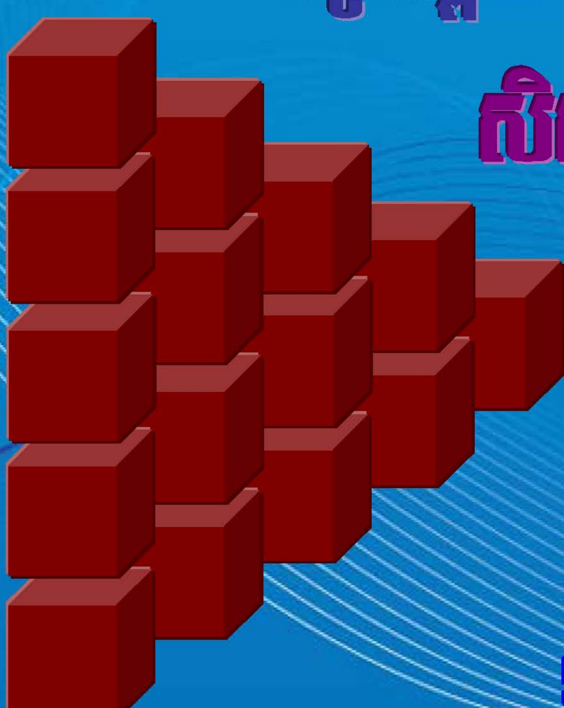
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គន្លឹះស្វ៊ីតចំនួនពិត

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១

កម្រិតខ្ពស់ និង មូលដ្ឋាន

សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា



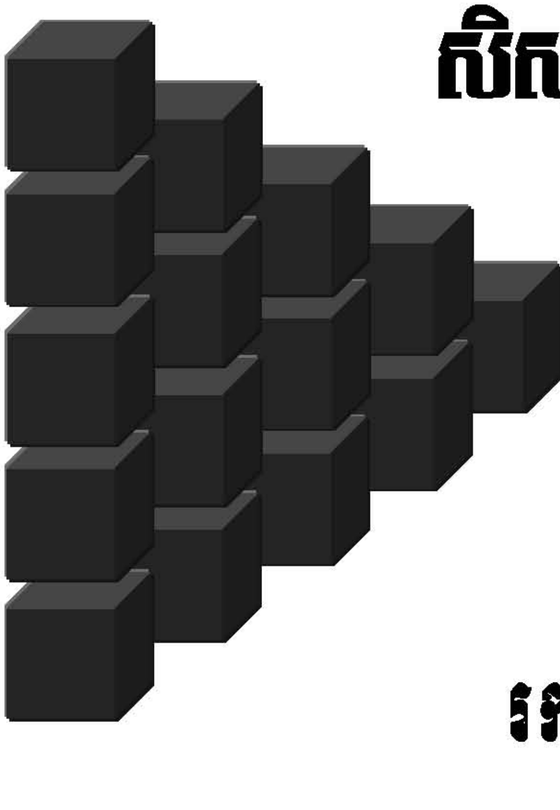
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គន្លឹះស្វីតចំនួនពិត

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១

កម្រិតខ្ពស់ និង មូលដ្ឋាន

សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា



អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី នុយ រីណា

លោក និត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាភា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **គន្លឹះស៊ីតចំនួនពិត** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសា ជំនួយស្មារតីដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ដែល ចង់ចេះ ចង់ដឹងអំពីមេរៀនស៊ីតចំនួនពិតនេះ ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះយើងខ្ញុំបានសរសេរវិធីសាស្ត្រសម្រាប់ដោះស្រាយ និង អមជាមួយលំហាត់គំរូ ដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សា ងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំអំពីវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយនីមួយៗ ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅ គន្លឹះស៊ីតចំនួនពិតមួយក្បាលនេះនឹងអាចចូលរួមចំណែកក្នុងការពង្រីកចំណេះដឹងរបស់អ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

យើងខ្ញុំរង់ចាំជានិច្ច នូវមតិរិះគន់ពីអ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដោយក្តីសោមនស្សរីករាយ បំផុត ដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះ ឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពថែមទៀត ។

សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ជួបតែសំណាងល្អ និង ទទួលបានជ័យជំនះក្នុងការសិក្សា ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ០៣ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ២០០៩

អ្នកនិពន្ធ **លឹម ផល្គុន**

Tel : (017) 768 246

បញ្ជីអត្ថបទ

I - ស្វ៊ីតនព្វន្ត និង ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១_ស្វ៊ីតចំនួនពិត

២_ស្វ៊ីតនព្វន្ត

៣_ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

៤_រូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តមានលំដាប់ខ្ពស់

II - របៀបរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

១_ករណីស្គាល់តួដំបូង u_1 និងផលសងរួម d

២_ករណីស្គាល់តួទី p និងតួទី q

៣_ករណីស្គាល់តួទី p និងផលសងរួម d

៤_ករណីស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង S_n

III_របៀបរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១_ករណីស្គាល់តួដំបូង u_1 និង រេសុង q

២_ករណីស្គាល់តួទី p និងតួទី r

៣_ករណីស្គាល់តួទី p និង រេសុង q

៤_ករណីស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង S_n

IV_របៀបគណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ

១_និម្មិតសញ្ញា $\sum$ សម្រាប់ផលបូកនៃស្វ៊ីត

២_លក្ខណៈផលបូកតួនៃស្វ៊ីត

៣_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$$

ដែល $p = 1 ; 2 ; 3 ;...$

៤_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + ... + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

៥_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + ... + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

៦_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n$$

៧_សំគាល់

៨_ទំនាក់ទំនងរវាង S_n និង u_n

V_របៀបកំនត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

១_ផលសងតួលំដាប់ទីមួយ

២_ផលសងតួលំដាប់ទីពីរ

VI_វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

VII_របៀបរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតដោយប្រើស្វ៊ីតជំនួយ

១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = a\,u_n + b$$

២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n$$

៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + c$$

៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$$

៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+3} = a\,u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + d$$

៦_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

៧_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = k\,.\,u_n{}^p$$

៨_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = k\,.\,u_{n+1}{}^p\,u_n{}^q$$

៩_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = a\,u_n^{\ 2} + b\ u_n + c$$

១០_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = \frac{au_n^{\ 2} + bu_n + c}{a'u_n + b'}$$

១១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = \frac{au_n^{\ 2} + bu_n + c}{a'u_n^{\ 2} + b'u_n + c'}$$

១២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = \frac{au_n^{\ 3} + bu_n^{\ 2} + cu_n + d}{a'u_n^{\ 2} + b'u_n + c'}$$

១៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = \frac{au_n^{\ 3} + bu_n^{\ 2} + cu_n + d}{a'u_n^{\ 3} + b'u_n^{\ 2} + c'u_n + d'}$$

១៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = a\,u_n + f(n)$$

១៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + f(n)$$

១៦_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + f(n)$$

១៧_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$$

១៨_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + p \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + q \end{cases}$$

១៩_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_{n+1} = a{u_n}^2 + bu_nv_n + c{v_n}^2 \\ v_{n+1} = a'{u_n}^2 + b'u_nv_n + c'{v_n}^2 \end{cases}$$

២០_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n{}^3 + bu_n{}^2 v_n + cu_n v_n{}^2 + d\,v_n{}^3 \\ v_{n+1} = a'u_n{}^3 + b'u_n{}^2 v_n + c'u_n v_n{}^2 + d'v_n{}^3 \end{cases}$$

២១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \;\; ; \;\; v_0 = \beta \\ u_{n+1} = u_n{}^2 + d\,v_n{}^2 \quad (d > 0) \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

២២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \;\; ; \;\; v_0 = \beta \\ u_{n+1} = u_n{}^2 - d\,v_n{}^2 \quad (d > 0) \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

២៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$x_0 = \alpha \;\; ; \quad x_{n+1} = \frac{x_n{}^2 + d}{2x_n} \quad (d > 0)$$

២៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$x_0 = \alpha \;\; ; \quad x_{n+1} = \frac{x_n{}^2 - d}{2x_n} \quad (d > 0)$$

២៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{f(n+1)}{[f(n)]^k}.u_n{}^k \end{cases}$$

VIII_អនុវត្តន៍ស្វ៊ីតក្នុងការគណនាដេរីវេទី n

១_របៀបរកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍រាង

$$y = (ax+b)e^{\alpha x}$$

២_របៀបរកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍រាង

$$y = (a\sin px + b\cos px)e^{\alpha x}$$

IX_អនុវត្តន៍ស្វ៊ីតក្នុងការគណនាអនុគមន៍បណ្តាក់លំដាប់ n

$$F_n(x) = f_n \circ f \circ f \circ ..... \circ f \circ f(x)$$

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត

I. ស្វ៊ីតនព្វន្ត និង ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១_ស្វ៊ីតចំនួនពិត

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំនត់ពីសំណុំ IN ទៅ IR ។

២_ស្វ៊ីតនព្វន្ត

-ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយហៅថាផលសងរួម ឬ រេសុងនៃស្វ៊ីត ។

រូបមន្តផលសងរួម $d = u_{n+1} - u_n$ ។

-តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

-ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{n(u_1 + u_2)}{2}$$

៣_ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

-ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយដែលខុសពីសូន្យ ។

ចំនួនថេរ q ហៅថាផលធៀបរួម ឬ រេសុងនៃស្វ៊ីត ។

រូបមន្តផលធៀបរួម $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ។

-តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

-ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

៤_រូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តមានលំដាប់ខ្ពស់

$$1/ \ \sum_{k=1}^{n} (k) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2/ \ \sum_{k=1}^{n} \left(k^2\right) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3/ \ \sum_{k=1}^{n} \left(k^3\right) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

II . របៀបរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

១_ករណីស្គាល់តួដំបូង u_1 និងផលសងរួម d

២_ករណីស្គាល់តួទី p និងតួទី q

៣_ករណីស្គាល់តួទី p និងផលសងរួម d

៤_ករណីស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង S_n

✍ របៀបដោះស្រាយ

១_ករណីស្គាល់តួដំបូង u_1 និងផលសងរួម d

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកំនត់លើ IN^* ហើយស្គាល់តួ u_1 និងផលសងរួម d នោះគេអាចរកតួ u_n តាមរូបមន្ត ៖

$u_n = u_1 + (n-1).d$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយដោយស្គាល់តួ $u_1 = 2008$ និងមានផលសងរួម $d = 8$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$ ដោយ $u_1 = 2008$ និង $d = 8$

យើងបាន $u_n = 2008 + (n-1)8 = 8n + 2000$

ដូចនេះ $u_n = 8n + 2000$ ។

២_ករណីស្គាល់តួទី p និងតួទី q

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកំនត់លើ IN^* ហើយស្គាល់តួ $u_p = \alpha$ និងតួ $u_q = \beta$ ។ ក្នុងករណីនេះដើម្បីអាចកំនត់រកតួទី n គេត្រូវរកជាដំបូងនូវតួ u_1 និងផលសងរួម d ។

ដោយយោងតាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1).d$

ហើយដោយស្គាល់ $u_p = \alpha$, $u_q = \beta$

នោះគេអាចបង្កើតប្រព័ន្ធ $\begin{cases} u_1 + (p-1)d = \alpha \\ u_1 + (q-1)d = \beta \end{cases}$

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេអាចរកឃើញតម្លៃតួ u_1 និងផលសងរួម d

ដូចនេះគេអាចរកតួ u_n តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1).d$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយដោយស្គាល់តួ $u_{17} = 37$ និងតួ $u_{58} = 119$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1).d$

យើងបាន $u_{17} = u_1 + 16\,d$ និង $u_{58} = u_1 + 57\,d$

ដោយគេមាន $u_{17} = 37$ និងតួ $u_{58} = 119$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_1 + 16d = 37 \\ u_1 + 57d = 119 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបានចម្លើយ $u_1 = 5$, $d = 2$ ។

យើងបាន $u_n = 5 + (n-1)(2) = 2n + 3$

ដូចនេះ $u_n = 2n + 3$ ។

៣_ករណីស្គាល់តួទី p និងផលសងរួម d

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តកំនត់លើ IN^* ហើយស្គាល់តួ $u_p = \alpha$ និងមានផលសងរួម d នោះដើម្បីគណនា u_n គេគ្រាន់តែរកឱ្យឃើញតួ u_1 ។

ដោយប្រើរូបមន្តគ្រឹះ $u_n = u_1 + (n-1)d$ គេទាញបាន

$u_p = u_1 + (p-1)d = \alpha$

សមភាពនេះអាចឱ្យគេដោះស្រាយរកឃើញតម្លៃ u_1 ។

ដូចនេះគេអាចរកតួ u_n តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1).d$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយដោយស្គាល់តួ $u_{1979} = 2008$ និងមានផលសងរួម $d = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1).d$

គេបាន $u_{1979} = u_1 + 1978d$

នាំឱ្យ $u_1 = u_{1979} - 1978d = 2008 - 1978 = 30$

ហេតុនេះ $u_n = 30 + (n-1)(1) = n + 29$

ដូចនេះ $u_n = n + 29$ ។

៤_ករណីស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង S_n

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តកំនត់លើ IN^* ហើយស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង$S_n = f(n)$ នោះដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវពិចារណាដូចខាងក្រោមនេះ ៖

យើងដឹងថា $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{n\,(u_1 + u_n)}{2}$

បើ $n = 1$ នោះគេបាន $S_1 = u_1 = \alpha$ ។

គេទាញបានសមីការ $\frac{n(\alpha + u_n)}{2} = f(n)$

គេទាញបាន $u_n = \frac{2f(n)}{n} - \alpha$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយដោយស្គាល់តួផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះគឺ $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{n\,(u_1 + u_n)}{2}$

បើ $n = 1$ គេបាន $S_1 = u_1 = \frac{3(1)^2 - 1}{2} = 1$

យើងទាញបានសមីការ $\frac{n(1 + u_n)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$

សមមូល $1 + u_n = 3n - 1$ ។ ដូចនេះ $u_n = 3n - 2$ ។

III_របៀបរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១_ករណីស្គាល់តួដំបូង u_1 និង រេសុង q

២_ករណីស្គាល់តួទី p និងតួទី r

៣_ករណីស្គាល់តួទី p និង រេសុង q

៤_ករណីស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង S_n

✍ របៀបដោះស្រាយ

១_ករណីស្គាល់តួដំបូង u_1 និង រេសុង q

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំនត់លើ IN^* ហើយស្គាល់តួដំបូង $u_1 = \alpha$ និង មានរេសុង q នោះគេអាចកំនត់រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះតាមរូបមន្តគ្រឹះមួយ

ដែលកំនត់ដោយ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់តួដំបូង $u_1 = 12$ និង មានរេសុង $q = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = 12$ និងរេសុង $q = 3$ ។

គេបាន $u_n = 12 \times 3^{n-1} = 4.3^n$ ។

២_ករណីស្គាល់តួទី p និងតួទី r

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំនត់លើ IN^* ហើយស្គាល់

$u_p = \alpha$ និង $u_r = \beta$ ។

ដោយយោងតាមរូបមន្តគ្រឹះ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

គេអាចបង្កើតបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_p = u_1 \times q^{p-1} = \alpha \\ u_r = u_1 \times q^{r-1} = \beta \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះគេអាចរកឃើញតម្លៃ q និង u_1 ។

ដូចនេះតួទី n នៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់តួ

$u_3 = 24$ និងតួ $u_8 = 768$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

យើងបាន $u_3 = u_1 \times q^2$ និង $u_8 = u_1 \times q^7$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_1 \times q^2 = 24 \\ u_1 \times q^3 = 384 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះគេទទួលបានចម្លើយ

$q = 2; u_1 = 6$ ។ យើងបាន $u_n = 6 \times 2^{n-1} = 3.2^n$

៣_ករណីស្គាល់តួទី p និង រេសុង q

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំនត់លើ IN^* ហើយស្គាល់ $u_p = \alpha$ និងមានរេសុង q នោះដើម្បីគណនា u_n គេគ្រាន់តែកំនត់រកឱ្យឃើញតួ u_1 ពីសមីការ $u_p = u_1 \times q^{p-1}$

គឺ $u_1 = \dfrac{u_p}{q^{p-1}}$ ។

ដូចនេះតួទី n នៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់តួ $u_4 = 162$ និងមានរេសុង $q = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

ចំពោះ $n = 4$ គេបាន $u_4 = u_1 \times q^3$

គេទាញ $u_1 = \dfrac{u_4}{q^3} = \dfrac{162}{(3)^3} = 6$

យើងបាន $u_n = 6 \times 3^{n-1} = 2.3^n$

ដូចនេះ $u_n = 2 . 3^n$ ។

៤_ករណីស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង S_n

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រកំនត់លើIN^* ហើយមាន

ផលបូក n តួដំបូង $S_n = f(n)$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវពិចារណាដូចខាងក្រោម ៖

តាមរូបមន្ត $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

បើ $n = 1$ គេបាន $S_1 = u_1 = f(1)$

បើ $n = 2$ គេបាន $S_2 = u_1 + u_2 = u_1 \times \dfrac{q^2 - 1}{q - 1} = f(2)$

នាំឱ្យ $f(1) \times (q + 1) = f(2)$ ឬ $q = \dfrac{f(2)}{f(1)} - 1$

ដូចនេះតួទី n នៃស៊ីតកំនត់ដោយ

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = f(1) \times \left[\frac{f(2)}{f(1)} - 1 \right]^n$$ ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់រកតួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់ផលបូក

n តួដំបូង $S_n = \dfrac{3.5^{n+1} - 15}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

គេទាញបានសមភាព $u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{3.5^{n+1} - 15}{4}$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $u_1 \times \frac{q - 1}{q - 1} = \frac{3.5^2 - 15}{4}$ នាំឱ្យ $u_1 = 15$

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន $u_1 \times \frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{3.5^3 - 15}{4}$ នាំឱ្យ $q = 5$

យើងបាន $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 15 \times 5^{n-1} = 3.5^n$

ដូចនេះ $u_n = 3.5^n$ ។

VI_របៀបគណនាផលបូកតួនៃស៊ីតផ្សេងៗ

១_និម្មិតសញ្ញា $\sum$ សម្រាប់ផលបូកនៃស៊ីត

ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ កំនត់តាងដោយ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

២_លក្ខណៈផលបូកតួនៃស៊ីត

១. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda) = \lambda + \lambda + \lambda + ... + \lambda = n\lambda$

២. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} (u_k)$ (λ ជាចំនួនថេរ)

៣. $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k - w_k) = \sum_{k=1}^{n} (u_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k) - \sum_{k=1}^{n} (w_k)$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (u_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n} (u_k v_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k{}^2)$

៣-របៀបគណនាផលបូកស៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$S_n = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$ ដែល $p = 1 ; 2 ; 3 ;...$

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍តាមជំហានខាងក្រោម :

-គណនា $(n+1)^{p+1} - n^p$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$

-ធ្វើវិធីបូក

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូក $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

គេមាន $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \quad (i)$

ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$ ក្នុងសមភាព (i) គេបាន :

$$\begin{cases} 2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1 \\ 4^3 - 3^3 = 3.3^2 + 3.3 + 1 \\ ---------------- \\ (n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3.n + 1 \end{cases}$$

ធ្វើវិធីបូកសមភាពខាងលើអង្គ និង អង្គគេបាន

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + ... + n) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3S_n = \frac{2(n^3 + 3n^2 + 3n) - 3n(n+1) - 2n}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

៤-របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

ដែល $a_{n+1} - a_n = d$ ថេរ ហើយ $d \neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

-បម្លែងតួ $\frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}.\frac{a_{n+1} - a_n}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$

-ធ្វើវិធីបូក

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

គេមាន $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$ (i)

ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$ ក្នុងសមភាព (i) គេបាន :

$$\begin{cases} \frac{1}{1.4} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{4.7} = \frac{1}{3}(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}) \\ ---------------------- \\ \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}) \end{cases}$$

ធ្វើវិធីបូកសមភាពខាងលើអង្គ និង អង្គគេបាន $S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}$

៥_របៀបគណនាផលបូកស៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n=\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4a_5}+.....+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$$

ដែល $a_{n+2}-a_n=d$ ថេរ ហើយ $d\neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

-បំម្លែងតួ $\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$

-ឱ្យតម្លៃ $n=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ....;n$

-ធ្វើវិធីបូក

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

គេមាន $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)\ (i)$

ឱ្យតម្លៃ $n=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ....;n$ ក្នុងសមភាព (i) គេបាន :

$$\begin{cases}\frac{1}{1.3.5}=\frac{1}{4}(\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5})\\ \frac{1}{3.5.7}=\frac{1}{4}(\frac{1}{3.5}-\frac{1}{5.7})\\ -------------------------------\\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)})\end{cases}$$

ធ្វើផលបូកសមភាពខាងលើអង្គ និង អង្គគេបាន :

$$S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)=\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$$ ។

៦-របៀបគណនាផលបូកស៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$

ដែល (a_n) ជាស៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d និង (b_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង q ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវគណនា $S_n - q\,S_n$ រួចទាញរក S_n ។

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{n}{10^n}$

យើងឃើញថា $1 , 2 ,3, ..., n$ ជាស៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$

ហើយ $\frac{1}{10} ; \frac{1}{10^2} ; \frac{1}{10^3} ; .....; \frac{1}{10^n}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{10}$

គេមាន $S_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{n}{10^n} \quad (i)$

ហើយ $\frac{1}{10} S_n = \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{3}{10^4} + ... + \frac{n}{10^{n+1}} \quad (ii)$

ធ្វើផលសង (i) និង (ii) គេបាន :

$$S_n - \frac{1}{10} S_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... + \frac{1}{10^n} \right) - \frac{n}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10} S_n = \frac{1}{10} . \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{n}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10} S_n = \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) - \frac{n}{10^{n+1}}$$

គេទាញ $S_n = \frac{10}{81} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) - \frac{n}{9.10^n}$ ។

៧_សំគាល់

គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

ដើម្បីគណនាផលបូកខាងលើនេះគេត្រូវ :

-សរសេរតួ u_k ជារាង $u_k = t_{k+1} - t_k$ ឬ $u_k = t_k - t_{k+1}$ (បើអាច)

-ករណីគេអាចសរសេរ $u_k = t_{k+1} - t_k$ នោះគេបាន :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_1$$

-ករណីគេអាចសរសេរ $u_k = t_k - t_{k+1}$ នោះគេបាន :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k+1}) = t_1 - t_{n+1}$$

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលបូក $S_n = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + ... + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

គេមាន $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right]$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ

$u_n = \dfrac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$ ដែល $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ....$

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_n = \dfrac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$

$$= \frac{(2-1)2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{2^{n+1}-2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$

$$= \frac{(2^{n+1}+1)-(2^n+1)}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}$$

គេបាន :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{2^{k+1}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}+1}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}+1}$ ។

ឧទាហរណ៍៣ គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$u_n = \frac{1}{2^{2^n}+1} \quad \text{ដែល} \quad n = 0 \ ; 1 \ ; 2 \ ; ....$$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{2^{2^n}-1}+\dfrac{B}{2^{2^{n+1}}-1}$ ដែល A និង B ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k u_k\right) = u_0 + 2u_1 + 4u_2 + ... + 2^n u_n \quad ។$$

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{2^{2^n}-1}+\dfrac{B}{2^{2^{n+1}}-1}$

គេមាន $u_n = \dfrac{1}{2^{2^n}+1}$ ដែល $n = 0 \ ; 1 \ ; 2 \ ; ....$

គេបាន $\dfrac{A}{2^{2^n}-1}+\dfrac{B}{2^{2^{n+1}}-1} = \dfrac{1}{2^{2^n}+1}$

បើ $n=0$ នោះ $A + \dfrac{B}{3} = \dfrac{1}{3}$ (1)

បើ $n=1$ នោះ $\dfrac{A}{3} + \dfrac{B}{15} = \dfrac{1}{5}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបានប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} A+\dfrac{B}{3}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{A}{3}+\dfrac{B}{15}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$ សមមូល $$\begin{cases} 3A+B=1 \\ 5A+B=3 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $A=1\ ;\ B=-2$ ។

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{1}{2^{2^n}-1}-\dfrac{2}{2^{2^{n+1}}-1}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(2^k u_k\right)=u_0+2u_1+4u_2+...+2^n u_n$

គេមាន $u_n=\dfrac{1}{2^{2^n}-1}-\dfrac{2}{2^{2^{n+1}}-1}$

គេបាន $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k}{2^{2^k}-1}-\dfrac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}\right)=1-\dfrac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{2^{2^{n+1}}-2^{n+1}-1}{2^{2^{n+1}}-1}$ ។

៨_ទំនាក់ទំនងរវាង S_n និង u_n

គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិត ហើយ S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

គេបាន $S_1=u_1$

$S_2=u_1+u_2=S_1+u_2$

$S_3=u_1+u_2+u_3=S_2+u_3$

$---------------$

$S_n=u_1+u_2+....+u_n=S_{n-1}+u_n$

ដូចនេះ $u_n=S_n-S_{n-1}$ និង $u_1=S_1$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់គ្រប់ $n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ...$

ហើយផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះកំនត់ដោយ $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

ចូរគណនាតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

តាមរូបមន្តយើងបាន $u_n = S_n - S_{n-1}$

ដោយ $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ហើយ $S_{n-1} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

យើងបាន
$$u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{n\left[(n+1)(2n+1)-(n-1)(2n-1)\right]}{6}$$
$$= \frac{n\left(2n^2+3n+1-2n^2+3n-1\right)}{6} = n^2$$

ដូចនេះ $u_n = n^2$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់គ្រប់ $n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ...$

ហើយផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះកំនត់ដោយ $S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ ។

ចូរគណនាតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

យើងបាន $u_n = S_n - S_{n-1}$
$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} - \frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$$
$$= \frac{n^2(n+3)-(n-1)(n+2)^2}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

V_របៀបកំនត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

១_ផលសងតួលំដាប់ទីមួយ ៖

_គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1\ ;\ a_2\ ; a_3\ ; .....\ ;\ a_n$

ហើយ $b_1 = a_2 - a_1 ; b_2 = a_3 - a_2 ; b_3 = a_4 - a_3 ; .....$ នោះគេថាស្វ៊ីត

$(b_n): b_1 ; b_2 ; b_3 ; .... ; b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

_រូបមន្តគណនាតួ a_n

គេមាន $b_n = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1})$

$= a_n - a_1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = a_n - a_1$

ដូចនេះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

២_ផលសងតួលំដាប់ទីពីរ ៖

_គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1\ ;\ a_2\ ; a_3\ ; .....\ ;\ a_n$

ហើយ $b_1 = a_2 - a_1 ; b_2 = a_3 - a_2 ; b_3 = a_4 - a_3 ; .....; b_n = a_{n+1} - a_n$

$(b_n): b_1 ; b_2 ; b_3 ; .... ; b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n)

-រូបមន្តគណនាតួ a_n គឺ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

-ស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទីពីរនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺជាផលសងលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n \; ; n = 1 , 2 , 3 ,...$

រូបមន្តគណនាតួទី n គឺ $b_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i) \; ; \; n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): 5 \; ; \; 11 \; ; \; 21 \; ; 35 \; ; 53 \; ; .....$

ចូរកំនត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(a_n): 5 \; ; \; 11 \; ; \; 21 \; ; 35 \; ; 53 \; ; .....$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំនត់ដោយ ៖

$b_n = a_{n+1} - a_n$ គ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

គេបាន $(b_n): 6 \; ; 10 \; ; 14 \; , \; 18 \; ; ....$

ស្វ៊ីត (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 4$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 + (n-1)d$ ដោយ $b_1 = 6 \; ; d = 4$

គេបាន $b_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = 5 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k+2) = 5 + \frac{(n-1)(6+4n-2)}{2}$

ដូចនេះ $a_n = 2n^2 + 3$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): 3\ ;\ 5\ ;\ 9\ ; 17\ ; 33\ ; .....$

ចូរកំនត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំនត់ដោយ ៖

$b_n = a_{n+1} - a_n$ គ្រប់ $n = 1\ , 2\ , 3\ , ...$

គេបាន $(b_n): 2\ ; 4\ ; 8\ ;\ 16\ ; ....$

ស្វ៊ីត (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $b_1 = 2\ ; q = 2$

គេបាន $b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k) = 3 + 2.\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1}$

ដូចនេះ $a_n = 2^n + 1$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): 3\ ;\ 8\ ;\ 17\ ; 32\ ; 57\ ;100;\ .....$

ចូរកំនត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

ដំណោះស្រាយ

តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំនត់ដោយ ៖

$b_n = a_{n+1} - a_n$ គ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

គេបាន $(b_n) : 5 ; 9 ; 15 ; 25 ;43; ....$

តាងស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទីពីរនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំនត់ដោយ ៖

$c_n = b_{n+1} - b_n$ គ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

គេបាន $(c_n) : 4 ; 6 ; 10 ;18 ; ....$

តាងស្វ៊ីត (d_n) ជាផលសងលំដាប់ទីបីនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំនត់ដោយ ៖

$d_n = c_{n+1} - c_n$ គ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

គេបាន $(d_n) : 2 ; 4 ; 8 ; ....$

ស្វ៊ីត (d_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

តាមរូបមន្ត $d_n = d_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $d_1 = 2 ; q = 2$

គេបាន $d_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

តាមរូបមន្ត $c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_k) = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k) = 4 + 2 . \dfrac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$

ដូចនេះ $c_n = 2^n + 2$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (c_k) = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k + 2)$

$$b_n = 5 + 2 . \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 2(n-1) = 2^n + 2n + 1$$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k) = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k + 2k + 1)$

$$a_n = 3 + (2^n - 2) + (n^2 - 1) = 2^n + n^2$$

VI_វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

និយមន័យ ៖

$P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេត្រូវ :

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$
2. ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ n
3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតនាំឱ្យបាន $P(n+1)$ ពិត

ឧទាហរណ៍១

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$L_n = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}} - 2}{x-2}$$

(មាន n រ៉ាឌីកាល់)

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

យើងមាន $L_n = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}} - 2}{x-2}$

យើងបាន ៖

$$L_1=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(2+x)-4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{2+x}+2}=\frac{1}{4}$$

$$L_2=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{(x-2)(\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+2)}$$

$$L_2=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+2}\times\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}=\frac{1}{4}L_1=\frac{1}{4^2}$$

យើងសន្មតថាវាពិតដល់លំដាប់ទី k គឺ $L_k=\frac{1}{4^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់លំដាប់ទី $(k+1)$ គឺ $L_{k+1}=\frac{1}{4^{k+1}}$

យើងមាន $L_{k+1}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}$

គុណភាគយកនិងភាគបែងនឹង $M(x)$ ដែល ៖

$$M(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}}+2$$

គេបាន $L_{k+1}=\lim_{x\to2}\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-4}{(x-2).M(x)}$

$$L_{k+1}=\lim_{x\to2}\frac{1}{M(x)}\times\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}$$

$$L_{k+1}=\frac{1}{M(2)}\times L_k=\frac{1}{4}L_k=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4^{k+1}}$$ ពិត

ដូចនេះ $$\boxed{L_n=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}=\frac{1}{4^n}}$$

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យសមភាព

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ ៖

គេមាន

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

តាមលំនាំឧទាហរណ៍យើងអាចទាញរករូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\dots\dots+\sqrt{2}}}}}_{(n)}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះ ៖

យើងតាង $A_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\dots+\sqrt{2}}}}}_{(n)}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

យើងមាន $A_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ

$$A_p=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\dots+\sqrt{2}}}}}_{(p)}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $A_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

យើងមាន $A_{p+1} = \sqrt{2+A_p}$ ដោយតាមការឧបមា $A_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងបាន $A_{p+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ ។

<u>ឧទាហរណ៍៣</u>

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \quad , n \in IN \end{cases}$$

ក.ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$

ហើយ $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1}=\sqrt{2+U_p}$ តែតាមការឧបមា $U_p=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n=U_0\times U_1\times U_2\times\dots\times U_n$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a=2\sin a\cos a$ នាំឲ្យ $2\cos a=\frac{\sin 2a}{\sin a}$

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}(U_k)=\prod_{k=0}^{n}(2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}})=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

ឧទាហរណ៍៤

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^2}}{2}}\ ,\ \forall n\in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ៖

យើងមាន $U_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$

$$U_1=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_0{}^2}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}{2}}=\sin\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p=\sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1}=\sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_p{}^2}}{2}}$

តែតាមការឧបមា $U_p=\sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}{2}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}{2}}=\sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

ឧទាហរណ៍៩

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = {u_n}^2 - 2 \quad , \forall n \in IN \quad , a > 2 \end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

បើ $n = 0$ គេបាន $u_0 = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} + \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} = a$ ពិត

ឧបមាវាពិតដល់តួទី k គឺ $u_k = \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k} + \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ៖

$$u_{k+1} = \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}$$

យើងមាន $u_{k+1} = {u_k}^2 - 2$

តែតាមការឧបមា $u_k = \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k} + \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}$

យើងបាន $$u_{k+1}=\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}\right]^2-2$$

$$u_{k+1}=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}+2\times\frac{a^2-a^2+4}{4}-2$$

$$u_{k+1}=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}$$ ពិត

ដូចនេះ $$u_n=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$ ។

VII_របៀបរកតួទូទៅនៃស៊ីតដោយប្រើស៊ីតជំនួយ

១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=a\,u_n+b$

២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2}=a\,u_{n+1}+bu_n$

៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2}=a\,u_{n+1}+bu_n+c$

៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+3}=au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n$

៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+3}=a\,u_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n+d$

៦_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$

៧_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=k\,.\,{u_n}^p$

៨_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = k \, . u_{n+1}^{\,p}\, u_n^{\,q}$

៩_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n^{\,2} + b\,u_n + c$

១០_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n^{\,2} + bu_n + c}{a'u_n + b'}$

១១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n^{\,2} + bu_n + c}{a'u_n^{\,2} + b'u_n + c'}$

១២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n^{\,3} + bu_n^{\,2} + cu_n + d}{a'u_n^{\,2} + b'u_n + c'}$

១៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n^{\,3} + bu_n^{\,2} + cu_n + d}{a'u_n^{\,3} + b'u_n^{\,2} + c'u_n + d'}$

១៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n + f(n)$

១៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + f(n)$

១៦_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + f(n)$

១៧_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$

១៨_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + p \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + q \end{cases}$

១៩_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n^{\,2} + bu_nv_n + cv_n^{\,2} \\ v_{n+1} = a'u_n^{\,2} + b'u_nv_n + c'v_n^{\,2} \end{cases}$

២០_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n^{\,3} + bu_n^{\,2}v_n + cu_nv_n^{\,2} + d\,v_n^{\,3} \\ v_{n+1} = a'u_n^{\,3} + b'u_n^{\,2}v_n + c'u_nv_n^{\,2} + d'v_n^{\,3} \end{cases}$$

២១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad ; \quad v_0 = \beta \\ u_{n+1} = u_n^{\,2} + d\,v_n^{\,2} \quad (d > 0) \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

២២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad ; \quad v_0 = \beta \\ u_{n+1} = u_n^{\,2} - d\,v_n^{\,2} \quad (d > 0) \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

២៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$x_0 = \alpha \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{x_n^{\,2} + d}{2x_n} \quad (d > 0)$$

២៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$x_0 = \alpha \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{x_n^{\,2} - d}{2x_n} \quad (d > 0)$$

២៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{f(n+1)}{[f(n)]^k} . u_n^{\,k} \end{cases}$$

✍ របៀបដោះស្រាយ

១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a u_n + b$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a u_n + b$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$ ($|a| \neq 1, a \neq 0$) ។

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវពិចារណាដូចខាងក្រោម ៖

☞ រកឬសសមីការ $r = a r + b$ (ហៅថាសមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត)

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n = u_n - r$ រួចត្រូវបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

☞ រកឱ្យឃើញនូវតួ V_n បន្ទាប់មកគេទាញ $u_n = V_n + r$ ។

ឧទាហរណ៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) មួយកំនត់លើសំណុំ IN^*

ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $u_1 = \dfrac{16}{3}$ និង $u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n + \dfrac{4}{3}$

ចំពោះគ្រប់ IN^* ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ស្វ៊ីត $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$ មានសមីការសំគាល់ $r=\frac{2}{3}r+\frac{4}{3}$

គេទាញឫស $r=4$

តាង $v_n=u_n-4$ ចំពោះគ្រប់ $IN*$

គេបាន $v_{n+1}=u_{n+1}-4$ ដោយ $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$

$$v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}-4$$

$$v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{8}{3}$$

$$v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n-4)$$

$$v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{2}{3}$

និងតួ $v_1=u_1-4=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$

តាមរូបមន្ត $v_n=v_1\times q^{n-1}=\frac{4}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

ដោយ $v_n=u_n-4$ នាំឱ្យ $u_n=v_n+4$

ដូចនេះ $v_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+4$ ។

អនុវត្តន៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) មួយកំនត់លើសំណុំ IN^*

ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $u_1 = 5$ និង $u_{n+1} = 3u_n - 2$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវពិចារណាសមីការ $r^2 = a\,r + b$

ឬ $(E): r^2 - a\,.r - b = 0$ (ហៅថាសមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីតនេះ)

គេត្រូវសិក្សាករណីផ្សេងៗដូចខាងក្រោម ៖

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b > 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត r_1 និង r_2 ។

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

_តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ

$x_n = u_{n+1} - r_1\,u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - r_2\,u_n$

_រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n)

រួចគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឧបមាថាគេបាន $x_n = f(n)$ និង $y_n = g(n)$

- យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_{n+1} - r_1 u_n = f(n) \\ u_{n+1} - r_2 u_n = g(n) \end{cases}$

- ដោះស្រាយរក u_n គេទទួលបាន $u_n = \dfrac{f(n) - g(n)}{r_2 - r_1}$ ។

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b = 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឬសឌុប $r_1 = r_2 = r_0$

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n = u_{n+1} - r_0 u_n$ រួចរកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (V_n) និងគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។ ឧបមាថា $V_n = f(n)$ ។

- គេទាញបានសមីការ $u_{n+1} - r_0 u_n = f(n)$

រួចត្រូវបំលែងជាទម្រង់ ៖

$\dfrac{u_{n+1}}{r_0^{\,n+1}} - \dfrac{u_n}{r_0^{\,n}} = \dfrac{f(n)}{r_0^{\,n+1}}$ (ចែកសមីការនឹង $r_0^{\,n+1}$)

- ទាញឱ្យបាន $u_n = r_0^{\,n}\left[\dfrac{u_1}{r_0} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left[\dfrac{f(k)}{r_0^{\,k+1}}\right]\right]$ ។

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b < 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឬសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

គឺ $r_1 = p + i.q$, $r_2 = p - i.q$, $p, q \in IR$ ។

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $Z_n = u_{n+1} - (p + i.q)u_n$ រួចត្រូវស្រាយថា (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

រួចគណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

- ឧបមាថា $Z_n = A_n + i.B_n$; $A_n , B_n \in IR$, $n \in IN^*$ ។
- គេបានសមីការ $u_{n+1} - (p + iq)\, u_n = A_n + i.B_n$
- ទាញឱ្យបានថា $u_n = -\dfrac{B_n}{q}$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 5 \ , \ u_2 = 13 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \ , \forall n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

គឺ $r^2 = 5r - 6$ ឬ $r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$ មានឫស $r_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, $r_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

តាងស្វ៊ីជំនួយពីរ $\begin{cases} x_n = u_{n+1} - 2u_n \\ y_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} \\ y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1} \\ y_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n) \\ y_{n+1} = 2(u_{n+1} - 3u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n \\ y_{n+1} = 2y_n \end{cases}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (x_n) និង (y_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងរៀងគ្នា $q_1 = 3$ និង $q_2 = 2$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $\begin{cases} x_n = x_1 \times {q_1}^{n-1} \\ y_n = y_1 \times {q_2}^{n-1} \end{cases}$

ដោយ $\begin{cases} x_1 = u_2 - 2u_1 = 13 - 10 = 3 \\ y_1 = u_2 - 3u_1 = 13 - 15 = -2 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_n = 3.3^{n-1} = 3^n \\ y_n = -2.2^{n-1} = -2^n \end{cases}$ ដោយ $\begin{cases} x_n = u_{n+1} - 2u_n \\ y_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n = 3^n & (1) \\ u_{n+1} - 3u_n = -2^n & (2) \end{cases}$

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $u_n = 2^n + 3^n$

ដូចនេះ $u_n = 2^n + 3^n$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ , \ u_2 = 6 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \ , \forall n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

គឺ $r^2 = 4r - 4$ ឬ $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta' = 4 - 4 = 0$ សមីការមានឬសឌុប $r_1 = r_2 = 2$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ នាំឱ្យ $v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1}$

$v_{n+1} = 4u_{n+1} - 4u_n - 2u_{n+1}$

$v_{n+1} = 2(u_{n+1} - 2u_n)$

$v_{n+1} = 2\ v_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និង តួ $v_1 = u_2 - 2u_1 = 6 - 2 = 4$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

ដោយ $v_n = u_{n+1} - 2u_n$

គេទាញ $u_{n+1} - 2u_n = 2^{n+1}$ ឬ $\dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{u_n}{2^n} = 1$

យក $w_n = \frac{u_n}{2^n}$ គេបាន $w_{n+1} - w_n = 1$

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$ និងតួ $w_1 = \frac{u_1}{2} = \frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $w_n = w_1 + (n-1)d = \frac{1}{2} + (n-1).(1) = n - \frac{1}{2}$

ដោយ $w_n = \frac{u_n}{2^n}$ គេទាញ $u_n = (n - \frac{1}{2}).2^n$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 0 \quad , \; u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

គឺ $r^2 = 2r - 2$ ឬ $r^2 - 2r + 2 = 0$

$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$ មានឫស $r_1 = 1 - i \;\; , \; r_2 = 1 + i$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $Z_n = u_{n+1} - (1-i)u_n$

គេបាន $Z_{n+1} = u_{n+2} - (1-i)u_{n+1}$ ដោយ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

$$Z_{n+1} = 2u_{n+1} - 2u_n - (1-i)u_{n+1}$$
$$Z_{n+1} = (1+i)u_{n+1} - 2u_n$$
$$Z_{n+1} = (1+i)\left(u_{n+1} - \frac{2}{1+i}u_n \right)$$
$$Z_{n+1} = (1+i)\left[u_{n+1} - (1-i)u_n\right]$$
$$Z_{n+1} = (1+i)\,Z_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (Z_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

មានរេសុង $q = 1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})$

និងតួ $Z_1 = u_2 - (1-i)u_1 = 1$

តាមរូបមន្ត $Z_n = Z_1 \times {q_1}^{n-1} = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})\right]^{n-1}$

$$Z_n = (\sqrt{2}\,)^{n-1}\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{4} + i.\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right] \quad (1)$$

ដោយ $Z_n = u_{n+1} - (1-i)u_n = (u_{n+1} - u_n) + i.u_n \quad (2)$

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន $u_n = (\sqrt{2}\,)^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n = (\sqrt{2}\,)^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}$ ។

៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + c$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ ។

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $w_n = u_n + \lambda$

☞ គេបាន $u_n = w_n - \lambda$, $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$, $u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$

☞ យក u_n , u_{n+1} , u_{n+2} ជំនួសក្នុង $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + c$

គេបានសមីការ ៖

$$w_{n+2} - \lambda = a(w_{n+1} - \lambda) + b(w_n - \lambda) + c$$

$$w_{n+2} = a\ w_{n+1} + b\,w_n + (1 - a - b)\lambda + c$$

☞ ត្រូវឱ្យ $(1 - a - b)\lambda + c = 0$ គេទាញបាន $\lambda = \dfrac{c}{a + b - 1}$

(ដែល $a + b \neq 1$) ។

☞ ក្នុងករណីនេះគេបានទំនាក់ទំនងកំណើន

$$w_{n+2} = a\ w_{n+1} + b\ w_n$$

☞ ដោះស្រាយរកតួ w_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចហើយ

ខាងលើ បន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n = w_n - \lambda = w_n - \dfrac{c}{a + b - 1}$

<u>ឧទាហរណ៍</u>

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 2 \ \ ,\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n + 12 \ ,\ \forall n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_{n+2}=7u_{n+1}-10u_n+12 \quad (1)$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=u_n+k$ ឬ $u_n=v_n-k$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ ៖

$$v_{n+2}-k=7(v_{n+1}-k)-10(v_n-k)+12$$

$$v_{n+2}=7v_{n+1}-10v_n+(4k+12) \quad (2)$$

បើ $4k+12=0$ គេបាន $k=-3$

ទំនាក់ទំនង (2) ក្លាយជា $v_{n+2}=7v_{n+1}-12v_n$

មានសមីការសំគាល់ $r^2=7r-12$ ឬ $r^2-7r+12=0$

$\Delta=49-48=1$ គេទាញឬស $r_1=\dfrac{7-1}{2}=3$, $r_2=\dfrac{7+1}{2}=4$

តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $\begin{cases} x_n=v_{n+1}-3v_n \\ y_n=v_{n+1}-4v_n \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_{n+1}=v_{n+2}-3v_{n+1} \\ y_{n+1}=v_{n+2}-4v_{n+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_{n+1}=7v_{n+1}-12v_n-3v_{n+1} \\ y_{n+1}=7v_{n+1}-12v_n-4v_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=4(v_{n+1}-3v_n) \\ y_{n+1}=3(v_{n+1}-4v_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=4x_n \\ y_{n+1}=3y_n \end{cases}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (x_n) និង (y_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងរៀងគ្នា $q_1=4$ និង $q_2=3$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $\begin{cases} x_n = x_1 \times q_1^{n-1} \\ y_n = y_1 \times q_2^{n-1} \end{cases}$

ដោយ $\begin{cases} x_1 = v_2 - 3v_1 = (4-3) - 3(2-3) = 4 \\ y_1 = v_2 - 4v_1 = (4-3) - 4(2-3) = 5 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_n = 4.4^{n-1} \\ y_n = 5.3^{n-1} \end{cases}$ ដោយ $\begin{cases} x_n = v_{n+1} - 3v_n \\ y_n = v_{n+1} - 4v_n \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} v_{n+1} - 3v_n = \quad 4^n & (1) \\ v_{n+1} - 4v_n = 5.3^{n-1} & (2) \end{cases}$

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $v_n = 4^n - 5.3^{n-1}$

ដោយ $u_n = v_n - k = v_n + 3$

ដូចនេះ $u_n = 4^n - 5.3^{n-1} + 3$ ។

៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង
កំណើន $u_{n+3} = a\,u_{n+2} + b\ u_{n+1} + cu_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$
និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ និង $u_3 = \gamma$ ។ ដើម្បីគណនា u_n
គេត្រូវពិចារណាសមីការ ៖

$q^3 = a\,q^2 + b\,q + c$ ឬ $q^3 - aq^2 - bq - c = 0$

(ហៅថាសមីការសំគាល់នៃស្វីត) ។

☞ បើសមីការ (E) មានឫសបីផ្សេងគ្នាគឺ q_1 , q_2 , q_3 ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ

- តាងស្វ៊ីតជំនួយបី $\begin{cases} x_n = u_{n+2} + \lambda_1 u_{n+1} + \mu_1 u_n \\ y_n = u_{n+2} + \lambda_2 u_{n+1} + \mu_2 u_n \\ z_n = u_{n+2} + \lambda_3 u_{n+1} + \mu_3 u_n \end{cases}$

ដែល $\lambda_i = q_i - a$ និង $\mu_i = \lambda_i q_i - b$ (ឬ $\mu_i = \dfrac{c}{q_i}$)

ហើយ $i = 1 , 2 , 3$ ។

- ត្រូវរកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (x_n) ,(y_n) , (z_n) រួចគណនា x_n , y_n , z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឧបមាថា $x_n = f(n)$, $y_n = g(n)$, $z_n = h(n)$

- គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} u_{n+2} + \lambda_1 u_{n+1} + \mu_1 u_n = f(n) \\ u_{n+2} + \lambda_2 u_{n+1} + \mu_2 u_n = g(n) \\ u_{n+2} + \lambda_3 u_{n+1} + \mu_3 u_n = h(n) \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបានចម្លើយដូចខាងក្រោម ៖

$$u_n = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & f(n) - g(n) \\ \lambda_1 - \lambda_3 & f(n) - h(n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \mu_1 - \mu_2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & \mu_1 - \mu_3 \end{vmatrix}} \quad ។$$

☞ បើសមីការ (E) មានឫសឌុប $q_1 = q_2 = q_3 = q_0$

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ ៖

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_{n+2} + \lambda_0\, u_{n+1} + \mu_0\, u_n$

ដែល $\lambda_0 = q_0 - a$ និង $\mu_0 = \lambda_0\, q_0 - b$ ។

- ត្រូវរកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (v_n) រួចគណនា $v_n = f(n)$

- យើងបានទំនាក់ទំនងកំណើន ៖

$$u_{n+2} + \lambda_0 u_{n+1} + \mu_0 u_n = f(n) \quad (1)$$

- ត្រូវរកអនុគមន៍ $g(n)$ មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$$g(n+2) + \lambda_0\, g(n+1) + \mu_0\, g(n) = f(n) \qquad (2)$$

- ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$[u_{n+2} - g(n+2)] + \lambda_0\,[u_{n+1} - g(n+1)] + \mu_0\,[u_n - g(n)] = 0 \quad (3)$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយថ្មីមួយទៀត $w_n = u_n - g(n)$

គេបាន $\begin{cases} w_{n+1} = u_{n+1} - g(n+1) \\ w_{n+2} = u_{n+2} - g(n+2) \end{cases}$

- ទំនាក់ទំនង (3) អាចសរសេរ $w_{n+2} + \lambda_0 w_{n+1} + \mu_0 w_n = 0$

គេទាញ $w_{n+2} = -\lambda_0 w_{n+1} - \mu_0 w_n$ ។

- ដោះស្រាយរក w_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចមកហើយ

បន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n = w_n + g(n)$ ។

☞ បើសមីការ (E) មានឫស $q_1 = q_2 = q_0$, $q_3 = r_0$ $(r_0 \neq q_0)$

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ ៖

- តាងស៊ីតជំនួយពីរ $\begin{cases} v_n = u_{n+2} + \lambda_0 u_{n+1} + \mu_0 u_n \\ w_n = u_{n+2} + \lambda'_0\, u_{n+1} + \mu'_0\, u_n \end{cases}$

ដែល $\lambda_0 = q_0 - a$, $\mu_0 = \lambda_0 q_0 - b$

និង $\lambda'_0 = r_0 - a$, $\mu'_0 = \lambda'_0\, r_0 - b$

- រកប្រភេទនៃស៊ីត $(v_n)\,,(w_n)$ រួចគណនាតួ v_n និង w_n

សន្មតថា $v_n = f(n)$, $w_n = g(n)$ ។

- គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_{n+2} + \lambda_0 u_{n+1} + \mu_0 u_n = f(n) & (1) \\ u_{n+2} + \lambda'_0\, u_{n+1} + \mu'_0\, u_n = g(n) & (2) \end{cases}$

- ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$(\lambda_0 - \lambda'_0)\, u_{n+1} + (\mu_0 - \mu'_0)\, u_n = f(n) - g(n) \quad (3)$$

- ត្រូវរកអនុគមន៍ $h(n)$ មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$$(\lambda_0 - \lambda_0')\,h(n+1) + (\mu_0 - \mu'_0)\,h(n) = f(n) - g(n) \quad (4)$$

- ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន ៖

$$(\lambda_0 - \lambda'_0)\left[u_{n+1} - h(n+1)\right] + (\mu_0 - \mu'_0)\left[u_n - h(n)\right] = 0 \quad (5)$$

- តាងស៊ីតជំនួយ $G_n = u_n - h(n)$

- តាម (5) គេបាន $(\lambda_0 - \lambda'_0)G_{n+1} + (\mu_0 - \mu'_0)\, G_n = 0$

គេទាញបាន $G_{n+1} = -\dfrac{\mu_0 - \mu_0'}{\lambda_0 - \lambda'_0}\, G_n$ នាំឱ្យ $G_n = G_1 \times \left(-\dfrac{\mu_0 - \mu'_0}{\lambda_0 - \lambda'_0}\right)^{n-1}$

- ដូចនេះគេបាន $u_n = G_n + h(n)$ ដែល $G_n = G_1 \times \left(-\dfrac{\mu_0 - \mu'_0}{\lambda_0 - \lambda'_0}\right)^{n-1}$

ឧទាហរណ៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 9 \ , \ u_2 = 29 \ , \ u_3 = 99 \\ u_{n+3} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n \ , \forall n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+3} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n$

គឺ $q^3 = 9q^2 - 26q + 24$ ឬ $q^3 - 9q^2 + 26q - 24 = 0$

ឬ $(q-2)(q-3)(q-4) = 0$ មានឫស $q_1 = 2 , q_2 = 3 \ , \ q_3 = 4$ ។

តាមរូបមន្ត $\lambda_i = q_i - a = q_i - 9 \ , \ \mu_i = \dfrac{c}{q_i} = \dfrac{24}{q_i}$

ចំពោះ $q = \{ 2 , 3 , 4 \}$

គេបាន $\lambda = \{-7 , -6 , -5 \} ; \ \mu = \{ 12 , 8 , 6 \}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n = u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n \\ y_n = u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n \\ z_n = u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+3} - 7u_{n+2} + 12u_{n+1} \\ y_{n+1} = u_{n+3} - 6u_{n+2} + 8u_{n+1} \\ z_{n+1} = u_{n+3} - 5u_{n+2} + 6u_{n+1} \end{cases}$

ដោយ $u_{n+3} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n - 7u_{n+2} + 12u_{n+1} \\ y_{n+1} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n - 6u_{n+2} + 8u_{n+1} \\ z_{n+1} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n - 5u_{n+2} + 6u_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2u_{n+2} - 14u_{n+1} + 24u_n \\ y_{n+1} = 3u_{n+2} - 18u_{n+1} + 24u_n \\ z_{n+1} = 4u_{n+2} - 20u_{n+1} + 24u_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = 3y_n \\ z_{n+1} = 4z_n \end{cases}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (x_n) , (y_n) , (z_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងរៀងគ្នា $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 4$ ។

តាមរូបមន្ត $\begin{cases} x_n = x_1 \times q_1{}^{n-1} \\ y_n = y_1 \times q_2{}^{n-1} \\ z_n = z_1 \times q_3{}^{n-1} \end{cases}$

ដោយ $\begin{cases} x_1 = u_3 - 7u_2 + 12u_1 = 99 - 7(29) + 12(9) = 4 \\ y_1 = u_3 - 6u_2 + 8u_1 = 99 - 6(29) + 8(9) = -3 \\ z_1 = u_3 - 5u_2 + 6u_1 = 99 - 5(29) + 6(9) = 8 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1} \\ y_n = -3 \times 3^{n-1} = -3^n \\ z_n = 8 \times 4^{n-1} = 2.4^n \end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases} u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n = 2^{n+1} & (1) \\ u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n = -3^n & (2) \\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2.4^n & (3) \end{cases}$

ដកសមីការ (1) និង(2) គេបាន $-u_{n+1} + 4u_n = 2^{n+1} + 3^n$ (4)

ដកសមីការ (2) និង (3) គេបាន $-u_{n+1} + 2u_n = -3^n - 2.4^n$ (5)

ដកសមីការ (4) និង (5) គេបាន $2u_n = 2^{n+1} + 2.3^n + 2.4^n$

គេទាញ $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 2.3^n + 2.4^n}{2} = 2^n + 3^n + 4^n$

ដូចនេះ $u_n = 2^n + 3^n + 4^n$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$\begin{cases} u_1 = 0 \ , \ u_2 = 1 \ , \ u_3 = 6 \\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n \ , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n$

គឺ $q^3 = 6q^2 - 12q + 8$ ឬ $q^3 - 6q^2 + 12q - 8 = 0$

ឬ $(q-2)^3 = 0$ គេទាញឫសឌុប $q_1 = q_2 = q_3 = q_0 = 2$

គណនា $\lambda = q_0 - a = 2 - 6 = -4$ និង $\mu = \frac{c}{q_0} = \frac{8}{2} = 4$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+3} - 4u_{n+2} + 4u_{n+1}$

ដោយ $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n$

$$v_{n+1} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n - 4u_{n+2} + 4u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = 2u_{n+2} - 8u_{n+1} + 8u_n$$

$$v_{n+1} = 2v_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និងតួ $v_1 = u_3 - 4u_2 + 4u_1 = 6 - 4 + 0 = 2$ ។

យើងបាន $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

ដោយ $v_n = u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n$

គេទាញ $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^n$

$$(u_{n+2} - 2u_{n+1}) - 2(u_{n+1} - 2u_n) = 2^n$$

$$\frac{u_{n+2} - 2u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{u_{n+1} - 2u_n}{2^n} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

តាង $w_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

តាម (1) គេបាន $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2}$

នាំឱ្យ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = \frac{1}{2}$

និង $w_1 = \frac{u_2 - 2u_1}{2} = \frac{1}{2}$

គេបាន $w_n = w_1 + (n-1)d = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

គេទាញ $\frac{u_{n+1} - 2u_n}{2^n} = \frac{n}{2}$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n} = \frac{n}{4}$

យើងបាន $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{u_k}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{4}\right)$

$\frac{u_n}{2^n} - \frac{u_1}{2} = \frac{(n-1)n}{8}$ ដោយ $u_1 = 0$

ដូចនេះ $u_n = (n-1)n.2^{n-3}$ ។

៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+3} = a\,u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + d$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+3} = a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + cu_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ និង $u_3 = \gamma$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ តាងស៊ីតជំនួយ $w_n = u_n + \lambda$

☞ គេបាន

$u_n = w_n - \lambda$, $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$, $u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$,

$u_{n+3} = w_{n+3} - \lambda$

☞ យក u_n , u_{n+1} , u_{n+2} , u_{n+3}

ជំនួសក្នុង $u_{n+3} = a\,u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + d$

គេបានសមីការ ៖

$$w_{n+3}-\lambda = a\,(w_{n+2}-\lambda)+b\,(w_{n+1}-\lambda)+c\,(w_n-\lambda)+d$$
$$w_{n+3}=a\,w_{n+2}+b\,w_{n+1}+c\,w_n+(1-a-b-c)\,\lambda+d$$

☞ ត្រូវឱ្យ $(1-a-b-c)\,\lambda+d=0$ ឬ $\lambda=\dfrac{d}{a+b+c-1}$

ហើយ $a+b+c\neq 1$ ។

☞ ក្នុងករណីនេះគេបានទំនាក់ទំនងកំណើន

$$w_{n+3}=a\,w_{n+2}+b\,w_{n+1}+c\,w_n$$

☞ ដោះស្រាយរកតួ w_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចហើយ

ខាងលើបន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n=w_n-\lambda=w_n-\dfrac{d}{a+b+c-1}$ ។

<u>ឧទាហរណ៍១</u>

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1=13\ ,\ u_2=33\ ,\ u_3=103 \\ u_{n+3}=9u_{n+2}-26u_{n+1}+24u_n-28\ ,\ \forall n\in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $u_n=w_n-\lambda$

ដោយ $u_{n+3}=9u_{n+2}-26u_{n+1}+24u_n-28$

គេបាន $w_{n+3}=9(w_{n+2}-\lambda)-26(w_{n+1}-\lambda)+24(w_n-\lambda)-28$

$$w_{n+3}=9w_{n+2}-26w_{n+1}+24w_n-7\lambda-28$$

បើ $-7\lambda-28=0$ នោះ $\lambda=-4$

គេបាន $w_{n+3}=9w_{n+2}-26w_{n+1}+24w_n$ (*)

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត (*) គឺ $q^3=9q^2-26q+24$

ឬ $q^3-9q^2+26q-24=0$

ឬ $(q-2)(q-3)(q-4)=0$

មានឫស $q_1=2$, $q_2=3$, $q_3=4$ ។

តាមរូបមន្ត $\lambda_i=q_i-a=q_i-9$, $\mu_i=\dfrac{c}{q_i}=\dfrac{24}{q_i}$

ចំពោះ $q=\{\,2\,,3\,,4\,\}$

គេបាន $\lambda=\{-7\,,-6\,,-5\,\}$; $\mu=\{\,12\,,8\,,\,6\,\}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n=w_{n+2}-7w_{n+1}+12w_n \\ y_n=w_{n+2}-6w_{n+1}+8w_n \\ z_n=w_{n+2}-5w_{n+1}+6w_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_{n+1}=w_{n+3}-7w_{n+2}+12w_{n+1} \\ y_{n+1}=w_{n+3}-6w_{n+2}+8w_{n+1} \\ z_{n+1}=w_{n+3}-5w_{n+2}+6w_{n+1} \end{cases}$

ដោយ $w_{n+3}=9u_{n+2}-26w_{n+1}+24w_n$

$$\begin{cases} x_{n+1}=9w_{n+2}-26w_{n+1}+24w_n-7w_{n+2}+12w_{n+1} \\ y_{n+1}=9w_{n+2}-26w_{n+1}+24w_n-6w_{n+2}+8w_{n+1} \\ z_{n+1}=9w_{n+2}-26w_{n+1}+2w_n-5w_{n+2}+6w_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2w_{n+2} - 14w_{n+1} + 24w_n \\ y_{n+1} = 3w_{n+2} - 18w_{n+1} + 24w_n \\ z_{n+1} = 4w_{n+2} - 20w_{n+1} + 24w_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = 3y_n \\ z_{n+1} = 4z_n \end{cases}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (x_n) , (y_n) , (z_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងរៀងគ្នា $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 4$ ។

តាមរូបមន្ត $\begin{cases} x_n = x_1 \times {q_1}^{n-1} \\ y_n = y_1 \times {q_2}^{n-1} \\ z_n = z_1 \times {q_3}^{n-1} \end{cases}$

ដោយ $\begin{cases} x_1 = w_3 - 7w_2 + 12w_1 \\ y_1 = w_3 - 6w_2 + 8w_1 \\ z_1 = w_3 - 5w_2 + 6w_1 \end{cases}$ ហើយ $\begin{cases} w_1 = u_1 - 4 = 13 - 4 = 9 \\ w_2 = u_2 - 4 = 33 - 4 = 29 \\ w_3 = u_3 - 4 = 103 - 4 = 99 \end{cases}$

នោះ $\begin{cases} x_1 = 99 - 7(29) + 12(9) = 4 \\ y_1 = 99 - 6(29) + 8(9) = -3 \\ z_1 = 99 - 5(29) + 6(9) = 8 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1} \\ y_n = -3 \times 3^{n-1} = -3^n \\ z_n = 8 \times 4^{n-1} = 2.4^n \end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases} w_{n+2} - 7w_{n+1} + 12w_n = 2^{n+1} & (1) \\ w_{n+2} - 6w_{n+1} + 8w_n = -3^n & (2) \\ w_{n+2} - 5w_{n+1} + 6w_n = 2.4^n & (3) \end{cases}$

ដកសមីការ (1) និង(2) គេបាន $-w_{n+1} + 4w_n = 2^{n+1} + 3^n \quad (4)$

ដកសមីការ (2) និង (3) គេបាន $-w_{n+1} + 2w_n = -3^n - 2.4^n \quad (5)$

ដកសមីការ (4) និង (5) គេបាន $2w_n = 2^{n+1} + 2.3^n + 2.4^n$

គេទាញ $w_n = \dfrac{2^{n+1} + 2.3^n + 2.4^n}{2} = 2^n + 3^n + 4^n$

ដោយ $u_n = w_n - \lambda = w_n + 4$

ដូចនេះ $u_n = 2^n + 3^n + 4^n + 4$ ។

៦_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង កំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ និងតួ $u_1 = \alpha$ ។ ដើម្បីគណនាតួ u_n គេត្រូវពិចារណាសមីការ

$r = \dfrac{ar + b}{cr + d}$ ឬ $cr^2 + (d - a)r - b = 0 \quad (E)$

☞ បើសមីការ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា r_1 និង r_2

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ ៖

_តាងស៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$ រួចស្រាយថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

-គណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

☞ បើសមីការ (E) មានឬសឌុប $r_1 = r_2 = r_0$

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ

-តាងស៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{1}{u_n - r_0}$ រួចត្រូវស្រាយថា (v_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត

-គណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

ឧទាហរណ៍១

គេពិនិត្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{2u_n - 1} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

សមីការសំគាល់នៃស៊ីត $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{2u_n - 1}$ គឺ $r = \dfrac{5r - 4}{2r - 1}$

ឬ $2r^2 - 6r + 4 = 0$ មានឬស $r_1 = 1$; $r_2 = \dfrac{c}{a} = 2$

តាងស៊ីត $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{\dfrac{5u_n - 4}{2u_n - 1} - 1}{\dfrac{5u_n - 4}{2u_n - 1} - 2} = 3\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}\right) = 3\, v_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួ $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 - 2} = \dfrac{3}{2}$ ។ តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{3^n}{2}$

ដោយ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ គេទាញ $u_n = \dfrac{2v_n - 1}{v_n - 1} = \dfrac{3^n - 1}{\dfrac{3^n}{2} - 1}$

ដូចនេះ $v_n = \dfrac{2(3^n - 1)}{3^n - 2}$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n - 1} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n - 1}$ គឺ $r = \dfrac{3r - 4}{r - 1}$

ឬ $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$ គេទាញឫស $r_1 = r_2 = 2$ ។

តាងស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2}$ ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n - 1}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{3u_n - 4 - 2u_n + 2} = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$

គេមាន $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-1}{u_n-2}-\frac{1}{u_n-2}=1$ ថេរ

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=1$ និងតួ $v_1=1$

តាមរូបមន្ត $v_n=v_1+(n-1)d=1+n-1=n$

ដោយ $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ គេទាញ $u_n=2+\frac{1}{v_n}=2+\frac{1}{n}=\frac{2n+1}{n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{2n+1}{n}$ ។

៧_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=k\,.\,{u_n}^p$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង កំណើន $u_{n+1}=k\,.\,{u_n}^p$ និងតួ $u_1=\alpha$ ដែល $k>0\ ,\alpha>0$ ។ ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ បំពាក់លោការីតនេពែលើអង្គទាំងពីរនៃ $u_{n+1}=k\,.\,{u_n}^p$

គេបាន $\ln u_{n+1}=p\ln u_n+\ln k$

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\ln u_n$

គេបាន $v_{n+1}=p\,v_n+\ln k$

☞ ដោះស្រាយរកតួ v_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចហើយខាងលើបន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n=e^{v_n}$ ដែល $e=2,71828...$ ។

ឧទាហរណ៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad , \; n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

គេបាន $\ln u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $(\ln u_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $\ln u_n = \ln u_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \ln 4 = \ln(4)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$

ដូចនេះ $u_n = (4)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$ ។

៨_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = k \, . \, u_{n+1}{}^{p} \, u_n{}^{q}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

កំណើន $u_{n+1} = k \, . \, u_{n+1}{}^{p} \, u_n{}^{q}$ និងតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$

ដែល $k > 0 \, , \alpha > 0 \, , \beta > 0$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ បំពាក់លោការីតនេពៃលើអង្គទាំងពីរនៃ $u_{n+1} = k \,.\, {u_{n+1}}^{p}\, {u_n}^{q}$

គេបាន $\ln u_{n+1} = p \ln u_{n+1} + q \ln u_n + \ln k$

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \ln u_n$

គេបាន $v_{n+1} = p v_{n+1} + q \ln v_n + \ln k$

☞ ដោះស្រាយរកតួ v_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចហើយខាងលើបន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n = e^{v_n}$ ដែល $e = 2,71828...$ ។

ឧទាហរណ៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \,,\; u_2 = 4 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

យើងបាន $\ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_n u_{n+1}})$

$$\ln u_{n+2} = \frac{1}{2}\ln u_{n+1} + \frac{1}{2}\ln u_n$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \ln u_n$

គេបាន $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}$ ឬ $2r^2 - r - 1 = 0$

មានឬស $r_1 = 1$; $r_2 = -\frac{1}{2}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n = v_{n+1} - v_n \\ y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{1}{2} v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n - v_{n+1} \\ y_{n+1} = v_{n+2} + \frac{1}{2} v_{n+1} = \frac{1}{2} v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2} v_{n+1} \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n) \\ y_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2} x_n \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_n = x_0 \times (-\frac{1}{2})^n \\ y_n = y_0 \end{cases}$

ដោយ $x_0 = v_1 - v_0 = \ln(\frac{u_1}{u_0}) = \ln 4$

និង $y_0 = v_1 + \frac{1}{2} v_0 = \ln u_1 + \frac{1}{2} \ln u_0 = \ln 4$

គេទាញ $\begin{cases} x_n = (-\frac{1}{2})^n \ln 4 \\ y_n = \ln 4 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} v_{n+1} - v_n = (-\frac{1}{2})^n \ln 4 \\ v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n = \ln 4 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $v_n = \frac{2}{3}\left[1 - (-\frac{1}{2})^n\right] \ln 4$ ដោយ $v_n = \ln u_n$

ដូចនេះ $u_n = (4)^{\frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}$ ។

៩_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n^{\,2} + b\,u_n + c$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

កំណើន $u_{n+1} = a\,u_n^{\,2} + b\,u_n + c$ និងតួ $u_1 = \alpha$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ បំលែងទំនាក់ទំនងកំណើនជាទម្រង់ ៖

$$u_{n+1} = a\left[(u_n + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$u_{n+1} = a\,(u_n + \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2-4ac}{4a}$$

☞ បើតម្លៃ $\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{b}{2a}$ នោះគេបាន ៖

$$u_{n+1} = a\left(u_n + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{2a}$$

$$(u_{n+1} + \frac{b}{2a}) = a\left(u_n + \frac{b}{2a}\right)^2$$

☞ តាងស៊ីតជំនួយ $v_n = u_n + \frac{b}{2a}$

គេបានទំនាក់ទំនង $v_{n+1} = a\,v_n^{\,2}$

☞ ដោះស្រាយរកតួ v_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចហើយ

ខាងលើបន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n = v_n - \frac{b}{2a}$ ។

☞ បើតម្លៃ $\frac{b^2-4ac}{4a} \neq -\frac{b}{2a}$ នោះគេមិនអាចគណនា u_n តាមរបៀបនេះបានទេ ។

ឧទាហរណ៍

គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 4u_n + 6 \quad , n \in IN \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គេមាន $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$

$u_{n+1} - 2 = (u_n - 2)^2$ តាង $V_n = u_n - 2$

គេបាន $V_{n+1} = V_n^{\ 2}$ នាំឱ្យ $\ln(V_{n+1}) = 2\ln(V_n)$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln V_n\}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ ។

គេបាន $\ln(V_n) = 2^n \ln(V_0)$ នាំឱ្យ $V_n = V_0^{\ 2^n}$

ដោយ $V_0 = u_0 - 2 = 4 - 2 = 2$ នោះ $V_n = 2^{2^n}$

តាម $V_n = u_n - 2$ គេទាញ $u_n = V_n + 2$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^n} + 2$ ។

១០_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \frac{au_n^{\ 2} + bu_n + c}{a' u_n + b'}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

កំណើន $u_{n+1}=\dfrac{au_n^2+bu_n+c}{a'u_n+b'}$ និងតួ $u_1=\alpha$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ ពិចារណាសមីការ $r=\dfrac{ar^2+br+c}{a'r+b'}$

ឬ $(a-a')r^2+(b-b')r+c=0$ (E)

☞ បើសមីការ (E) មានឫសពីរ r_1 និង r_2

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ ៖

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\dfrac{u_n-r_1}{u_n-r_2}$
- រកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n
  គេនឹងបាន $v_{n+1}=k.v_n^2$ (បើមាន)
- គណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

✍ **សំគាល់**

វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយនេះមិនមានលក្ខណះជាទូទៅចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{au_n^2+bu_n+c}{a'u_n+b'}$ ទាំងអស់ទេ គឺអាចអនុវត្តន៍បានតែក្នុងករណីពិសេសដែលបានសិក្សាខាងលើនេះតែប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} - 6}{2u_n - 5} \quad , n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេពិចារណាសមីការ $r = \dfrac{r^2 - 6}{2r - 5}$ ឬ $r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$ គេទាញឫស $r_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \ ; r_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$

គេបាន $V_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 3} = \dfrac{\dfrac{u_n^{\ 2} - 6}{2u_n - 5} - 2}{\dfrac{u_n^{\ 2} - 6}{2u_n - 5} - 3} = \dfrac{u_n^{\ 2} - 4u_n + 4}{u_n^{\ 2} - 6u_n + 9}$

$$V_{n+1} = \left(\frac{u_n - 2}{u_n - 3} \right)^2 = V_n^{\ 2}$$

គេទាញ $\ln V_{n+1} = 2 \ln V_n$ នាំឱ្យ $\{ \ln V_n \}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ ។

គេបាន $\ln V_n = 2^n \ln V_0$ នោះ $V_n = V_0^{\ 2^n}$ ដោយ $V_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 - 3} = 2$

ហេតុនេះ $V_n = 2^{2^n}$ ។

គេមាន $V_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$ នាំឱ្យ $u_n = \dfrac{3V_n - 2}{V_n - 1}$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{3.2^{2^n} - 2}{2^{2^n} - 1}$ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2 + 4}{2u_n - 3} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{2u_n + 1} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍៣

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2 - 5}{2(u_n - 3)} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{au_n^{\,2}+bu_n+c}{a'u_n^{\,2}+b'u_n+c'}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

កំណើន $u_{n+1}=\dfrac{au_n^{\,2}+bu_n+c}{a'u_n^{\,2}+b'u_n+c'}$ និងតួ $u_1=\alpha$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ ពិចារណាសមីការ $r=\dfrac{ar^2+br+c}{a'r^2+b'r+c'}$

ឬ $a'r^3+(b'-a)r^2+(c'-b)r-c=0 \quad (E)$

☞ បើសមីការ (E) មានឬស r_1 , r_2 , r_3

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ ៖

-តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\dfrac{u_n-r_i}{u_n-r_j}$

ដែល $i=1 , 2 , 3$ និង $j=1 , 2 , 3$ ($i\neq j$)

-រកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n

(បើមាន) គេនឹងបាន $v_{n+1}=k.v_n^{\,3}$

-គណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

✍ **សំគាល់**

វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយនេះមិនមានលក្ខណះជាទូទៅចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{a{u_n}^2+bu_n+c}{a'{u_n}^2+b'u_n+c'}$ ទាំងអស់ទេ គឺអាចអនុវត្តន៍បានតែក្នុងករណីពិសេសដែលបានសិក្សាខាងលើនេះតែប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{9{u_n}^2-14u_n+9}{-7{u_n}^2+18u_n-7} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេពិចារណាសមីការ $r=\dfrac{9r^2-14r+9}{-7r^2+18r-7}$

ឬ $7r^3-9r^2-7r+9=0$

ឬ $r^2(7r-9)-(7r-9)=(7r-9)(r^2-1)=0$

គេទាញឬស $r_1=-1\ ;\ r_2=1\ ;\ r_3=\dfrac{9}{7}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

គេបាន $V_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$$V_{n+1}=\frac{\dfrac{9u_n^{\ 2}-14u_n+9}{-7u_n^{\ 2}+18u_n-7}-1}{\dfrac{9u_n^{\ 2}-14u_n+9}{-7u_n^{\ 2}+18u_n-7}+1}=\frac{16u_n^{\ 2}-32u_n+16}{2u_n^{\ 2}+4u_n+2}$$

$$V_{n+1}=\frac{8(u_n-1)^2}{(u_n+1)^2}$$

$$V_{n+1}=8V_n^{\ 2}$$

$$8V_{n+1}=\left(8V_n\right)^2$$

$$\ln\left(8V_{n+1}\right)=2\ln\left(8V_n\right)$$

នាំឱ្យ $\{\ \ln(8V_n)\ \}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ ។

គេបាន $\ln(8V_n)=2^n\ln(8V_0)$ នាំឱ្យ $V_n=\dfrac{(8V_0)^{2^n}}{8}$

ដោយ $V_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}$

គេបាន $V_n=\dfrac{4^{2^n}}{8}=2^{2^{n+1}-3}$ ។

ដោយ $V_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ នោះ $u_n=\dfrac{1+V_n}{1-V_n}=\dfrac{1+2^{2^{n+1}-3}}{1-2^{2^{n+1}-3}}$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{1+2^{2^{n+1}-3}}{1-2^{2^{n+1}-3}}$ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5{u_n}^2 - 6u_n - 3}{{u_n}^2 + 2u_n - 7} \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{{u_n}^2 - 2u_n + 2} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

១២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{a{u_n}^3 + b{u_n}^2 + cu_n + d}{a'{u_n}^2 + b'u_n + c'}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

កំណើន $u_{n+1} = \dfrac{a{u_n}^3 + b{u_n}^2 + cu_n + d}{a'{u_n}^2 + b'u_n + c'}$ និងតួ $u_1 = \alpha$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ ពិចារណាសមីការ $r = \dfrac{ar^3 + br^2 + cr + d}{a'r^2 + b'r + c'}$

ឬ $(a - a')r^3 + (b - b')r^2 + (c - c')r + d = 0 \quad (E)$

☞ បើសមីការ (E) មានឫស r_1 , r_2 , r_3

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ ៖

-តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n - r_i}{u_n - r_j}$

ដែល $i = 1 , 2 , 3$ និង $j = 1 , 2 , 3$ ($i \neq j$)

-រកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n

គេនឹងបាន $v_{n+1} = k.v_n^{\,3}$ (បើមាន)

-គណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

✍ **សំគាល់**

វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយនេះមិនមានលក្ខណះជាទូទៅចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n^{\,3} + bu_n^{\,2} + cu_n + d}{a'u_n^{\,2} + b'u_n + c'}$ ទាំងអស់ទេគឺអាចអនុវត្តន៍បានតែក្នុងករណីពិសេសដែលបានសិក្សាខាងលើនេះតែប៉ុណ្ណោះ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,3} + 6u_n - 2}{3(u_n^{\,2} - u_n + 1)} \end{cases}$$ ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3}{3u_n^2 - 6u_n + 4} \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍៣

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 12u_n}{3u_n^2 + 4} \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n^3 + bu_n^2 + cu_n + d}{a'u_n^3 + b'u_n^2 + c'u_n + d'}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

កំណើន $u_{n+1} = \dfrac{au_n^3 + bu_n^2 + cu_n + d}{a'u_n^3 + b'u_n^2 + c'u_n + d'}$ និងតួ $u_1 = \alpha$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ ពិចារណាសមីការ $r = \dfrac{ar^3 + b\,r^2 + cr + d}{a'\,r^3 + b'r^2 + c'r + d'}$

ឬ $a'r^4 + (b'-a)r^3 + (c'-b)\,r^2 + (d'-c)r - d = 0 \quad (E)$

☞ បើសមីការ (E) មានឫស r_1 , r_2 , r_3 , r_4

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ ៖

- តាងស្វីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n - r_i}{u_n - r_j}$

ដែល $i = 1 , 2 , 3 , 4$ និង $j = 1 , 2 , 3 , 4$ ($i \neq j$) ។

- រកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n

គេនឹងបាន $v_{n+1} = k.v_n^{\,3}$ (បើមាន)

- គណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

✍ **សំគាល់**

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយនេះមិនមានលក្ខណះជាទូទៅចំពោះគ្រប់ស្វីត (u_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = \dfrac{au_n^{\,3} + bu_n^{\,2} + cu_n + d}{a'u_n^{\,3} + b'u_n^{\,2} + c'u_n + d'}$ ទាំងអស់ទេគឺអាចអនុវត្តន៍បានតែក្នុងករណីពិសេសដែលបានសិក្សាខាងលើនេះតែប៉ុណ្ណោះ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n^{\,3} + 9u_n^{\,2} + 15u_n + 3}{3u_n^{\,3} + 15u_n^{\,2} + 9u_n + 5} \end{cases}$ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{9{u_n}^3}{8{u_n}^3 + 3{u_n}^2 - 3u_n + 1} \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n + f(n)$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង
កំណើន $u_{n+1} = a\,u_n + f(n)$ និងតួ $u_1 = \alpha$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ រកអនុគមន៍ $g(n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$$g(n+1) = a\ g(n) + f(n) \quad (*)$$

☞ ដោយគេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$u_{n+1} = a\,u_n + f(n) \quad (**)$$

☞ ធ្វើផលសងរវាង (*) និង (**) គេបានសមីការ ៖

$$u_{n+1} - g(n+1) = a\ [\ u_n - g(n)\ ] \quad (***)$$

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - g(n)$ នោះតាម (***)
គេអាចបង្កើតទំនាក់ទំនង $v_{n+1} = a\ v_n$ រួចទាញរក $v_n = v_1 \times a^{n-1}$

☞ ទីបញ្ចប់គេបាន $u_n = v_n + g(n)$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 5$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស៊ីត (u_n)ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + an + b$ ដែល $a , b \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + an + a + b$ ដោយ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 5$

គេបាន $v_{n+1} + an + a + b = \frac{1}{2}(v_n + an + b) + n + 5$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \left[(-\frac{1}{2}a + 1)n + (5 - a - \frac{1}{2}b)\right] \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} -\frac{1}{2}a + 1 - 0 \\ 5 - a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = 2\ ; b = 3$

ទំនាក់ទំនង $(*)$ ទៅជា $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

នាំឲ្យ(v_n)ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង$q = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + an + b = v_n + 2n + 6$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $u_0=v_0+6$ នាំឲ្យ $v_0=u_0-6=5-6=-1$

គេបាន $v_n=-1\times\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{u_n=-\frac{1}{2^n}+2n+6}$ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n^2-2n+4 \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2u_n+4\sin\frac{n\pi}{2}+6\cos\frac{n\pi}{2} \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍៣

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+(n^2-2n+4).\,2^n \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + f(n)$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង
កំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + f(n)$ និងតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ ។
ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ រកអនុគមន៍ $g(n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$$g(n+2) = a\ g(n+1) + b\ g(n) + f(n) \quad (*)$$

☞ ដោយគេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n + f(n) \quad (**)$$

☞ ធ្វើផលសងរវាង (*) និង (**) គេបានសមីការ ៖

$$u_{n+2} - g(n+2) = a\left[u_{n+1} - g(n+1)\right] + b[\ u_n - g(n)\ ] \quad (***)$$

☞ តាងស៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - g(n)$

នោះតាម (***) គេអាចបង្កើតទំនាក់ទំនង $v_{n+2} = a\ v_{n+1} + bv_n$

☞ រក v_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចមកហើយ ។

☞ ទីបញ្ចប់គេបាន $u_n = v_n + g(n)$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យស្ទីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n + 6n + 3 \end{cases}$

ដែល $n = 0, 1, 2, 3, ...$ ។ ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

តាង $g(n) = an + b$ ជាអនុគមន៏ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n + 6n + 3$

គេបាន $g(n+2) = 2g(n+1) - 4g(n) + 6n + 3$

ដោយ $g(n+1) = a(n+1) + b = an + a + b$

និង $g(n+2) = a(n+2) + b = an + 2a + b$

គេបាន $an + 2a + b = 2(an + a + b) - 4(an + b) + 6n + 3$

$$an + 2a + b = 2an + 2a + 2b - 4an - 4b + 6n + 3$$

$$3an + 3b = 6n + 3$$

គេទាញបាន $a = 2 ;\ b = 1$ ហើយ $g(n) = 2n + 1$ ។

គេមាន $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n + 6n + 3\ (i)$

និង $g(n+2) = 2g(n+1) - 4g(n) + 6n + 3\ (ii)$

ធ្វើផលសងរវាង (i) និង (ii) គេបាន :

$$u_{n+2} - g(n+2) = 2\big(u_{n+1} - g(n+1)\big) - 4\big(u_n - g(n)\big)\ (iii)$$

តាង $V_n = u_n - g(n)$ នោះទំនាក់ទំនង (iii) អាចសរសេរជា :

$V_{n+2} = 2V_{n+1} - 4V_n$ មានសមីការសម្គាល់ $r^2 = 2r - 4$ ឬ $r^2 - 2r + 4 = 0$

$\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3i^2$ មានឫស $r_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ ។

តាងស្ទីតជំនួយ $z_n = V_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})V_n$

គេបាន $z_{n+1} = V_{n+2} - (1 - i\sqrt{3})V_{n+1}$

ដោយ $V_{n+2}=2V_{n+1}-4V_n$

គេបាន $z_{n+1}=2V_{n+1}-4V_n-(1-i\sqrt{3})V_{n+1}$

$$z_{n+1}=(1+i\sqrt{3})V_{n+1}-4V_n$$

$$z_{n+1}=(1+i\sqrt{3})(V_{n+1}-\frac{4}{1+i\sqrt{3}}V_n)$$

$$z_{n+1}=(1+i\sqrt{3})\left[V_{n+1}-(1-i\sqrt{3})V_n\right]$$

$$z_{n+1}=(1+i\sqrt{3})z_n$$

គេទាញបាន (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមានផលធៀបរួម $q=1+i\sqrt{3}$

និងតួ $z_0=V_1-(1-i\sqrt{3})V_0$ ដោយ $V_n=u_n-g(n)=u_n-(2n+1)$

គេបាន $V_0=u_0-1=1-1=0$ ហើយ $V_1=u_1-3=4-3=1$

គេទាញបាន $z_0=1$ ។

តាមរូបមន្ត $z_n=z_0.q^n=(1+i\sqrt{3})^n=2^n(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3})$

ដោយ $z_n=V_{n+1}-(1-i\sqrt{3})V_n=(V_{n+1}-V_n)+i\sqrt{3}V_n$

គេទាញ $\sqrt{3}V_n=2^n\sin\frac{n\pi}{3}$ ឬ $V_n=\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$

ដោយ $V_n=u_n-g(n)$ នោះ $u_n=g(n)+V_n$

ដូចនេះ $u_n=6n+3+\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ , u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4\sin\dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍៣

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_o = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_{n+1} - 4u_n + (3n+1)\,2^n \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍៤

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_o = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_{n+1} + u_n + n^2 \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៦_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + f(n)$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

កំណើន $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + f(n)$

និងតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$, $u_3 = \gamma$ ។

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ រកអនុគមន៍ $g(n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$$g(n+3) = a\ g(n+2) + b\ g(n+1) + c\ g(n) + f(n) \quad (*)$$

☞ ដោយគេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$u_{n+3} = a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + cu_n + f(n) \quad (**)$$

☞ ធ្វើផលសងរវាង (*) និង (**) គេបានសមីការ ៖

$$u_{n+3} - g(n+3) = a\left[u_{n+2} - g(n+2)\right] + b[\ u_{n+1} - g(n+1)\ ] + c\left[u_n - g(n)\right] \quad (***)$$

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - g(n)$

នោះតាម (***) គេអាចបង្កើតទំនាក់ទំនង ៖

$$v_{n+3} = a\ v_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n$$

☞ រក v_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចមកហើយ ។

☞ ទីបញ្ចប់គេបាន $u_n = v_n + g(n)$ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = -1 \text{ , } u_1 = 0 \text{ , } u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = -1 \text{ , } u_1 = 0 \text{ , } u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + 9u_{n+1} - 18u_n + n^2 - 2n + 4 \end{cases}$$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៧_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) និង (v_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ និង $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ v_1 = \beta \end{cases}$

ដើម្បីគណនា u_n និង v_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ តាងស៊ីតជំនួយ $w_n = u_n + r v_n$ ដែល r ជាចំនួនថេរ ត្រូវកំនត់រកដើម្បីឱ្យស៊ីត (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ឬ ស៊ីតថេរ ។

☞ ដើម្បីស្វែងរកចំនួន r គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

_បង្កើនកំណើន $w_{n+1} = u_{n+1} + r\, v_{n+1}$ **(1)**

- ជំនួស $u_{n+1} = au_n + bv_n$ និង $v_{n+1} = cu_n + dv_n$

ក្នុង (1) គេបាន ៖

$$w_{n+1} = (au_n + bv_n) + r(cu_n + dv_n)$$
$$w_{n+1} = (a+cr)u_n + (b+dr)v_n$$
$$w_{n+1} = (a+cr)\left(u_n + \frac{b+dr}{a+cr} v_n \right) \quad (2)$$

- តាម (2) ដើម្បីឱ្យ (w_n) ក្លាយជាស៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ ៖

$$r = \frac{b+dr}{a+cr} \quad \text{ឬ} \quad cr^2 + (a-d)\,r - b = 0 \quad (E)$$

$*$ បើសមីការ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា r_1 , r_2

នោះគេអាចបង្កើតបានស៊ីតពីរ

$w'_n = u_n + r_1 v_n$ និង $w''_n = u_n + r_2 v_n$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

ឬជាស៊ីតថេរ ។

- គណនា $w'_n = f(n)$ និង $w''_n = g(n)$

- គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_n + r_1 v_n = f(n) \\ u_n + r_2 v_n = g(n) \end{cases}$

- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបានចម្លើយ u_n និង v_n ។

$*$ បើសមីការ (E) មានឬសឌុប $r_1 = r_2 = r_0$

នោះគេអាចបង្កើតស៊ីត (w_n) បានតែមួយគត់គឺ $w_n = u_n + r_0 v_n$

ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ឬ ជាស៊ីតថេរ ។

- សន្មថាគេអាចគណនារកឃើញ $w_n = f(n)$

- យើងផ្សំបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} u_n + r_0 v_n = f(n) \\ u_{n+1} = a u_n + b v_n \\ v_{n+1} = c u_n + d v_n \end{cases}$

- យើងត្រូវបង្កើតទំនាក់ទំនង $\begin{cases} u_{n+1} = (a - \dfrac{1}{r_0}) u_n + \dfrac{f(n)}{r_0} \\ v_{n+1} = (d - c r_0)\, v_n + c\, f(n) \end{cases}$

- គណនា u_n និង v_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចមកហើយ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$\begin{cases} u_0 = 5 \ ; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 9v_n \\ v_{n+1} = u_n + 8v_n \end{cases}$ គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$\begin{cases} u_0 = 1 \ ; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 12v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 7v_n \end{cases}$ គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍៣

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$\begin{cases} u_0 = 4 \ ; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 9v_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n \end{cases}$ គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៨_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + p \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + q \end{cases}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) និង (v_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + p \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + q \end{cases}$ និង $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ v_1 = \beta \end{cases}$

ដើម្បីគណនា u_n និង v_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $\begin{cases} x_n = u_n + \lambda \\ y_n = v_n + \mu \end{cases}$

☞ គេបាន $\begin{cases} u_n = x_n - \lambda \\ v_n = y_n - \mu \end{cases}$ និង $\begin{cases} u_{n+1} = x_{n+1} - \lambda \\ v_{n+1} = y_{n+1} - \mu \end{cases}$

☞ ដោយ $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + p \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + q \end{cases}$ គេអាចសរសេរ ៖

$$\begin{cases} x_{n+1} - \lambda = a(x_n - \lambda) + b(y_n - \mu) + p \\ y_{n+1} - \mu = c(x_n - \lambda) + d(y_n - \mu) + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + p + (1-a)\lambda - \mu b \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + q - c\lambda + (1-d)\mu \end{cases}$$

☞ ត្រូវឱ្យ $\begin{cases} p + (1-a)\lambda - \mu b = 0 \\ q - c\lambda + (1-d)\mu = 0 \end{cases}$

រួចដោះស្រាយរកចំនួន λ និង μ ។

☞ គេទាញបានទំនាក់ទំនង $\begin{cases} x_{n+1} = a\ x_n + b\ y_n \\ y_{n+1} = c\ x_n + d\ y_n \end{cases}$

☞ គណនា x_n និង y_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចហើយ ។

អនុវត្តន៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 6 \ ; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 6v_n + 3 \\ v_{n+1} = u_n + 8v_n + 11 \end{cases}$$

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៩_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2 \\ v_{n+1} = a'u_n^2 + b'u_nv_n + c'v_n^2 \end{cases}$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) និង (v_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_{n+1} = au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2 \\ v_{n+1} = a'u_n^2 + b'u_nv_n + c'v_n^2 \end{cases}$

និង $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ v_1 = \beta \end{cases}$

ដើម្បីគណនា u_n និង v_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ ត្រូវរកចំនួនថេរ r និង k ដែលបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌសមីការ ៖

$$u_{n+1} + r\ v_{n+1} = k\ \ (u_n + r\,v_n)^2$$

☞ សន្មតថាគេអាចរកឃើញតម្លៃ r និង k ពីរគឺ r_1 , r_2

និង k_1 , k_2 ។

☞ ត្រូវតាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $\begin{cases} x_n = u_n + r_1v_n \\ y_n = u_n + r_2v_n \end{cases}$

☞ តាមលំនាំខាងលើគេទាញ $\begin{cases} x_{n+1} = k_1\, {x_n}^2 \\ y_{n+1} = k_2\, {y_n}^2 \end{cases}$

☞ គណនា x_n និង y_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចមកហើយ

☞ ទាញរក u_n និង v_n ។

✍ **សំគាល់**

វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយនេះមិនមានលក្ខណៈជាទូទៅចំពោះគ្រប់ស៊ីត

(u_n) និង (v_n) ដែលកំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_{n+1} = a{u_n}^2 + bu_nv_n + c{v_n}^2 \\ v_{n+1} = a'{u_n}^2 + b'u_nv_n + c'{v_n}^2 \end{cases}$$

ទាំងអស់ទេគឺអាចអនុវត្តន៍បានតែក្នុងករណីពិសេសដែលបានសិក្សាខាងលើនេះតែប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\ge 0}$ និង $(v_n)_{n\ge 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \;\; ; \;\; v_0 = 2 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 2{v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n + {v_n}^2 \end{cases}$$

ដែល $n = 0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; 3 \; ; \ldots$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^2$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

យើងមាន $u_0 = 4 > v_0 = 2$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > v_k$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k + 1$

គឺ $u_{k+1} > v_{k+1}$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} - v_{k+1} = \left(u_k{}^2 + 2v_k{}^2\right) - \left(2u_kv_k + v_k{}^2\right)$

$$u_{k+1} - v_{k+1} = (u_k - v_k)^2 > 0 \text{ ព្រោះ } u_k > v_k$$

គេទាញ $u_{k+1} > v_{k+1}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r :

គេមាន $u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^2 \quad (*)$

ដោយ $u_{n+1} = u_n{}^2 + 2v_n{}^2$ និង $v_{n+1} = 2u_nv_n + v_n{}^2$

គេបាន $\left(u_n{}^2 + 2v_n{}^2\right) + r\left(2u_nv_n + v_n{}^2\right) = (u_n + r\,v_n)^2$

$$u_n^{\ 2}+2r\,u_nv_n+(2+r)v_n^{\ 2}=u_n^{\ 2}+2ru_nv_n+r^2v_n^{\ 2}$$

គេទាញ $2+r=r^2$ ឬ $r^2-r-2=0$

ដូចនេះ $r_1=-1$ ឬ $r_2=2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r=-1$; $r=2$ ជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+1}-v_{n+1}=(u_n-v_n)^2 \\ u_{n+1}+2v_{n+1}=(u_n+2v_n)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(u_{n+1}-v_{n+1})=2\ln(u_n-v_n) & (i) \\ \ln(u_{n+1}+2v_{n+1})=2\ln(u_n+2v_n) & (ii) \end{cases}$$

តាង $x_n=\ln(u_n-v_n)$ និង $v_n=\ln(u_n+2v_n)$

តាម (i) & (ii) គេបាន $x_{n+1}=2x_n$ និង $y_{n+1}=2y_n$

នាំឱ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងរៀងគ្នា $q_1=2$

និង $q_2=2$ និងតួ $x_0=\ln 2$ និង $y_0=\ln 8$

គេបាន $x_n=2^n\ln 2$ និង $y_n=2^n\ln 8$

ដោយ $x_n=\ln(u_n-v_n)$ និង $v_n=\ln(u_n+2v_n)$

គេទាញ $\begin{cases} \ln(u_n-v_n)=2^n\ln 2 \\ \ln(u_n+2v_n)=2^n\ln 8 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} u_n-v_n=2^{2^n} \\ u_n+2v_n=8^{2^n} \end{cases}$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{2^{2^n+1}+8^{2^n}}{3}$ និង $v_n\,\dfrac{8^{2^n}-2^{2^n}}{3}$ ។

អនុវត្តន៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 6 \ ; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}(4{u_n}^2 + 6u_n v_n + 21{v_n}^2) \quad \text{ដែល } n = 0 , 1 , 2 , 3 , ... \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}({u_n}^2 + 14u_n v_n - {v_n}^2) \end{cases}$$

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២០_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_{n+1} = a{u_n}^3 + b{u_n}^2 v_n + c u_n {v_n}^2 + d\,{v_n}^3 \\ v_{n+1} = a'{u_n}^3 + b'{u_n}^2 v_n + c' u_n {v_n}^2 + d'{v_n}^3 \end{cases}$$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) និង (v_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន ៖

$$\begin{cases} u_{n+1} = a{u_n}^3 + b{u_n}^2 v_n + c u_n {v_n}^2 + d\,{v_n}^3 \\ v_{n+1} = a'{u_n}^3 + b'{u_n}^2 v_n + c' u_n {v_n}^2 + d'{v_n}^3 \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_1 = \alpha \\ v_1 = \beta \end{cases}$$

ដើម្បីគណនា u_n និង v_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ ត្រូវរកចំនួនថេរ r និង k ដែលបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌសមីការ ៖

$$u_{n+1} + r\ v_{n+1} = k\ \ (u_n + r\,v_n)^3$$

☞ សន្មតថាគេអាចរកឃើញតម្លៃ r និងk ពីរគឺ r_1 , r_2 និង k_1 , k_2 ។

☞ ត្រូវតាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $\begin{cases} x_n = u_n + r_1 v_n \\ y_n = u_n + r_2 v_n \end{cases}$

☞ តាមលំក្ខខ័ណ្ឌខាងលើគេទាញ $\begin{cases} x_{n+1} = k_1\, {x_n}^3 \\ y_{n+1} = k_2\, {y_n}^3 \end{cases}$

☞ គណនា x_n និង y_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចមកហើយ

☞ ទាញរក u_n និង v_n ។

✍ **សំគាល់**

វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយនេះមិនមានលក្ខណះជាទូទៅចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ដែលកំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន ៖

$$\begin{cases} u_{n+1} = a{u_n}^3 + b{u_n}^2 v_n + c u_n {v_n}^2 + d\,{v_n}^3 \\ v_{n+1} = a'{u_n}^3 + b'{u_n}^2 v_n + c' u_n {v_n}^2 + d'{v_n}^3 \end{cases}$$

ទាំងអស់ទេគឺអាចអនុវត្តន៍បានតែក្នុងករណីពិសេសដែលបានសិក្សាខាងលើនេះតែប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_0 = 2 \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^3 - 6u_n {v_n}^2 - 6{v_n}^3 \\ v_{n+1} = 3{u_n}^2 v_n + 9u_n {v_n}^2 + 7{v_n}^3 \end{cases}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ចូរស្រាយថា $u_n + v_n > 0$ និង $u_n + 2v_n > 0$

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1}+r\,v_{n+1}=\left(u_n+r\,v_n\right)^3$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ស្រាយថា $u_n+v_n>0$

គេមាន $u_0+v_0=4+2=6>0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $u_k+v_k>0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $u_{k+1}+v_{k+1}>0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1}+v_{k+1}=u_n{}^3+3u_n{}^2v_n+3u_nv_n{}^2+v_n{}^3$

$$u_{k+1}+v_{k+1}>\left(u_k+v_k\right)^3>0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n+v_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ស្រាយថា $u_n+2v_n>0$:

គេមាន $u_0+2v_0=4+4=8>0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $u_k+2v_k>0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $u_{k+1}+2v_{k+1}>0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1}+2v_{k+1}=u_n{}^3+6u_n{}^2v_n+12u_nv_n{}^2+8v_n{}^3$

$$u_{k+1}+2v_{k+1}>\left(u_k+2v_k\right)^3>0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n+2v_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1}+r\,v_{n+1}=\left(u_n+r\,v_n\right)^3 \quad (*)$$

ដោយ $\begin{cases} u_{n+1}=u_n{}^3-6u_nv_n{}^2-6v_n{}^3 \\ v_{n+1}=3u_n{}^2v_n+9u_nv_n{}^2+7v_n{}^3 \end{cases}$ គេបាន :

$$u_{n+1}+r\,v_{n+1}=u_n{}^3+3ru_n{}^2v_n+(9r-6)u_nv_n{}^2+(7r-6)v_n{}^3 \,(i)$$

ហើយ $\left(u_n+r\,v_n\right)^3=u_n{}^3+3ru_n{}^2v_n+3r^2u_nv_n{}^2+r^3v_n{}^3 \;(ii)$

ដោយប្រៀបធៀបទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន :

$$\begin{cases} 3r^2=9r-6 \\ r^3=7r-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2-3r+2=0 \\ r^3-7r+6=0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $r_1=1$; $r_2=2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r_1=1$; $r_2=2$ ជួសក្នុង $(*)$ គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+1}+v_{n+1}=(u_n+v_n)^3 \\ u_{n+1}+2v_{n+1}=\left(u_n+2v_n\right)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln\left(u_{n+1}+v_{n+1}\right)=3\ln\left(u_n+v_n\right) \\ \ln\left(u_{n+1}+2v_{n+1}\right)=3\ln\left(u_n+2v_n\right) \end{cases}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(u_n+v_n)\}$ និង $\{\ln(u_n+2v_n)\}$

សុទ្ធតែជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=3$ ដូចគ្នា ។

គេបាន $\begin{cases} \ln(u_n+v_n)=3^n\ln(u_0+v_0)=3^n\ln 6 \\ \ln(u_n+2v_n)=3^n\ln(u_0+2v_0)=3^n\ln 8) \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_n+v_n=6^{3^n} \\ u_n+2v_n=8^{3^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេទទួលបាន :

$u_n=2\times 6^{3^n}-8^{3^n}$ និង $v_n=8^{3^n}-6^{3^n}$ ។

អនុវត្តន៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0=4\ ,\ v_0=1 \\ u_{n+1}=5u_n^{\ 3}-24u_n^{\ 2}v_n+6u_nv_n^{\ 2}-14v_n^{\ 3} \\ v_{n+1}=-2u_n^{\ 3}+15u_n^{\ 2}v_n+3u_nv_n^{\ 2}+11v_n^{\ 3} \end{cases}$$

ដែល $n=0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,....$ ។គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0=4\ ,\ v_0=1 \\ u_{n+1}=u_n^{\ 3}+3u_nv_n^{\ 2} \\ v_{n+1}=3u_n^{\ 2}v_n+v_n^{\ 3} \end{cases}$$

ដែល $n=0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,....$ ។

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \ ; \ v_0 = \beta \\ u_{n+1} = u_n{}^2 + d\,v_n{}^2 \quad (d>0) \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

ដើម្បីគណនា u_n និង v_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

☞ ត្រូវគណនា $u_{n+1} + \sqrt{d}\,v_{n+1}$ និង $u_{n+1} - \sqrt{d}v_{n+1}$

☞ ត្រូវតាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $x_n = u_n + \sqrt{d}v_n$ និង $y_n = u_n - \sqrt{d}v_n$

រួចត្រូវបង្ហាញថា $x_{n+1} = x_n{}^2$ និង $y_{n+1} = y_n{}^2$

☞ គណនា x_n និង y_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចមកហើយ

☞ ទាញរក u_n និង v_n ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \ ; \ v_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = u_n{}^2 + 8v_n{}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $u_{n+1}+2\sqrt{2}v_{n+1}=u_n^{\;2}+8v_n^{\;2}+4\sqrt{2}u_nv_n$

$$u_{n+1}+2\sqrt{2}v_{n+1}=(u_n+2\sqrt{2}v_n)^2 \quad (1)$$

ហើយ $u_{n+1}-2\sqrt{2}v_{n+1}=u_n^{\;2}+8v_n^{\;2}-4\sqrt{2}u_nv_n$

$$u_{n+1}-2\sqrt{2}v_{n+1}=(u_n-2\sqrt{2}v_n)^2 \quad (2)$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $x_n=u_n+2\sqrt{2}v_n$ និង $y_n=u_n-2\sqrt{2}v_n$

តាម (1) និង (2) គេបាន $x_{n+1}=x_n^{\;2}$ និង $y_{n+1}=y_n^{\;2}$

ចំពោះ $x_{n+1}=x_n^{\;2}$

បើ $n=0$ នោះ $x_1=x_0^{\;2}$

បើ $n=1$ នោះ $x_2=x_1^{\;2}=x_0^{\;2^2}$

បើ $n=2$ នោះ $x_3=x_0^{\;2}=x_0^{\;2^3}$

សន្មតថាវាពិតចំពោះតួ $x_n=x_0^{\;2^n}$

យើងបាន $x_{n+1}=x_n^{\;2}=\left(x_0^{\;2^n}\right)^2=x_0^{\;2^{n+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=x_0^{\;2^n}$ ។

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $y_{n+1}=y_n^{\;2}$ គេបាន $y_n=y_0^{\;2^n}$

ដោយ $x_0=u_0+2\sqrt{2}v_0=6+4=10$

និង $y_0=u_0-2\sqrt{2}v_0=6-4=2$

គេបាន $x_n=10^{2^n}$ និង $y_n=2^{2^n}$

ដោយ $x_n = u_n + 2\sqrt{2}v_n$ និង $y_n = u_n - 2\sqrt{2}v_n$

គេទាញបាន $\begin{cases} u_n + 2\sqrt{2}v_n = 10^{2^n} \\ u_n - 2\sqrt{2}v_n = 2^{2^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន :

$u_n = \dfrac{10^{2^n} + 2^{2^n}}{2}$ និង $v_n = \dfrac{10^{2^n} - 2^{2^n}}{4\sqrt{2}}$ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 3\sqrt{2} \ , \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 2{v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \qquad ; n = 0 , 1, 2 , 3 , ... \end{cases}$$

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 4 \ , \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 4{v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \qquad ; n = 0 , 1, 2 , 3 , ... \end{cases}$$

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \;\; ; \;\; v_0 = \beta \\ u_{n+1} = u_n^{\;2} - d\, v_n^{\;2} \quad (d > 0) \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

ដើម្បីគណនា u_n និង v_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

☞ ត្រូវគណនា $u_{n+1} + i\sqrt{d}\, v_{n+1}$ និង $u_{n+1} - i\sqrt{d} v_{n+1}$

☞ ត្រូវតាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $x_n = u_n + i\sqrt{d} v_n$ និង $y_n = u_n - i\sqrt{d} v_n$

រួចត្រូវបង្ហាញថា $x_{n+1} = x_n^{\;2}$ និង $y_{n+1} = y_n^{\;2}$

☞ គណនា x_n និង y_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចមកហើយ

☞ ទាញរក u_n និង v_n ។

ឧទាហរណ៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 3 \;,\; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^{\;2} - 3v_n^{\;2} \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \qquad ; n = 0 \,, 1, 2 \,, 3 \,, ... \end{cases}$$

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $u_{n+1}+i\sqrt{3}v_{n+1}=u_n{}^2-3v_n{}^2+2i\sqrt{3}u_nv_n$

$$u_{n+1}+i\sqrt{3}v_{n+1}=(u_n+i\sqrt{3}v_n)^2 \quad (1)$$

ហើយ $u_{n+1}-i\sqrt{3}v_{n+1}=u_n{}^2-v_n{}^2-2i\sqrt{3}u_nv_n$

$$u_{n+1}-i\sqrt{3}v_{n+1}=(u_n-i\sqrt{3}v_n)^2 \quad (2)$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $x_n=u_n+i\sqrt{3}v_n$ និង $y_n=u_n-i\sqrt{3}v_n$

តាម (1) និង (2) គេបាន $x_{n+1}=x_n{}^2$ និង $y_{n+1}=y_n{}^2$

ចំពោះ $x_{n+1}=x_n{}^2$

បើ $n=0$ នោះ $x_1=x_0{}^2$

បើ $n=1$ នោះ $x_2=x_1{}^2=x_0{}^{2^2}$

បើ $n=2$ នោះ $x_3=x_0{}^2=x_0{}^{2^3}$

សន្មតថាវាពិតចំពោះតួ $x_n=x_0{}^{2^n}$

យើងបាន $x_{n+1}=x_n{}^2=\left(x_0{}^{2^n}\right)^2=x_0{}^{2^{n+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=x_0{}^{2^n}$ ។

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $y_{n+1}=y_n{}^2$ គេបាន $y_n=y_0{}^{2^n}$

ដោយ $x_0=u_0+i\sqrt{3}v_0=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

និង $y_0=u_0-i\sqrt{3}v_0=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

គេបាន $x_n = (2\sqrt{3})^{2^n}\left(\cos\frac{2^n\pi}{6} + i\sin\frac{2^n\pi}{6}\right)$

និង $y_n = (2\sqrt{3})^{2^n}\left(\cos(-\frac{2^n\pi}{6}) + i\sin(-\frac{2^n\pi}{6})\right)$

ដោយ $x_n = u_n + i\sqrt{3}v_n$ និង $y_n = u_n - i\sqrt{3}v_n$

គេទាញបាន $u_n = \frac{x_n + y_n}{2}$ និង $v_n = \frac{x_n - y_n}{2i\sqrt{3}}$

ដូចនេះ $u_n = \left(2\sqrt{3}\right)^{2^n}\cos\frac{2^n\pi}{6}$ និង $v_n = \left(2\sqrt{3}\right)^{2^n}\sin\frac{2^n\pi}{6}$ ។

២៣_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$x_0 = \alpha \;;\quad x_{n+1} = \frac{x_n^{\ 2} + d}{2x_n} \quad (d > 0)$$

ដើម្បីគណនា x_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

☞ ត្រូវតាងស៊ីតជំនួយ $x_n = \frac{u_n}{v_n}$

☞ តាមទំនាក់ទំនង $x_{n+1} = \frac{x_n^{\ 2} + d}{2x_n}$

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{\left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2 + d}{2\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^{\ 2} + dv_n^{\ 2}}{2u_nv_n}$

បើ $u_{n+1} = u_n^{\ 2} + d\,v_n^{\ 2}$ នោះ $v_{n+1} = 2u_nv_n$

គេបានស៊ីត $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^{\ 2} + d\,v_n^{\ 2} \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases}$

☞ គណនា u_n និង v_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចមកហើយ ។

អនុវត្តន៍

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំនត់ដោយ ៖

$x_0 = 3\sqrt{5}$ និង $x_{n+1} = \dfrac{{x_n}^2 + 5}{2x_n}$ ដែល $n = 0\,;1\,;2\,;....$

គណនា x_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២៤_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$x_0 = \alpha \ ; \quad x_{n+1} = \frac{{x_n}^2 - d}{2x_n} \quad (d > 0)$$

ដើម្បីគណនា x_n គេត្រូវអនុវត្តន៏ដូចខាងក្រោម :

☞ ត្រូវតាងស្វ៊ីតជំនួយ $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

☞ តាមទំនាក់ទំនង $x_{n+1} = \dfrac{{x_n}^2 - d}{2x_n}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^2 - d}{2\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}$ ឬ $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{{u_n}^2 - d{v_n}^2}{2u_n v_n}$

បើ $u_{n+1} = {u_n}^2 - d\,{v_n}^2$ នោះ $v_{n+1} = 2u_n v_n$

គេបានស្វ៊ីត $\begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^2 - d\,{v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$

☞ គណនា u_n និង v_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចមកហើយ ។

អនុវត្តន៍

គេពិនិត្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំនត់ដោយ ៖

$x_0 = 2\sqrt{3}$ និង $x_{n+1} = \dfrac{{x_n}^2 - 4}{2x_n}$ ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ....$

គណនា x_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២៥_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{f(n+1)}{[f(n)]^k}.{u_n}^k \end{cases}$$

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

☞ ត្រូវបម្លែង $u_{n+1} = \dfrac{f(n+1)}{[f(n)]^k}.{u_n}^k$ ជារាង $\dfrac{u_{n+1}}{f(n+1)} = \left[\dfrac{u_n}{f(n)}\right]^k$

☞ ត្រូវតាងស៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n}{f(n)}$ គេបាន $v_{n+1} = {v_n}^k$

☞ គណនា v_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចមកហើយ ។

អនុវត្តន៍១

គេពិនិត្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$; $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 1}{4^n + 2^{n+1} + 1}{u_n}^2$ ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ....$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

អនុវត្តន៍២

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$u_0 = 1 \ ; \ u_{n+1} = \frac{n^2+n+1}{(n^2-n+1)^3} u_n{}^3$$ ដែល $n = 0 \ ; 1 \ ; 2 \ ; ....$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

VIII_អនុវត្តន៍ស្វ៊ីតក្នុងការគណនាដេរីវេទី n

១_របៀបរកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍រាង

$$y = (ax+b)e^{\alpha x}$$

ដើម្បីគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = (ax+b)e^{\alpha x}$ គេត្រូវ :

-គណនាដេរីវេ y' , y'' , $y^{(3)}$, $y^{(4)}$,...

-យើងសង្កេតឃើញថា $y' = (a_1 x + b_1)e^{\alpha x}$

$$y'' = (a_2 x + b_2)e^{\alpha x}$$

$$y^{(3)} = (a_3 x + b_3)e^{\alpha x}$$

-សន្មតថាដេរីវេទី n មានរាង $y^{(n)} = (a_n x + b_n)e^{\alpha x}$

-ប្រើលក្ខណៈ $y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)'$ ដើម្បីបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង b_{n+1} ជាមួយនឹង a_n និង b_n ។

-ត្រូវគណនា a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=(2x+1)e^{3x}$

យើងបាន $y'=2e^{3x}+3(2x+1)e^{3x}=(6x+5)e^{3x}=(a_1x+b_1)e^{3x}$

$$y''=6e^{3x}+3(6x+5)e^{3x}=(18x+21)e^{3x}=(a_2x+b_2)e^{3x}$$

$$y^{(3)}=18e^{3x}+3(18x+21)e^{3x}=(54x+81)e^{3x}=(a_3x+b_3)e^{3x}$$

សន្មតថាដេរីវេទី n មានរាង $y^{(n)}=(a_nx+b_n)e^{3x}$

គេបាន $y^{(n+1)}=a_ne^{3x}+3(a_nx+b_n)e^{3x}=(3a_nx+a_n+3b_n)e^{3x}$

ដោយ $y^{(n+1)}=(a_{n+1}x+b_{n+1})e^{3x}$

គេទាញបាន $\begin{cases} a_{n+1}=3a_n \\ b_{n+1}=a_n+3b_n \end{cases}$

តាម $a_{n+1}=3a_n$ បញ្ជាក់ថា (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=3$

គេបាន $a_n=a_1\times q^{n-1}$ ដោយ $a_1=6$ នោះ $a_n=2\times 3^n$

ហើយ $b_{n+1}=a_n+3b_n=2.3^n$ នាំឱ្យ $\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{b_n}{3^n}=\dfrac{2}{3}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\dfrac{b_n}{3^n}\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=\dfrac{2}{3}$

គេបាន $\dfrac{b_n}{3^n}=\dfrac{b_1}{3}+(n-1)d$ ដោយ $b_1=5$

គេទាញ $b_n=3^n\left[\dfrac{5}{3}+(n-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)=(2n+3)3^{n-1}\right]$

ដូចនេះ $y^{(n)}=\left[2.3^nx+(2n+3)3^{n-1}\right]e^{3x}$

២_របៀបរកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍រាង

$$y=(a\sin px+b\cos px)e^{\alpha x}$$

ដើម្បីគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=(a\sin px+b\cos px)e^{\alpha x}$ គេត្រូវ :

-គណនាដេរីវេ y' , y'' , $y^{(3)}$, $y^{(4)}$,...

-យើងសង្កេតឃើញថា $y'=(a_1\sin px+b_1\cos px)e^{\alpha x}$

$$y''=(a_2\sin px+b_2\cos px)e^{\alpha x}$$

$$y^{(3)}=(a_3\sin px+b_3\cos px)e^{\alpha x}$$

-សន្មតថាដេរីវេទី n មានរាង $y^{(n)}=(a_n\sin px+b_n\cos px)e^{\alpha x}$

-ប្រើលក្ខណៈ $y^{(n+1)}=\left(y^{(n)}\right)'$ ដើម្បីបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង b_{n+1}

ជាមួយនឹង a_n និង b_n ។

-ត្រូវគណនា a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=(\sin x+\cos x)e^{x}$

យើងបាន :

$$y'=(\cos x-\sin x)e^{x}+(\sin x+\cos x)e^{x}$$

$$=2\cos x\,e^{x}=(a_1\sin x+b_1\cos x)e^{x}$$

$$y''=-2\sin xe^{x}+2\cos xe^{x}$$

$$=(-2\sin x+2\cos x)e^{x}=(a_2\sin x+b_2\cos x)e^{x}$$

សន្មតថាដេរីវេទី n មានរាង $y^{(n)}=(a_n\sin x+b_n\cos x)e^{x}$

គេបាន $y^{(n+1)} = (a_n \cos x - b_n \sin x)e^x + (a_n \sin x + b_n \cos x)e^x$

$$= \left[(a_n - b_n)\sin x + (a_n + b_n)\cos x\right] e^x$$

ដោយ $y^{(n+1)} = (a_{n+1} \sin x + b_{n+1} \cos x)e^x$

គេទាញបានស៊ីត $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$

តាងស៊ីតជំនួយ $z_n = a_n + ib_n$

គេបាន $z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$

$$z_{n+1} = (a_n - b_n) + i(a_n + b_n)$$

$$z_{n+1} = (1+i)a_n - (1-i)b_n$$

$$z_{n+1} = (1+i)(a_n - \frac{1-i}{1+i}b_n)$$

$$z_{n+1} = (1+i)(a_n + ib_n)$$

$$z_{n+1} = (1+i)z_n$$

នាំឱ្យ (z_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានផលធៀបរួម $q = 1+i$ ។

តាមរូបមន្ត $z_n = z_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $z_1 = a_1 + ib_1 = 0 + 2i = 2i$

គេបាន $z_n = 2i(1+i)^n$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})\right]^n$$

$$= 2(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{(n+2)\pi}{4} + i.\sin\frac{(n+2)\pi}{4}\right]$$

ដោយ $z_n = a_n + i.b_n$ នោះគេទាញបាន :

$a_n = 2(\sqrt{2})^n \cos\frac{(n+2)\pi}{4}$ និង $b_n = 2(\sqrt{2})^n \sin\frac{(n+2)\pi}{4}$

ដោយ $y^{(n)}=(a_n\sin x+b_n\cos x)e^x$

ដូចនេះ $y^{(n)}=2(\sqrt{2})^n\sin\left[x+\frac{(n+2)\pi}{4}\right]e^x$ ។

IX-អនុវត្តន៍ស្វ៊ីតក្នុងការគណនាអនុគមន៍បណ្តាក់លំដាប់ n

$$F_n(x)=f_n\circ f\circ f\circ .....\circ f\circ f(x)$$

ដើម្បីគណនា $F_n(x)$ គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

-តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_1=f(x)$

$$u_2=f\circ f(x)=f(u_1)$$
$$u_3=f\circ f\circ f(x)=f(u_2)$$
$$u_4=f\circ f\circ f\circ f(x)=f(u_3)$$

$$-----------------$$

$$------------------$$

$$u_n=f_n\circ f\circ .....\circ f\circ f(x)=f(u_{n-1})$$
$$u_{n+1}=f(u_n)$$

-គេបានស្វ៊ីត $\begin{cases}u_1=f(x)\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

-ត្រូវគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x

-ដូចនេះ $F_n(x)=f_n\circ f\circ f\circ .....\circ f\circ f(x)=u_n$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{31x^2-12x-2}{12x^2+8x-15}$

ក_ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f(x) ។

ខ_គេពិនិត្យស្វ៊ីត(U_n)និង(V_n)កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ដោយ ៖

$U_1 = f(x), U_{n+1} = f(U_n)$ និង $V_n = \dfrac{U_n-2}{4U_n-1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n{}^2$ រួចទាញឱ្យបានថា $V_n=V_1{}^{2^{n-1}}$ ។

គ_ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\circ f\circ f\circ .....\circ f\circ f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{31x^2-12x-2}{12x^2+8x-15}$

អនុគមន៍នេះមានន័យកាលណា $12x^2+8x-15\neq 0$

បើ $12x^2+8x-15=0$ $\Delta'=16+180=196$

គេទាញឫស $x_1=\dfrac{-4-14}{12}=-\dfrac{3}{2}$, $x_2=\dfrac{-4+14}{12}=\dfrac{5}{6}$

ដូចនេះ $D=IR-\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{6}\}$ ។

ខ_បង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n{}^2$

យើងមាន $V_n=\dfrac{U_n-2}{4U_n-1}$ នាំឱ្យ $V_{n+1}=\dfrac{U_{n+1}-2}{4U_{n+1}-1}$

ដោយ $U_{n+1}=f(U_n)=\dfrac{31U_n^{\,2}-12U_n-2}{12U_n^{\,2}+8U_n-15}$

គេបាន $V_{n+1}=\dfrac{\dfrac{31U_n^{\,2}-12U_n-2}{12U_n^{\,2}+8U_n-15}-2}{4\left(\dfrac{31U_n^{\,2}-12U_n-2}{12U_n^{\,2}+8U_n-15}\right)-1}$

$$V_{n+1}=\frac{31U_n^{\,2}-12U_n-2-24U_n^{\,2}-16U_n+30}{124U_n^{\,2}-48U_n-8-12U_n^{\,2}-8U_n+15}$$

$$V_{n+1}=\frac{7U_n^{\,2}-28U_n+28}{112U_n^{\,2}-56U_n+7}=\frac{7(U_n^{\,2}-4U_n+4)}{7(16U_n^{\,2}-8U_n+1)}=\left(\frac{U_n-2}{4U_n-1}\right)^2$$

ដូចនេះ $V_{n+1}=V_n^{\,2}$ ។

-ទាញឱ្យបានថា ៖ $V_n=V_1^{\,2^{n-1}}$

គេមាន $V_{n+1}=V_n^{\,2}$

បើ $n=1$ គេបាន $V_2=V_1^{\,2}$ ពិត

បើ $n=2$ គេបាន $V_3=V_2^{\,2}=V_1^{\,2^2}$ ពិត

បើ $n=3$ គេបាន $V_4=V_3^{\,2}=V_1^{\,2^3}$ ពិត

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $V_k=V_1^{\,2^{k-1}}$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $V_{k+1}=V_1^{\,2^k}$

យើងមាន $V_{k+1}=V_k^{\,2}=\left(V_1^{\,2^{k-1}}\right)^2=V_1^{\,2^k}$ ពិត ។

ដូចនេះ $V_n=V_1^{\,2^{n-1}}$ ។

គ_គណនា $F_n(x) = f_n[\,f\,[........f\,[\,f(x)\,]........]]$ ៖

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $u_1 = f(x)$

$U_2 = f \circ f(x) = f(U_1)$

$U_3 = f \circ f \circ f(x) = f(U_2)$

$U_4 = f \circ f \circ f \circ f(x) = f(U_3)$

$-----------------$

$------------------$

$U_n = f_n \circ f \circ ..... \circ f \circ f(x) = f(U_{n-1})$

$U_{n+1} = f(U_n)$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_n = \dfrac{U_n - 2}{4U_n - 1}$

នាំឱ្យ $V_n(4U_n - 1) = U_n - 2$

ឬ $U_n = \dfrac{V_n - 2}{4V_n - 1}$ ដោយ $V_n = V_1^{\,2^{n-1}}$

និង $V_1 = \dfrac{U_1 - 2}{4U_1 - 2} = \dfrac{\dfrac{31x^2 - 12x - 2}{12x^2 + 8x - 15} - 2}{4(\dfrac{31x^2 - 12x - 2}{12x^2 + 8x - 15}) - 1} = \left(\dfrac{x-2}{4x-1}\right)^2$

គេបាន $V_n = \left[(\dfrac{x-2}{4x-1})^2\right]^{2^{n-1}} = \left(\dfrac{x-2}{4x-1}\right)^{2^n}$

ហេតុនេះ $U_n = \dfrac{V_n - 2}{4V_n - 1} = \dfrac{(\dfrac{x-2}{4x-1})^{2^n} - 2}{4(\dfrac{x-2}{4x-1})^{2^n} - 1} = \dfrac{(x-2)^{2^n} - 2(4x-1)^{2^n}}{4(x-2)^{2^n} - (4x-1)^{2^n}}$

ដូចនេះ $F_n(x) = \dfrac{(x-2)^{2^n} - 2(4x-1)^{2^n}}{4(x-2)^{2^n} - (4x-1)^{2^n}}$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2$ **ដែល** $x\in IR$

ក_គេយក $U_1=f(x)$ **និង** $U_{n+1}=f(U_n)$ **ចំពោះគ្រប់** $n\in IN^*$

ចូរបង្ហាញថា $U_n=f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$ **។**

ខ_ស្រាយថាបើ $x>2$ **គេបាន** $U_n>2$ **គ្រប់** $n\in IN^*$ **។**

គ_គេតាង $V_n=U_n-\sqrt{U_n^{\ 2}-4}$ **គ្រប់** $n\in IN^*$ **និង** $x>2$ **។**

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ **ចូរបង្ហាញថា** $2V_{n+1}=V_n^{\ 2}$ **។**

ឃ_សន្មតថា $W_n=\ln V_n-\ln 2$ **ចំពោះគ្រប់** $n\in IN^*$ **។**

ចូររកប្រភេទនៃស៊ីត W_n **។**

ង_ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍

$$F_n(x)=f_n[\,f[........f[\,f(x)\,]........]]$$

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា $U_n=f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$

យើងមាន $U_1=f(x)$ **ពិត (តាមសម្មតិកម្ម)**

$$U_2=f(U_1)=f[f(x)]\ \text{ពិត (ព្រោះ}U_{n+1}=f(U_n)\text{)}$$

$$U_3=f(U_2)=f[f[f(x)]]\ \text{ពិត}$$

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k **គឺ ៖**

$U_k=f_k[f[.......f[f(x)].......]]$ **ពិត**

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$U_{k+1} = f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងមាន $$U_{k+1} = f(U_k) = f[\ f_k[f[........f[f(x)]......]]\ ] \\ = f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$$

ដូចនេះ $U_n = f_n[\ f[.......f[f(x)].......]\ ]$ ។

ខ_ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$

យើងមាន $U_{n+1} = f(U_n) = U_n{}^2 - 2$

បើ $x > 2$ នោះ $U_1 = f(x) = x^2 - 2 > 2$

ឬ $U_1 > 2$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត

យើងមាន $U_{k+1} = U_k{}^2 - 2$

ដោយ $U_k > 2$ នាំឱ្យ $U_k{}^2 > 4$ ឬ $U_k{}^2 - 2 > 4 - 2 = 2$

គេទាញ $U_{k+1} = U_k{}^2 - 2 > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ បើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ_បង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n{}^2$

យើងមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n{}^2 - 4}$

យើងបាន $V_{n+1} = U_{n+1} - \sqrt{U_{n+1}{}^2 - 4}$ តែ $U_{n+1} = U_n{}^2 - 2$

គេបាន ៖

$$V_{n+1} = U_n{}^2 - \sqrt{(U_n{}^2 - 2)^2 - 4}$$
$$V_{n+1} = U_n{}^2 - \sqrt{U_n{}^4 - 4U_n{}^2}$$
$$V_{n+1} = U_n{}^2 - U_n\sqrt{U_n{}^2 - 4}$$
$$2V_{n+1} = 2U_n{}^2 - 2U_n\sqrt{U_n{}^2 - 4}$$
$$2V_{n+1} = U_n{}^2 - 2U_n\sqrt{U_n{}^2 - 4} + (\sqrt{U_n{}^2 - 4})^2$$
$$2V_{n+1} = \left(U_n - \sqrt{U_n{}^2 - 4}\right)^2 = V_n{}^2$$

ដូចនេះ $2V_{n+1} = V_n{}^2$ ។

ឃ_រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

គេមាន $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

គេបាន $W_{n+1} = \ln V_{n+1} - \ln 2$ ដោយ $2V_{n+1} = V_n{}^2$

ឬ $V_{n+1} = \dfrac{V_n{}^2}{2}$

នោះ $W_{n+1} = \ln\dfrac{V_n{}^2}{2} - \ln 2 = 2\ln V_n - 2\ln 2 = 2W_n$

ដូចនេះ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ ។

ង_រកអនុគមន៍ $F_n(x) = f_n[\,f\,[\ldots\ldots f\,[\,f(x)\,]\ldots\ldots]]$

ដោយ $U_n = f_n[\,f\,[\ldots\ldots f\,[f(x)]\ldots\ldots]\,]$

គេទាញបាន $F_n(x) = U_n$ ។

តាមសម្រាយខាងលើ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1}.W_1$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_1}{2}\right)$

តែ $V_1 = U_1 - \sqrt{U_1^{\,2} - 4} = f(x) - \sqrt{f^2(x) - 4}$

$$V_1 = x^2 - 2 + \sqrt{(x^2-2)^2 - 4}$$

$$V_1 = x^2 - 2 - \sqrt{x^4 - 4x^2} = x^2 - 2 - x\sqrt{x^2-4} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2-4})^2$$

គេបាន $W_1 = \ln\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-4})^2}{4}\right] = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2$

ហេតុនេះ $W_n = 2^{n-1}.\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2 = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ដោយ $W_n = \ln V_n - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_n}{2}\right)$

គេទាញ $\ln\left(\frac{V_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ឬ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\,2} - 4}$

$$U_n - V_n = \sqrt{U_n^{\,2} - 4}$$

$$U_n^{\,2} - 2U_nV_n + V_n^{\,2} = U_n^{\,2} - 4$$

$$2U_nV_n = V_n^{\,2} + 4$$

$$U_n = \frac{V_n^{\,2} + 4}{2V_n} = \frac{1}{2}V_n + \frac{2}{V_n}$$

ដោយ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

គេបាន $U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{1}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$

$$U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$$

$$U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x^2-x^2+4}{4}\right)^{2^n}}$$

$$U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$

ដូចនេះ $F_n(x) = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ។

លំហាត់ត្រិះរិះ

1. កំណត់ស្វ៊ីត(a_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន ដូចខាងក្រោម៖

ក. $a_1 = 1\ ,\ 3a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad (n = 1, 2, ...)$

ខ. $a_1 = 1\ ,\ 3a_{n+1} = 3a_n + 4 \quad (n = 1, 2, ...)$

គ. $a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1, 2, ...)$

ឃ. $a_1 = 2\ ;\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 4 \quad (n = 1, 2, ...)$

ង. $a_1 = 0\ ;\ a_{n+1} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})a_n + 1 - \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad (n = 1, 2, ...)$

2. គេមានស្វ៊ីត(a_n) កំនត់ដោយ

$$(a_1) = 4\ ,\ 3a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a_n \neq 3)$ គ្រប់ចំនុច n ។

ខ. យក $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ និង កំនត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត(b_n) ។

កំនត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត(a_n) ។

3. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត(a_n) ។

បើ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$

ក. កំនត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} និង a_n ។

ខ. កំនត់តួទី n នៃស្វីត a_n ។

4. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វីត (a_n) ហើយបំពេញ

លក្ខខណ្ឌ (a_n): $a_1 = 1,\ S_n = a_{n+1} + n^2\ \ (n \geq 1)$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វីត a_n ។

5. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វីត (a_n) ហើយ S_n បំពេញ

លក្ខខណ្ឌ $S_n = \dfrac{n}{n-1} \cdot a_n\ (n \geq 2)$ ។

ក. បញ្ជាក់រក $a_n\ \ (n \geq 3)$ អនុគមន៍ n និង a_{n-1} ។

ខ. បញ្ជាក់រក $S_n\ \ (n \geq 2)$ អនុគមន៍ n និង S_{n-1} ។

គ. ឧបមាថា $a_1 = 1$ រកតួទី n នៃស្វីត S_n ដែល $n \geq 1$ ។

6. គេមានស្វីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$$(a_n):\ a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+3}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$ ។

ក. តាង $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ ។ កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង b_n និង b_{n+1} ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វីត (a_n) ។

7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$n \geq 1\ ;\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដោយប្រើវិធានអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

8.បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ក. ចំនួន 4^n+2 ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. ចំនួន $3^{n+3}-4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

9. គេមានស្វ៊ីត $(U_n)_{n\in IN}$ កំណត់ដោយ $U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}$ និង $U_o=0$ ។ បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា

ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, $U_n\le 2$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, $U_n\le U_{n+1}$ ។

10. បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n $(1+x)^n\ge 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួន $x\ge 0$ ។

11. សរសេរបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា $S_{10}=210$ និង $S_{20}=820$ ។

12. គេដឹងថាផលបូកតួទី 1 និង តួទី 4 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 2 និងផលបូកការេរបស់វាស្មើនឹង 20 ។

គណនាផលបូកប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

13. គេមាន S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នា នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}(n\neq m)$ ។ តាងតួទី m និងតួទី n គឺ u_n ។ បង្ហាញថា $\frac{u_m}{u_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$ ។

14. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $12, 4, \frac{4}{3},...$ ។

ក. គណនាតួទី 10 ។

ខ. តើចំនួន $\frac{4}{729}$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

គ. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

15. គេឱ្យ U_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា $U_n=2(3)^{n-1}$ ។ គណនា S_n ។

16. គណនាតួទី 1 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $q=\frac{3}{5}$ និង $S_\infty=40$ ។

17. គេឱ្យបីចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ គណនាចំនួនទាំងបី បើគេដឹងថា ផលគុណនៃចំនួនទាំងនោះស្មើនឹង 3375 និងផលបូកវាស្មើនឹង 93 ។

18. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វីតនីមួយៗខាងក្រោមៈ

ក. ស្វីត(a_n): $1\ ,\ \frac{1}{1+2}\ ,\ \frac{1}{1+2+3}, ...,\ \frac{1}{1+2+3+4+...+n}$

ខ. ស្វីត (b_n): $\frac{1}{(1\times 3)^2}, \frac{2}{(3\times 5)^2}, \frac{3}{(5\times 7)^2}, ..., \frac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

19. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វីត $1, 2, 6, 15, 31, 56,...$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វីតនេះ ។

20. ដោយប្រើវិចារអនុគមន៍មានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយបញ្ជាក់ថា

$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$ ។

21. គេមានស្វីត U_n កំណត់ដោយ $U_{n+1} = 2U_n + 1$ និង $U_0 = 1$

ហើយ (V_n) កំណត់ដោយ $V_n = U_n + 1$ ។

ក. បង្ហាញថាស្វីត (V_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. សិក្សាភាពម៉ូនូតូននៃស្វីត U_n ។

ឃ. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គណនាផលបូក

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$ ។

22. គេមានស៊ីត U_n កំណត់ដោយ $U_{n+1}=\frac{U_n+2}{U_n+1}$ និង $U_0=2$

ក. គណនា U_1, U_2, U_3 ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in IN$

$$U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-U_n\right)}{U_n+1}$$ ។

គ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in IN$; $U_n>1$ ។

ឃ. ទាញពីសំនួរ ខ. និង គ. ថា

$$\left|U_{n+1}-\sqrt{2}\right|\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times\left|U_n-\sqrt{2}\right|$$

ង. បង្ហាញតាមវិចារអនុគមន៍មានរូមគណិតវិទ្យាថា

$$\left|U_n-\sqrt{2}\right|\le\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\times\left|\sqrt{2}-U_0\right|$$ ។

23. គេមាន (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$$a_1=1\ ,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n$$ ។

ក. តាង $b_n=2^n a_n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (b_n) ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

24. កំនត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលមានផលបូក n តួដំបូង S_n

កំនត់ដូចខាងក្រោម :

ក. $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

ខ. $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

គ. $S_n = 2^{n+1} - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

ឃ. $S_n = 4n^2 + 9n$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

ង. $S_n = 2n^3 + 3n^2 + n$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1 , 2 , 3 , ...$

25.គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) និង (b_n) កំនត់ដោយ $a_0 = 2$; $b_0 = 1$

និង ទំនាក់ទំនងកំណើន

$a_{n+1} = \dfrac{7a_n + b_n}{3}$ និង $b_{n+1} = \dfrac{2(a_n + 4b_n)}{3}$ គ្រប់ $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; .....$ ។

ក. គេតាង $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ និង $y_n = \dfrac{1 + x_n}{1 - 2x_n}$ ។ រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (y_n)

ខ. គណនា y_n ; x_n ; a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

26.កំណត់ស្វ៊ីត(a_n)កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន ដូចខាងក្រោម:

ក. $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n + 3n - 4$ ($n = 1 ; 2 ; 3 ;...$)

ខ. $a_1 = 1$; $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + n^2$ ($n = 1 ; 2 ; 3 ;...$)

គ. $a_1 = 0$; $a_{n+1} = -3a_n + 4n^2 - n + 3$ ($n = 1 ; 2 ; 3 ;...$)

27.កំណត់ស៊ីត(a_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន ដូចខាងក្រោម៖

ក. $a_1 = 3\ ;\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{2a_n - 3} \quad (\ n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;...)$

ខ. $a_1 = 3\ ;\ a_{n+1} = \dfrac{6a_n - 4}{a_n + 2} \quad (\ n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;...)$

គ. $a_1 = 0\ ;\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (\ n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;...)$

28. កំនត់តួទី n នៃស៊ីត (u_n) ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំនើនខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} u_1 = 6\ ;\ u_2 = 18 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \quad ,\ n \geq 1 \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} u_1 = 2\ ;\ u_2 = 12 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n\ ;\ n \geq 1 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} u_1 = 1\ ;\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\ ;\ n \geq 1 \end{cases}$

ឃ. $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - \dfrac{9}{4}u_n\ ,\ n \geq 1 \end{cases}$

ង. $\begin{cases} u_1 = 0\ ;\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{4u_{n+1} - u_n}{4}\ ;\ n \geq 1 \end{cases}$

ច. $\begin{cases} u_1 = 0\ ;\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n\ ;\ n \geq 1 \end{cases}$

ឆ. $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n\ ,\ n \geq 1 \end{cases}$

29. កំនត់តួទី n នៃស៊ីត (u_n) ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំនើនខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+4u_n^{\ 2}}} \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2u_n + 2 \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

គ. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = (u_n + 2\sqrt{u_n})^2 \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

ឃ. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} + 9}{2u_n} \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

ង. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{(u_n + 2)(u_n^{\ 2} - 2u_n + 4)} \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

ច. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n^2 + 2n + 1} u_n^{\ 2} \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

ឆ. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 3} + 6u_n^{\ 2} + 12u_n + 6 ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

ជ . $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} - 3}{2u_n} \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

ញ. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 5} \ ; n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$

30. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ដោយ :

$u_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \log_2\left(2^{1+u_n} - 1\right)$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

31. គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} a_0 = 7 \ ; \ b_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{7a_n + 3b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 8b_n}{3} \end{cases}$

ដែល $n = 0 , 1 , 2 , 3 , ...$ ។

ក-ស្រាយថាស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) ដែលកំនត់ដោយ $x_n = a_n - b_n$

និង $y_n = a_n + 2b_n$ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

គ-ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ។

32. គេឱ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt[3]{1 + 8{u_n}^3}} \end{cases} , n \in IN$

ក. ចូរស្រាយថា $v_n = \dfrac{1}{{u_n}^3}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ខ. គណនា v_n និង $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៏នៃ n ។

គ. ទាញរកតួ u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

33. គេឱ្យស៊ីត (a_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} a_0 = 2\sqrt{3} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^{\ 2} - 4}{2a_n} \end{cases}$

ដែល $n = 0 , 1 , 2 , 3 , ...$ ។

ក. គេពិនិត្យស៊ីត (θ_n) ដែលកំនត់ដោយ $a_n = 2\cot\theta_n$ គ្រប់ $n \geq 0$ ។

រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ។

ខ. គណនា θ_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

34. គេឱ្យស៊ីត (a_n) និង (b_n) កំនត់ដោយ :

$a_0 = b_0 = 1$ និង $a_{n+1} = a_n^{\ 2} - 3b_n^{\ 2}$; $b_{n+1} = 2a_n b_n$

ក. គេតាង $z_n = a_n + i\sqrt{3}b_n$ ។ ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = z_n^{\ 2}$ ។

ខ. ចូរសរសេរ z_n ជាទម្រង់ $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ។

គ. ទាញរកតួ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

35. គេឱ្យស៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ដោយ

$u_0 = 4$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1} = \dfrac{n^2 + n - 4 + (n+4)u_n}{3 - n - u_n}$

ក. គេតាង $V_n = \dfrac{u_n + n - 1}{u_n + n + 1}$ ។ ចូរស្រាយថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកកន្សោម u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

36. គេឱ្យស្ទីតចំនួនពិត (u_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ដោយ

$u_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{n^2+2n+2}{2n^2+6n+4}$

ក. គេតាង $V_n = u_n + \frac{n}{n+1}$ ។ ចូរស្រាយថា (V_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកកន្សោម u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

37. គេឱ្យស្ទីត (x_n) និង (y_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} x_{n+1} = (1-\frac{2}{n})x_n - (2+\frac{1}{n})y_n \\ y_{n+1} = \frac{2}{n}x_n + (3+\frac{1}{n})y_n \end{cases}$$

ដែល $n = 1 , 2 , 3 , ...$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $z_n = x_n + n\,y_n$ ជាស្ទីតធរណីមាត្ររួចគណនា z_n ។

ខ.បង្ហាញថា $C_n = x_n + y_n$ ជាស្ទីតថេរ រួចកំនត់ C_n ។

គ.ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

38. គេឱ្យស្ទីត (x_n) កំនត់ដោយ $x_{n+1} = (x_n + 4\sqrt{x_n} + 2)^2$ និង $x_0 = 4$

ចំពោះគ្រប់ $n = 0 ; 1 ; 2 ; ....$ ។

ក. គេតាង $y_n = \ln(2+\sqrt{x_n})$ ។ ស្រាយថា (y_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា y_n និង x_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

39. គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{6} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2}-3}{2(u_n-1)} \end{cases}$ $(\ n \in IN\ )$

ចូរស្រាយតាមកំណើនថា $u_n = 1+\sqrt{2}\cot\dfrac{2^n\pi}{6}$ ។

40. គេឱ្យស្វ៊ីត (y_n) កំនត់ដោយ ៖

$y_0 = 3$ និង $y_{n+1} = -\dfrac{3y_n^{\ 2}-2y_n+3}{y_n^{\ 2}-6y_n+1}$ ដែល $n \in IN$

ក. គេតាង $z_n = 2\,\dfrac{y_n-1}{y_n+1}$ ។ ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = z_n^{\ 2}$

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរបង្ហាញថា $z_n = z_0^{\ 2^n}$ ។

គ. ទាញរក y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

41. គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{n+1} = x_n^{\ 2}-2x_n+2\ ;\ (\ n \in IN) \end{cases}$

ក. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរស្រាយថា $x_n = 3^{2^n}+1$ ។

ខ. គណនា $P_n = x_0 \times x_1 \times x_2 \times .... \times x_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

42. គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^{\ 2}+na_n+\dfrac{n^2-2n-2}{4} \end{cases}$

ដែល $n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_{n+1}+\dfrac{n+1}{2} = (a_n+\dfrac{n}{2})^2$ រួចគណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃn ។

43. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំនត់ដោយ $z_n = a_n + i\,b_n$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} a_0 = b_0 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n{}^2 - b_n{}^2 \\ b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$

($n = 0\,;1\,;2\,;3\,;\,....$) ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = z_n{}^2$ រួចទាញថា $z_n = z_0{}^{2^n}$ ។

ខ. សរសេរ z_0 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_n ។

44. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំនត់ដោយ :

$z_0 = 2$ និង $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} z_n + \dfrac{2-\sqrt{3}-i}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ក. គេតាង $w_n = z_n - 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $w_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} w_n$ ។

ចូរកំនត់ w_n ក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12})$ ។

គ. គេឱ្យសំណុំ $₵ = \{\ z_n\ /\ 7 \le n \le 777\ \}$ ។

តើសំណុំ ₵ មានធាតុជាចំនួនពិតប៉ុន្មាន ? ធាតុជាចំនួននិម្មិតប៉ុន្មាន ?

ឃ. ចូរកំនត់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_n ទៅតាមតម្លៃផ្សេងៗនៃ n ។