\dfrac{1}{\sin 4x}+..........+\dfrac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n និងគ្រប់ចំនួនពិត x

ដែល $\sin 2^n x \ne 0$ ។

(8th IMO 1966)

១០៨_ ដោះស្រាយសមីការ $x^3-3x=\sqrt{2+x}$ ។

១០៩_ ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$ ។

✍✍✍✍✍